

MATEMÁTICAS (1º GRADO EN CIENCIAS AMBIENTALES). CURSO 13-14.
Hoja de problemas del TEMA 4.

1. Encontrar y representar gráficamente el dominio de las siguientes funciones de varias variables:

$$(i) \quad f(x, y) = \sqrt{x} + \frac{4}{y} \quad (ii) \quad f(x, y) = \sqrt{2x + y} \quad (iii) \quad f(x, y) = \frac{1}{x - 3y}$$

$$(iv) \quad f(x, y) = 7x^2 + 2xy + y^2 \quad (v) \quad f(x, y) = \ln(2x^2 - y) \quad (vi) \quad f(x, y) = 4e^{3xy}$$

2. Dadas las funciones:

$$(i) \quad f(x, y) = 6 - 3x - y \quad (ii) \quad f(x, y) = 9 - 3x \quad (iii) \quad f(x, y) = 4 - y^2$$

$$(iv) \quad f(x, y) = 4 + x - y^2 \quad (v) \quad f(x, y) = 16 - x^2 - y^2 \quad (vi) \quad f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

- (a) Encontrar el dominio y el recorrido de cada una de ellas.
- (b) Dibujar algunas de sus curvas de nivel.
- (c) Dibujar la intersección de su gráfica con los planos coordenados.
- (d) Dibujar aproximadamente su gráfica.

3. Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en el punto (x_0, y_0) :

$$(i) \quad f(x, y) = 6 - 3x - 2y, (0, 0) \quad (ii) \quad f(x, y) = 3x^2 - 7y^3, (1, -1)$$

$$(iii) \quad f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, (1, -1) \quad (iv) \quad f(x, y) = e^{y-x}, (2, 2)$$

$$(v) \quad f(x, y) = x \ln y^2, (1, 1) \quad (vi) \quad f(x, y) = \ln(3xy + y^2), (1, 2)$$

$$(vii) \quad f(x, y) = xe^{y^2}, (1, 1) \quad (viii) \quad f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, (-2, 1)$$

Probar que se verifica $f_{xy} = f_{yx}$ para las funciones anteriores.

4. Considerar la curva formada como intersección de la superficie $z = x^2 + y^2$ con el plano $y=2$.

- (a) Dibujar aproximadamente la curva.
- (b) Hallar la pendiente de la tangente a la curva en el punto $(1, 2, 5)$.

5. Considerar la curva formada como intersección de la superficie $z = 5 - x^2 - y^2$ con el plano $x=4$.

- (a) Dibujar aproximadamente la curva.
- (b) Hallar la pendiente de la tangente a la curva en el punto $(4, 2, -15)$.

6. La temperatura que se siente, W en °C, cuando el aire tiene una temperatura T en °C y la velocidad del viento es v m/s, se puede representar mediante la siguiente función

$$W(v, T) = 33 - 0.043(10.45 + 10\sqrt{v} - v)(33 - T)$$

- (a) Calcular W con $T = 0^\circ\text{C}$ y $v = 11$ m/s.
- (b) Calcular $\partial W / \partial v$ cuando $v = 11$ y $T = 0$.
- (c) Calcular $\partial W / \partial T$ cuando $v = 11$ y $T = 0$.

7. Representar gráficamente la superficie $f(x, y) = \sqrt{4 - x - y^2}$, especificando:

- (a) Su dominio y recorrido.
- (b) El dibujo de algunas de sus curvas de nivel.
- (c) El dibujo de la intersección de su gráfica con los planos coordenados.

8. Encontrar las funciones que verifican las condiciones indicadas.

$$(i) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 3x + y \quad (ii) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 3x + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 4y^3 + 7$$

$$(iii) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - \frac{3y^2}{x^2} \quad (iv) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = xye^x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{6y}{x} + 7 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^x - e^x + y^{-\frac{1}{2}}$$

$$f(1, 0) = 0 \quad f(0, 4) = 3$$

9. Encontrar la función $f(x, y)$ que verifica las siguientes tres propiedades:

(i) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + y^2$.

(ii) $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 2xy$.

(iii) $\iint_D f(x, y) dx dy = \frac{83}{120}$, donde D es la región limitada por el cuadrado de vértices $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ y $(1,1)$.

10. Calcular.

(i) $\int_0^3 \int_2^4 x^2 y dx dy$ (ii) $\int_2^4 \int_0^3 x^2 y dx dy$ (iii) $\int_1^3 \int_0^4 \sqrt{x+y} dy dx$
(iv) $\int_0^5 \int_0^2 x e^y dy dx$ (v) $\int_0^1 \int_{-1}^0 x y^3 dy dx$ (vi) $\int_0^4 \int_0^3 dy dx$

SOLUCIONES

3. (i) $-3, -2$. (ii) $6, -21$. (iii) $-\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}$. (iv) $-1, 1$.
(v) $0, 2$. (vi) $\frac{3}{5}, \frac{7}{10}$. (vii) e, e . (viii) $-\frac{3}{25}, -\frac{6}{25}$.

4. 2.

5. -4.

6. (a) -13.28°C , (b) -0.72 , si v aumenta W disminuye, (c) 1.40 , si T aumenta W aumenta.

8. (i) $\frac{3}{2}x^2 + xy + g(y)$; (ii) $\frac{3}{2}x^2 + xy + y^4 + 7y + c$; (iii) $x^2 + \frac{3y^2}{x} + 7y - 1$; (iv) $y(xe^x - e^x) + 2\sqrt{y} + 3$.

9. $f(x, y) = x^3y + y^2x + \frac{2}{5}$.

10. (i) 84; (ii) 54; (iii) $\frac{4}{15}(7^{\frac{5}{2}} - 5^{\frac{5}{2}} - 3^{\frac{5}{2}} + 1) \approx 15.77$; (iv) $\frac{25}{2}(e^2 - 1) \approx 79.86$; (v) $-\frac{1}{8}$; (vi) 12.