

MATEMÁTICAS (1º GRADO EN CIENCIAS AMBIENTALES). CURSO 13-14.
Hoja de problemas del TEMA 3.

1. Calcular las siguientes integrales indefinidas:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & \int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx & \text{(b)} \quad \int \cos^2 x dx \quad \text{(c)} \quad \int (\cos x - \sin x)^2 dx \\ \text{(d)} & \int \tan^2 x dx & \text{(e)} \quad \int \frac{3x}{x^2+2} dx \quad \text{(f)} \quad \int \frac{x-1}{x+1} dx \\ \text{(g)} & \int \frac{2x-3}{x^2+6x+13} dx & \text{(h)} \quad \int (\ln x)^2 dx \quad \text{(i)} \quad \int e^{2x} \sin x dx \end{array}$$

2. Calcular las siguientes integrales definidas:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & \int_0^3 (3x^2 + x - 2) dx & \text{(b)} \quad \int_1^2 \sqrt{\frac{2}{x}} dx \quad \text{(c)} \quad \int_{-2}^{-1} (x - \frac{1}{x^2}) dx \\ \text{(d)} & \int_0^2 (2-x)\sqrt{x} dx & \text{(e)} \quad \int_{-1}^1 |x^3| dx \quad \text{(f)} \quad \int_0^3 |2x-3| dx \end{array}$$

3. Encontrar el área limitada por las curvas $x^2 = 4y$, $y = \frac{1}{x^2+3}$.

4. Encontrar el área limitada por las curvas $x = 3 - y^2$, $y = x - 1$.

5. Utiliza (a) la regla del trapecio; (b) la regla del punto medio; y (c) la regla de Simpson para aproximar cada una de las siguientes integrales con el valor especificado de n (redondea tus respuestas a seis cifras decimales):

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx, \quad n = 8 \quad \text{(b)} \quad \int_2^3 \frac{1}{\ln x} dx, \quad n = 8 \\ \text{(c)} & \int_0^1 \ln(1+e^x) dx, \quad n = 6 \quad \text{(d)} \quad \int_0^4 \sqrt{x} \sin x dx, \quad n = 6 \end{array}$$

6. (a) Calcula las aproximaciones T_8 , M_8 , y S_8 para $\int_0^1 \cos x^2 dx$.

(b) Estima los errores cometidos en estas aproximaciones.

7. (a) Calcula las aproximaciones T_6 , M_6 , S_6 , T_{12} , M_{12} , y S_{12} para $\int_{-1}^2 xe^x dx$. Redondea tus respuestas a seis cifras decimales.

(b) Estima los errores cometidos en estas aproximaciones.

(c) ¿Qué sucede a los errores cuando se duplica n ?

8. ¿Qué valor debemos dar a n para que las aproximaciones T_n , M_n , y S_n de la integral $\int_0^1 e^{x^2} dx$ tengan una exactitud de 0,00001?

9. ¿Qué valor debemos dar a n para que las aproximaciones T_n , M_n , y S_n de la integral $\int_0^2 (x+1)^{\frac{2}{3}} dx$ tengan una exactitud de 0,00001?

10. Calcular las siguientes integrales impropias:

$$\begin{array}{llll} \text{(I)} & \int_0^\infty e^{-x} dx & \text{(II)} & \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ \text{(V)} & \int_{-\infty}^\infty x^3 dx & \text{(VI)} & \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{(x^2+3)^2} dx \\ \text{(IX)} & \int_{-1}^8 x^{-\frac{1}{3}} dx & \text{(X)} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} dx \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(III)} & \int_4^\infty \frac{2}{x^2-1} dx \\ \text{(VII)} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x dx \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(IV)} \quad \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(2x-1)^3} \\ \text{(VIII)} \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}$$

11. Calcular el área de la región encerrada entre $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$, y $y = (1-x)^{-2}$.

12. La función $Q(t)$ representa la proporción de un producto químico que ha sido absorbida por una membrana porosa tras un tiempo t (horas). La tasa de absorción es $\frac{dQ}{dt} = t e^{-t}$.

(a) Si inicialmente no se había producido absorción, calcular la proporción absorbida tras 5 horas, y tras 10 horas.

(b) Calcular $\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t)$ e interpretar el resultado.

13. La función $P(t)$ representa el porcentaje de la población que ha probado un nuevo producto en los primeros t meses después de su salida al mercado. La velocidad a la que está cambiando $P(t)$ para cierto producto dietético es $P'(t) = 100 \frac{\ln(t+1)}{(t+1)^2}$. Calcular el porcentaje de la población que ha probado el producto en el primer mes y en el primer año.
14. Hallar el área del recinto limitado por la curva $y = x^3 - x$ y su tangente en el punto de abscisa $x = -1$.
15. Hallar el área de la región limitada por $y = |x - 2|$, $x = 4 - y^2$.

SOLUCIONES

1. (a) $\frac{2(1+\sqrt{x})^3}{3} + C$ (b) $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin(2x) + C$ (c) $x + \frac{1}{2} \cos(2x) + C$ (d) $\tan x - x + C$ (e) $\frac{3}{2} \ln(x^2 + 2) + C$ (f) $x - 2 \ln|x + 1| + C$ (g) $\ln|x^2 + 6x + 13| - \frac{9}{2} \arctan \frac{x+3}{2} + C$ (h) $x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$ (i) $\frac{e^{2x}}{5} (-\cos x + 2 \sin x)$
2. (a) 25,5 (b) 1,17 (c) -2 (d) 1,508 (e) 0,5 (f) 4,5
3. 0,438
4. 4,5
5. (a) $T_8 = 1,401009833$, $M_8 = 1,402773814$, $S_8 = 1,402234121$
 (b) $T_8 = 1,119418367$, $M_8 = 1,117928749$, $S_8 = 1,118432185$
 (c) $T_6 = 0,9843539926$, $M_6 = 0,9835515230$, $S_6 = 0,9838186457$
 (d) $T_6 = 1,703418314$, $M_6 = 1,803019708$, $S_6 = 1,776905400$
6. (a) $T_8 = 0,9023328434$, $M_8 = 0,9056199570$, $S_8 = 0,9045241594$ (b) 0,007813, 0,003906, 0,000103
7. (a) $T_6 = 8,583513$, $M_6 = 7,896632$, $S_6 = 8,136885$, $T_{12} = 8,240072939$, $M_{12} = 8,067259483$, $S_{12} = 8,125592732$
 (b) $|E_{T6}| \leq 1,847264$, $|E_{T12}| \leq ,461816$, $|E_{M6}| \leq ,923632$, $|E_{M12}| \leq ,230908$, $|E_{S6}| \leq 0,046182$, $|E_{12}| \leq 0,002886$
8. 369, 261, 20 resp.
9. 122, 87, 12 resp.
10. (I) 1 (II) div. (III) $\ln(\frac{5}{3})$ (IV) $-\frac{1}{4}$ (V) div. (VI) 0 (VII) div. (VIII) $\frac{\pi}{2}$
 (IX) $\frac{9}{2}$ (X) 2.
11. $+\infty$
12. (a) $\approx 0,96$, $\approx 0,9995$; (b) 1.
13. $\approx 15,34\%$ y $\approx 72,58\%$.
14. $\frac{27}{4}$.
15. $\frac{16}{3}$.