MATEMÁTICAS

1^0 DEL GRADO EN CIENCIAS AMBIENTALES
CURSO 13-14

Hoja de problemas del TEMA 7

1. Calcular los siguientes determinantes:

$$\text{(I)} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{(II)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix} \quad \text{(III)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} \quad \text{(IV)} \begin{vmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 5 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{(V)} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{(VI)} \begin{vmatrix} 3 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{(VII)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Dadas las siguientes matrices, calcular los autovalores y sus autovectores asociados.

$$\text{(I)} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{(II)} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(III)} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{(IV)} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{(V)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(VI)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(VII)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Diagonalízense, si es posible, las siguientes matrices.

$$\text{(I)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{(II)} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{(III)} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & -5 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(IV)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{(V)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(VI)} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{(VII)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(VIII)} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Sea la matriz $\mathbf{A}$ dependiente del parámetro a.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ -2 & 2 & a \\ 0 & 1+2a & 1+a \end{pmatrix}$$

   (a) Encontrar los autovectores de $\mathbf{A}$ en el caso $a = 1$.

   (b) Comprobar que $\lambda = 1$ es un autovalor de $\mathbf{A}$ para cualquier valor de a.

5. Estudiar si para $a = 0$ la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

   es diagonalizable. ¿Y para $a = 1$?.

6. Calcular A^{100}, siendo la matriz A:

$$\text{(I)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{(II)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{(III)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(IV)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{(V)} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

SOLUCIONES

1. (I) -1
   (II) 14
   (III) -12
   (IV) 0
   (V) 96
   (VI) 9
   (VII) -16

2. (I) 1 , [-1,1] ; 3 , [-1,2]
   (II) 1 , [-2,3] ; 6 , [1,1]
   (III) 4 , [1,-2] ; 0 , [1,2]
   (IV) 2 , [1,0] , [0,1]
   (V) -2 , [0,1,0] ; 1 , [3,-1,3]
   (VI) 0 , [1,1,1] ; 1 , [-1,0,1] ; 3 , [1,-2,1]
   (VII) -1 , [1,0,1] ; 1 , [3,2,1] ; 2 , [1,3,1]

3. (I) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
   (II) No diagonalizable
   (III) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   (IV) No es diagonalizable
   (V) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   (VI) $\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
   (VII) A no es diagonalizable
   (VIII) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

4. (a) $1,\ [-1,1,-3]\ ;\ 2,\ [1,0,2]\ ;\ 3,\ [1,1,3]$

5. Para $a = 0$ A es diagonalizable. Para $a = 1$ no lo es.

6. (I) $A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{pmatrix}$
   (II) $A^{100} = PD^{100}P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{100} & 0 \\ 0 & 4^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3+2\cdot 4^{100} & -2+2\cdot 4^{100} \\ -3+3\cdot 4^{100} & 2+3\cdot 4^{100} \end{pmatrix}$
   (III) $A^{100} = PD^{100}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{100} & 0 \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2+2\cdot 3^{100} & -3^{100} \\ 4-4\cdot 3^{100} & 2-2\cdot 3^{100} \end{pmatrix}$
   (IV) $A^{100} = PD^{100}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{99} & -2^{99} & 0 \\ -2^{99} & 2^{99} & 0 \\ -2^{99} & -2^{99} & 2^{99} \end{pmatrix}$
   (V) $A^{100} = PD^{100}P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 6^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6^{100}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 6^{99} & 6^{99} \\ 0 & \frac{6^{100}}{3} & \frac{6^{100}}{3} \end{pmatrix}$