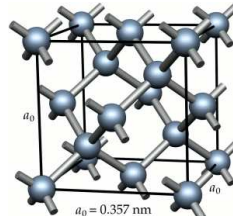
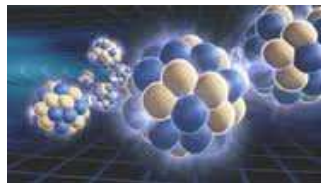
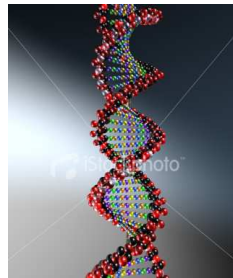
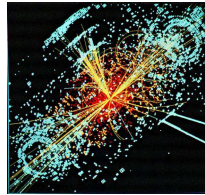


Fundamentos de Física III
(curso 2014–2015)

Prof. Juan Carlos Cuevas
Departamento de Física Teórica
de la Materia Condensada

UAM
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DE MADRID



Introducción a la Relatividad, Mecánica Cuántica,
Estructura de la Materia, Astrofísica y Cosmología.

Prefacio

Este manuscrito contiene las notas relacionadas con la asignatura de **Fundamentos de Física III** del grado de Física de la Universidad Autónoma de Madrid (curso 2014-2015) impartida por el profesor Juan Carlos Cuevas (Departamento de Física Teórica de la Materia Condensada). Dichas notas describen de forma exhaustiva todos los contenidos de dicha asignatura y su objetivo es proporcionar al estudiante una guía completa de la misma. La confección de estas notas ha sido motivada por dos razones fundamentales. En primer lugar, los libros básicos recomendados para esta asignatura aún no son de fácil acceso (no hay muchos ejemplares en nuestra biblioteca) o son excesivamente caros. De todos modos, en ningún caso estas notas pretenden substituir a los excelentes libros que existen en el mercado y se recomienda encarecidamente su consulta. En segundo lugar, la existencia de estas notas nos permitirá dedicarle más tiempo en las clases teóricas a reflexionar sobre las ideas y conceptos básicos de esta asignatura, lo que a buen seguro hará las clases mucho más atractivas e interesantes.

Por otra parte, es conveniente describir brevemente la estructura de estas notas. Cada capítulo está organizado de la siguiente forma. En primer lugar se encuentran las diversas secciones que contienen la teoría básica del tema tratado, así como numerosos ejemplos resueltos donde se ilustran los conceptos fundamentales. La penúltima sección de cada capítulo presenta una descripción detallada de la bibliografía utilizada para confeccionarlo, así como algunas recomendaciones para ampliar conocimientos. Finalmente, la última sección de cada capítulo contiene una colección de cuestiones y problemas que marcan el nivel de este curso y que deben servir al estudiante no sólo para comprobar su dominio de los temas tratados, sino también para ampliar conocimientos.

Índice

<i>Prefacio</i>	3
<i>Lista de Figuras</i>	11
<i>Lista de Tablas</i>	17
1. Relatividad I: Cinemática	1
1.1 Relatividad newtoniana	1
1.2 Los postulados de la relatividad	3
1.3 Las transformaciones de Lorentz	5
1.4 Dilatación del tiempo y contracción de la longitud	7
1.5 El efecto Doppler relativista	10
1.6 Transformación de las velocidades	13
1.7 La paradoja de los gemelos y otras sorpresas	15
1.8 Diagramas de Minkowski: espacio-tiempo y causalidad	17
1.9 Bibliografía recomendada	20
1.10 Ejercicios del Capítulo 1	21
2. Relatividad II: Dinámica y gravitación	29
2.1 Momento lineal relativista	29
2.2 Energía relativista	32
2.3 Algunas consecuencias de los principios de conservación	36
2.4 Introducción a la relatividad general	41
2.4.1 El principio de equivalencia	42
2.4.2 Desviación de la luz por un campo gravitatorio	43
2.4.3 Lentes gravitatorias	44
2.4.4 El corrimiento al rojo gravitacional	46
2.4.5 Agujeros negros	48
2.4.6 Ondas gravitatorias	49
2.5 Bibliografía recomendada	49
2.6 Ejercicios del Capítulo 2	51

3.	Mecánica cuántica I: dualidad onda-corpúsculo	59
3.1	La naturaleza corpuscular de la luz: fotones	59
3.1.1	Breve repaso de la teoría clásica de la radiación	59
3.1.2	La radiación de cuerpo negro	61
3.1.3	El efecto fotoeléctrico	67
3.1.4	El efecto Compton	70
3.2	Electrones y ondas de materia	71
3.2.1	La hipótesis de Louis de Broglie	72
3.2.2	Interferencia y difracción de electrones	73
3.2.3	El microscopio electrónico	74
3.3	Interpretación de la función de onda	75
3.4	El principio de incertidumbre de Heisenberg	76
3.5	Algunas consecuencias del principio de incertidumbre	77
3.6	Bibliografía recomendada	80
3.7	Ejercicios del Capítulo 3	80
4.	Mecánica cuántica II: la ecuación de Schrödinger	87
4.1	La ecuación de Schrödinger en una dimensión	87
4.1.1	La ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo	88
4.1.2	La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo	89
4.1.3	Condiciones para una función de onda válida	90
4.2	Partícula en un pozo de potencial infinito	91
4.3	Pozo de potencial finito	96
4.4	Valores esperados y operadores	99
4.4.1	Valores esperados	99
4.4.2	Operadores	103
4.5	El oscilador armónico cuántico	105
4.6	Reflexión y transmisión de ondas: el efecto túnel	108
4.6.1	Escalón de potencial	108
4.6.2	Barrera de potencial	110
4.7	Ejemplos y aplicaciones del efecto túnel	111
4.7.1	Emisión de campo	112
4.7.2	El microscopio de efecto túnel	114
4.7.3	Radiación alfa	116
4.7.4	Radiación de un agujero negro	118
4.8	Bibliografía recomendada	118
4.9	Ejercicios del Capítulo 4	119
5.	Física atómica	125
5.1	Espectros atómicos.	125
5.2	Modelo de Bohr del átomo de hidrógeno	129
5.3	La ecuación de Schrödinger en tres dimensiones.	134

5.4	Teoría cuántica del átomo de hidrógeno	136
5.5	El espín del electrón	143
5.6	El momento angular y el efecto espín-órbita	146
5.7	La ecuación de Schrödinger para dos o más partículas	148
5.8	La tabla periódica	150
5.9	Espectro ópticos y de rayos X	154
5.10	Bibliografía recomendada	158
5.11	Ejercicios del Capítulo 5	159
6.	Moléculas	165
6.1	El enlace molecular	165
6.1.1	Enlace iónico	166
6.1.2	Enlace covalente	167
6.1.3	El enlace van der Waals	171
6.1.4	El enlace de hidrógeno	172
6.2	Niveles energéticos y espectros de moléculas diatómicas	172
6.2.1	Niveles energéticos de rotación	173
6.2.2	Niveles energéticos de vibración	175
6.2.3	Espectros de emisión y de absorción	176
6.3	Bibliografía recomendada	179
6.4	Ejercicios del Capítulo 6	180
7.	Sólidos	183
7.1	La estructura de los sólidos	183
7.1.1	Sólidos iónicos	184
7.1.2	Sólidos covalentes	186
7.1.3	Sólidos metálicos	187
7.2	Imagen microscópica de la conducción eléctrica	187
7.3	El gas de electrones de Fermi	190
7.4	Teoría cuántica de la conducción eléctrica	194
7.5	Teoría de bandas de los sólidos	194
7.6	Semiconductores	197
7.7	Uniones y dispositivos semiconductores	200
7.8	Superconductividad	204
7.9	Bibliografía recomendada	208
7.10	Ejercicios del Capítulo 7	208
8.	Física nuclear	213
8.1	Propiedades de los núcleos	213
8.2	Radiactividad	218
8.2.1	Desintegración alfa	221
8.2.2	Desintegración beta	224

8.2.3	Desintegración gamma	227
8.2.4	Radiactividad natural	228
8.3	Reacciones nucleares	229
8.3.1	Sección eficaz de una reacción nuclear	231
8.3.2	Reacciones nucleares que involucran neutrones	233
8.4	Fisión y fusión	235
8.4.1	Fisión nuclear	236
8.4.2	Reactores nucleares de fisión	238
8.4.3	Fusión nuclear	241
8.5	Bibliografía recomendada	243
8.6	Ejercicios del Capítulo 8	244
9.	Física de partículas	249
9.1	Partículas elementales	249
9.2	Interacciones fundamentales	253
9.3	Leyes de conservación	257
9.4	Detección de partículas elementales	261
9.5	El modelo estándar	267
9.5.1	El modelo de quarks	267
9.5.2	Cromodinámica cuántica (QCD)	269
9.5.3	La teoría electrodébil	270
9.6	Más allá del modelo estándar	270
9.6.1	Neutrinos masivos	271
9.6.2	Teorías de gran unificación y supersimetría	272
9.6.3	Teoría de cuerdas	274
9.7	Bibliografía recomendada	275
9.8	Ejercicios del Capítulo 9	276
10.	Astrofísica	283
10.1	El Sistema Solar	283
10.1.1	Características generales	283
10.1.2	Formación del Sistema Solar	285
10.1.3	El Sol	287
10.1.4	Planetas, asteroides y cometas	297
10.2	Las estrellas	301
10.2.1	Parámetros estelares	301
10.2.2	Clasificación espectral	303
10.2.3	Diagrama de Hertzsprung-Russel	304
10.2.4	Relación masa-luminosidad	305
10.2.5	Fuentes de energía estelar	306
10.2.6	Evolución estelar	309
10.3	Galaxias	313

10.3.1	La Vía Láctea	314
10.3.2	Clasificación de las galaxias	317
10.3.3	Poblaciones estelares	321
10.4	Materia y energía oscura	322
10.4.1	Evidencias de la existencia de materia oscura	322
10.4.2	Candidatos a materia oscura	324
10.4.3	Búsqueda de la materia oscura	325
10.4.4	La energía oscura	325
10.5	Bibliografía recomendada	326
10.6	Ejercicios del Capítulo 10	327
Apéndice A El experimento de Michelson y Morley		331
Apéndice B El experimento de Franck y Hertz		335
Apéndice C El experimento de Stern y Gerlach		339
Apéndice D Constantes físicas fundamentales		343
D.1	Constantes fundamentales	343
D.2	Algunos factores de conversión	344
Apéndice E Soluciones de problemas seleccionados		345

Lista de Figuras

1.1	Sistemas de referencia inerciales moviéndose a velocidad constante el uno con respecto al otro.	2
1.2	Ejemplo de las consecuencias de los postulados de la relatividad especial.	3
1.3	Relatividad de la simultaneidad.	4
1.4	Transformaciones de Lorentz.	5
1.5	Dilatación del tiempo.	7
1.6	Dacaimiento de los muones.	10
1.7	El efecto Doppler relativista.	11
1.8	La ley de Hubble.	13
1.9	Ejemplo 1.7.	14
1.10	La paradoja de los gemelos.	16
1.11	Paradoja de la pértiga y el pajar.	16
1.12	Diagramas de Minkowski I.	17
1.13	Diagramas de Minkowski II.	18
1.14	Diagramas de Minkowski III.	19
1.15	Diagramas de Minkowski IV.	20
1.16	Problema 1.24.	24
1.17	Problema 1.26.	25
1.18	Problema 1.29.	26
1.19	Problema 1.37.	28
2.1	Colisión clásica entre dos partículas.	29
2.2	Colisión relativista entre dos partículas.	31
2.3	Creación de un par electrón-positrón.	37
2.4	Ejemplo 2.6.	38
2.5	El efecto Compton.	40
2.6	El principio de equivalencia.	42
2.7	La desviación de la luz por un campo gravitatorio.	43
2.8	Desviación de la luz por acción del Sol.	44
2.9	Representación esquemática de una lente gravitatoria.	45
2.10	Lentes gravitatorias detectadas por el telescopio Hubble.	45

2.11	Origen del corrimiento al rojo gravitacional.	46
2.12	Representación esquemática del corrimiento al rojo gravitacional.	47
2.13	Agujero negro detectado por el telescopio Hubble.	49
2.14	Periodo de revolución del sistema binario PSR 1913+16.	50
2.15	Problema 2.35.	56
3.1	El experimento de Young de la doble rendija.	60
3.2	Espectro electromagnético.	61
3.3	Distribución espectral de un cuerpo negro.	62
3.4	Agujero en una cavidad como ejemplo de cuerpo negro.	64
3.5	Comparación de la ley de Planck con los experimentos.	66
3.6	Distribución espectral de la radiación de fondo de microondas.	67
3.7	Esquema del aparato básico para el estudio del efecto fotoeléctrico.	68
3.8	Relación experimental entre la energía cinética y la frecuencia de la luz en el efecto fotoeléctrico.	69
3.9	El efecto Compton.	70
3.10	Ejemplo 3.6.	71
3.11	El experimento de dispersión de electrones de Davisson and Germer.	73
3.12	Microscopio electrónico.	74
4.1	Pozo de potencial infinito.	92
4.2	Esquema de niveles permitidos para un pozo de potencial infinito.	93
4.3	Funciones de onda para un pozo de potencial infinito.	93
4.4	Densidades de probabilidad para un pozo de potencial infinito y principio de correspondencia de Bohr.	94
4.5	Ejemplo 4-3.	96
4.6	Pozo finito de potencial.	96
4.7	Curvatura de las funciones de onda fuera de un pozo finito de potencial.	97
4.8	Esta fundamental de un pozo finito de potencial.	98
4.9	Funciones de onda para el pozo finito de potencial.	98
4.10	Potencial del oscilador armónico simple.	105
4.11	Niveles del oscilador armónico cuántico.	107
4.12	Funciones de onda del oscilador armónico cuántico.	107
4.13	Escalón de potencial.	108
4.14	Penetración parcial de una función de onda en un escalón de potencial.	110
4.15	Barrera rectangular de potencial.	110
4.16	Probabilidad de transmisión a través de una barrera de potencial rect- angular.	112
4.17	Barrera de potencial arbitraria.	112
4.18	Emisión de campo.	113
4.19	Microscopio de efecto túnel.	115
4.20	Imágenes tomadas con el microscopio de efecto túnel.	115
4.21	Desintegración alfa.	117

5.1	Líneas de los espectros de emisión de algunos elementos.	126
5.2	Experimento de Kirchhoff para explicar el origen de las líneas D del espectro solar.	127
5.3	Serie de Balmer del hidrógeno.	128
5.4	Esquema de niveles del átomo hidrógeno según el modelo de Bohr. . . .	133
5.5	Coordenadas esféricas.	135
5.6	Cuantización del momento angular.	139
5.7	Diagrama de niveles energéticos para el hidrógeno.	141
5.8	Densidad de probabilidad radial para el estado fundamental del átomo de hidrógeno.	142
5.9	Densidad de probabilidad radial para los estados excitados del átomo de hidrógeno.	143
5.10	Interacción espín-órbita.	147
5.11	Estructura fina del átomo de hidrógeno debido a la interacción espín-órbita.	148
5.12	Tabla periódica de los elementos.	152
5.13	Energía de ionización para los primeros 60 átomos de la tabla periódica.	154
5.14	Esquema de niveles energéticos del sodio.	156
5.15	Espectro de rayos X de molibdeno.	157
6.1	Energía potencial de los iones Na^+ y Cl^- en función de la distancia. . . .	167
6.2	Dos pozos simétricos.	168
6.3	Funciones de onda para la molécula de hidrógeno.	170
6.4	Energía potencial en función de la separación para dos átomos de hidrógeno.	170
6.5	Enlace entre moléculas de agua debido a la atracción de los dipolos eléctricos.	171
6.6	Atracción de van der Waals entre moléculas no polares.	172
6.7	Molécula diatómica girando alrededor de un eje que pasa por su centro de masas.	173
6.8	Niveles energéticos electrónicos, vibracionales y rotacionales de una molécula diatómica.	176
6.9	Espectro de emisión de la molécula N_2	177
6.10	Espectro de absorción de una molécula diatómica.	178
6.11	Espectro de absorción de la molécula diatómica HCl	179
7.1	Estructura cristalina del cloruro sódico.	184
7.2	Estructura cristalina del cloruro de cesio.	186
7.3	Estructura cristalina del diamante.	186
7.4	Energía de Fermi.	192
7.5	La función de Fermi para temperatura cero.	193
7.6	La función de Fermi en presencia de un campo eléctrico.	193
7.7	División energética de dos niveles de energía para seis átomos como función de la separación de los átomos.	195

7.8	Estructura de bandas de un conductor, un aislante y un semiconductor.	196
7.9	Silicio dopado con arsénico.	198
7.10	Silicio dopado con galio.	199
7.11	Unión $p-n$.	200
7.12	Característica corriente-voltaje de un diodo.	201
7.13	Emisión y absorción de luz en un semiconductor.	202
7.14	Transistor pnp .	203
7.15	Modo de operación de un transistor pnp .	204
7.16	Efecto Meissner.	206
7.17	Levitación superconductor.	207
8.1	Número de neutrones N en función del número de protones Z para los núclidos estables.	214
8.2	Principio de exclusión en núcleos atómicos.	215
8.3	Energía de enlace por nucleón para diversos núcleos como función del número másico.	217
8.4	Esquema de la energía potencial en una desintegración α .	222
8.5	Número de electrones emitidos en la desintegración β^- en función de la energía cinética.	225
8.6	Desintegración gamma del núcleo de ^{12}B .	227
8.7	Serie radiactiva del torio.	229
8.8	Sección eficaz nuclear I.	231
8.9	Sección eficaz nuclear II.	232
8.10	Sección eficaz de captura de neutrones para el cadmio.	234
8.11	Diferencia de masas nucleares por nucleón.	236
8.12	Modelo de gota líquida para la fisión nuclear.	237
8.13	Núcleo de un reactor nuclear.	239
8.14	Núcleo de un reactor nuclear.	240
8.15	Esquema de un reactor de agua a presión.	241
9.1	Extrañeza de algunos hadrones.	260
9.2	Generación de partículas extrañas en una cámara de burbujas.	262
9.3	Desintegración de una partícula Δ^+ .	264
9.4	Evidencia experimental de la existencia de la partícula Δ^+ .	265
9.5	Energía umbral en una reacción de partículas.	266
9.6	El detector de neutrinos Super-Kamiokande.	271
9.7	Unificación de las fuerzas nucleares y electromagnética.	273
9.8	Partículas supersimétricas.	274
9.9	Analogía entre una pajita de refresco y la teoría de cuerdas.	275
9.10	Problema 9.39.	281
10.1	Sistema Solar.	284
10.2	Formación del Sistema Solar.	286

10.3	Estructura del Sol.	288
10.4	Interior del Sol.	288
10.5	El Sol y su estructura granular.	289
10.6	Distribución espectral del Sol.	290
10.7	Corona solar.	292
10.8	Cadena protón-protón.	293
10.9	Manchas solares.	295
10.10	Eyección de masa coronal.	295
10.11	Prominencia solar.	296
10.12	Ciclo de vida del Sol.	296
10.13	El cometa Hale-Bopp.	300
10.14	Determinación del radio de una estrella.	303
10.15	Clasificación de las estrellas de acuerdo a su tipo espectral.	304
10.16	Diagrama de Hertzsprung-Russel.	305
10.17	Tres tipos de estrellas: secuencia principal, gigante roja y enana blanca.	306
10.18	Diversas variantes de la cadena protón-protón.	307
10.19	El ciclo CNO.	308
10.20	Reacción triple α	309
10.21	Estructura interna de las estrellas en la secuencia principal.	310
10.22	Nebulosa Ojo de gato.	311
10.23	La Nebulosa del Cangrejo.	312
10.24	Púlsar de la Nebulosa del Cangrejo.	314
10.25	La Vía Láctea.	315
10.26	Nebulosas oscuras y nebulosas de reflexión.	316
10.27	Nebulosa Rosetón (una nebulosa de emisión).	317
10.28	Cúmulos estelares.	318
10.29	Tipos de galaxias de acuerdo al esquema de clasificación de Hubble.	319
10.30	Galaxia elíptica NGC.	319
10.31	Galaxias espirales.	320
10.32	Galaxias irregulares.	321
10.33	Velocidad de rotación de las estrellas en galaxias espirales.	324
10.34	Lentes gravitatorias como método de detección de la materia oscura.	326
10.35	La energía oscura.	326
A.1	Interferómetro de Michelson.	332
A.2	Interferómetro de Michelson con viento de éter.	333
B.1	Esquema del dispositivo usado en el experimento de Franck y Hertz.	335
B.2	Resultados del experimento de Franck y Hertz.	336
C.1	Esquema del dispositivo usado en el experimento de Stern y Gerlach.	340
C.2	Resultados del experimento de Stern y Gerlach.	341

Lista de Tablas

4.1	Hipotético conjunto de datos sobre la posición de una partícula obtenidos en medidas sucesivas.	100
4.2	Observables comunes y sus operadores asociados en mecánica cuántica.	104
5.1	Algunas series espectrales del átomo de hidrógeno.	128
7.1	Temperaturas críticas de algunos superconductores.	205
8.1	Masas atómicas del neutrón y de algunos isótopos.	216
8.2	Las cuatro series radiactivas.	228
9.1	Hadrones estables frente a la desintegración vía la interacción nuclear fuerte.	250
9.2	Leptones.	251
9.3	Quarks.	252
9.4	Números cuánticos internos de los quarks.	261
9.5	Composición de quarks de algunos hadrones seleccionados.	269
10.1	Algunas características físicas del Sol.	287
10.2	Características principales de los planetas del Sistema Solar.	298
10.3	Características principales de los planetas enanos del Sistema Solar.	299
10.4	Tipos espectrales de estrellas.	304
10.5	Temperaturas atmosféricas de algunos planetas del Sistema Solar.	329
D.1	Algunas constantes físicas.	343

Capítulo 1

Relatividad I: Cinemática

En este capítulo iniciaremos nuestro estudio de la relatividad especial introducida por Albert Einstein en 1905 y que revolucionó nuestra concepción del espacio y del tiempo. En particular, nos centraremos en los aspectos cinemáticos y exploraremos algunas de las consecuencias más importantes de los postulados de la relatividad especial.

1.1 Relatividad newtoniana

La mecánica clásica se resume en las conocidas leyes de Newton. Recordemos en particular la segunda de ellas:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}, \quad (1.1)$$

donde $d\vec{v}/dt = \vec{a}$ es la aceleración de la masa m cuando sobre ella se ejerce una fuerza \vec{F} . La ec. (1.1) contiene a su vez a la primera ley de Newton, o *ley de inercia*. Esta ley nos dice que en ausencia de fuerzas, la masa m se mueve con velocidad constante (tanto en módulo como en dirección).

Como todos sabemos, las leyes de Newton no son válidas en todos los sistemas de referencia. Tan sólo lo son en los *sistemas de referencia inerciales*, es decir, en aquellos en los que se cumple la ley de inercia. Las leyes de Newton también tienen la propiedad de permanecer invariantes, es decir, no cambian, en cualquier sistema de referencia que se mueva con una velocidad constante con respecto a un sistema inercial. De este modo, todos los sistemas de referencia son equivalentes.

Consideremos dos sistemas inerciales (ver Fig. 1.1) que se mueven el uno con respecto del otro con una velocidad \vec{v} en la dirección x .

La transformación de coordenadas de S a S' es lo que se conoce con el nombre de **transformación de Galileo**:

$$x' = x - vt \quad y' = y \quad z' = z. \quad (1.2)$$

La correspondiente transformación de las velocidades, conocida como *ley de adición de velocidades*, se obtiene derivando las expresiones anteriores con respecto al

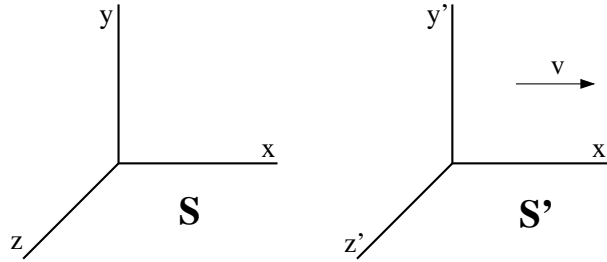


Fig. 1.1 Dos sistemas de referencia inerciales S and S' moviéndose con velocidad relativa constante. En concreto, S' se mueve hacia la derecha a lo largo del eje x con respecto a S .

tiempo:

$$u'_x = u_x - v \quad u'_y = u_y \quad u'_z = u_z. \quad (1.3)$$

Derivando la ec. (1.3) tenemos la relación entre las correspondientes aceleraciones:

$$\vec{a}' = \vec{a}, \quad (1.4)$$

ya que $dv/dt = 0$. De este modo, $\vec{F}' = m\vec{a}' = m\vec{a} = \vec{F}$. Esta es la invarianza a la que hacíamos referencia anteriormente. Generalizando este resultado:

“Cualquier sistema de referencia que se mueva con velocidad constante con respecto a un sistema de referencia inercial también es un sistema inercial. Por tanto, las leyes de Newton son invariantes ante las transformaciones de Galileo”.

Como es bien sabido, la velocidad de una onda (con respecto al medio en el que se propaga) depende de las propiedades del medio en el que se propaga y no de la velocidad del foco emisor de ondas. Por ejemplo, la velocidad del sonido respecto al aire en reposo depende de la temperatura del aire. La luz y otras ondas electromagnéticas (ondas de radio, rayos X, etc.) se propagan a través del vacío con una velocidad $c \approx 3 \times 10^8$ m/s, predicha por las ecuaciones de Maxwell. Pero, ¿respecto a qué se refiere esta velocidad? ¿Cuál es el equivalente del aire en reposo para las ondas electromagnéticas? El medio que se propuso para la propagación de la luz se llamó *éter* y se supuso que el éter estaba extendido por todo el espacio. Se supuso que la velocidad de la luz relativa al éter era la velocidad predicha (c) por las ecuaciones de Maxwell. La velocidad de cualquier objeto relativa al éter se consideró como velocidad absoluta.

Albert Michelson y Edward Morley (1887) decidieron medir la velocidad de la tierra con respecto al éter mediante un ingenioso experimento en el cual la velocidad de la luz respecto a la tierra se comparaba en dos haces luminosos, uno en la dirección del movimiento de la tierra relativo al Sol y otro perpendicular a la dirección del movimiento terrestre. Los experimentos no mostraron ninguna diferencia, poniendo de manifiesto que el movimiento de la tierra respecto al éter no puede ser detectado. Los detalles de este experimento se describen en el apéndice A.

1.2 Los postulados de la relatividad

En 1905 Albert Einstein publicó un artículo sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento. En este artículo postulaba que el movimiento absoluto no podría medirse mediante ningún experimento. Es decir, el éter no existía. Su teoría de la relatividad especial puede deducirse de dos postulados:

Postulado 1. *Las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales.*

Postulado 2. *La velocidad de la luz es independiente del movimiento de la fuente. Es decir, todo observador mide el mismo valor c para la velocidad de la luz.*

El postulado 1 es una extensión del principio de relatividad newtoniano para incluir todos los fenómenos físicos (y no sólo aquellos relacionados con la mecánica). Este postulado implica que ningún sistema de referencia es diferente de otro y, por tanto, el movimiento absoluto no puede detectarse. El postulado 2 describe una propiedad común a todas las ondas. Por ejemplo, la velocidad de las ondas sonoras no depende del movimiento de la fuente sonora.

Algunas de las implicaciones de estos postulados contradicen nuestro sentido común. Veamos un ejemplo. Consideremos un foco luminoso S y dos observadores, R_1 en reposo relativo a S y R_2 moviéndose hacia S con velocidad v (ver Fig. 1.2).

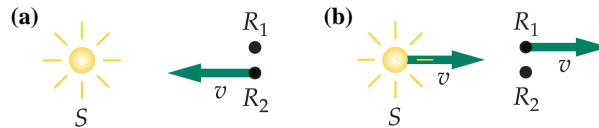


Fig. 1.2 (a) Foco luminoso en reposo S y observador en reposo R_1 , con un segundo observador R_2 moviéndose hacia el foco con velocidad v . (b) En el sistema de referencia en el que está en reposo el observador R_2 , el foco luminoso S y el observador R_1 se mueven hacia la derecha con velocidad v . Si no puede detectarse el movimiento absoluto, los dos puntos de vista son equivalentes. Como la velocidad de la luz no depende del movimiento de la fuente, el observador R_2 mide el mismo valor para dicha velocidad que el observador R_1 .

La velocidad de la luz en R_1 es $c = 3 \times 10^8$ m/s. ¿Cuál es la velocidad para R_2 ? La respuesta no es $c + v$, como esperaríamos en mecánica newtoniana. Según el segundo postulado, ambos han de medir la misma velocidad. Este ejemplo demuestra que, en particular, la ley de adición de velocidades de la mecánica newtoniana no es compatible con los postulados de Einstein.

Relatividad de la simultaneidad

Los postulados de la relatividad nos conducen a una serie de predicciones acerca de las medidas hechas por observadores en sistemas de referencia inerciales que nos van a parecer paradójicas. La mayor parte de estas paradojas se resuelven

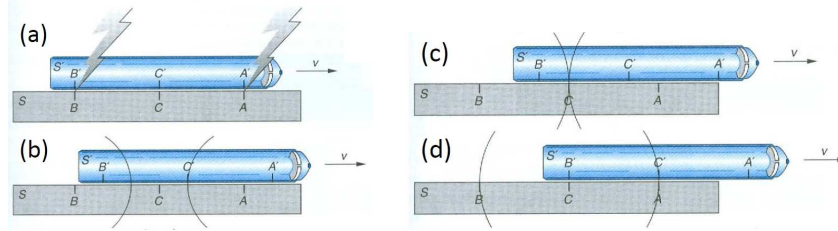


Fig. 1.3 Dos rayos golpean las partes delantera y trasera del tren (S') cuando éste se mueve con respecto al andén (S) con una velocidad v . (a) Los golpes son simultáneos en S , alcanzando al observador en C , situado a medio camino entre los eventos, al mismo tiempo de acuerdo con su reloj, como se muestra en (c). En S' el flash de la parte delantera es medido por el reloj en C' , situado en el medio del tren, antes que el de la parte trasera del tren (b y c). De este modo, el observador en C' concluye que los golpes no fueron simultáneos.

comprendiendo la **relatividad de la simultaneidad**, que se expresa como

“Dos sucesos (o eventos) separados espacialmente que aparecen como simultáneos en un sistema de referencia no son, en general, simultáneos en otro sistema de referencia inercial que se mueve con respecto al primero”.

Un corolario de este hecho es:

“Relojes sincronizados en un sistema de referencia, no lo están, en general, en otro sistema inercial que se mueva con respecto al primero”.

Para demostrar la relatividad de la simultaneidad vamos a utilizar un ejemplo propuesto por el propio Einstein. Supongamos que un tren se está moviendo con velocidad v con respecto al andén de una estación (ver Fig. 1.3(a)). Tenemos observadores colocados en A' , B' y C' en las partes delantera, trasera y en el medio del tren. Consideraremos que el tren está en reposo en el sistema de referencia S' y el andén en S . Ahora suponemos que el tren y el andén son sacudidos o golpeados por dos rayos en las partes delantera y trasera del tren. Suponemos que estos dos sucesos son simultáneos en S . De este modo, un observador colocado en C a mitad de camino de los puntos A y B (donde golpean los rayos) observa los dos flashes al mismo tiempo. Como C' está en el medio del tren, estos dos sucesos son simultáneos en S' sólo si el reloj en C' mide los flashes al mismo tiempo. Sin embargo, el reloj en C' mide el flash de la parte delantera antes que el flash trasero. En el sistema S , cuando la luz del flash delantero alcanza C' , el tren se ha movido una distancia hacia A , de manera que el flash trasero aún no ha alcanzado C' (ver Fig. 1.3(b)). De este modo, el observador en C' concluye que estos dos sucesos no son simultáneos.

Nótese que en esta discusión hemos usado la definición operativa de simultaneidad siguiente: dos sucesos son simultáneos en un sistema de referencia si las señales de luz de los eventos alcanzan un observador a mitad de camino entre ellos al mismo tiempo, tal y como mide un reloj en esa posición (reloj local).

1.3 Las transformaciones de Lorentz

Vamos a abordar ahora una consecuencia importante de los postulados de la relatividad como es la relación entre las coordenadas espacio-temporales entre los dos sistemas de referencia inerciales que se mueven con una velocidad constante el uno con respecto al otro. Por simplicidad consideraremos el caso en el que esa velocidad está dirigida a lo largo del eje x y los sistemas de coordenadas coinciden en el instante $t = t' = 0$ (ver Fig. 1.4).

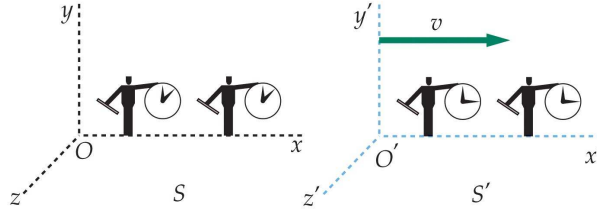


Fig. 1.4 Sistemas de referencia S y S' moviéndose con velocidad relativa v . En ambos sistemas existen observadores con reglas y relojes que son idénticos cuando se comparan en reposo.

Recordemos que en la física newtoniana, la relación entre las coordenadas viene dada por la transformación de Galileo:

$$x' = x - vt; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = t \quad (1.5)$$

$$x = x' + vt; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = t'. \quad (1.6)$$

Como ya ha quedado claro anteriormente, estas transformaciones no son compatibles con los postulados de la relatividad especial. Las correspondientes transformaciones en relatividad especial se conocen con el nombre de **transformaciones de Lorentz** y pasamos ahora a derivarlas.

Supongamos que la ecuación para x' es de la forma

$$x' = \gamma(x - vt), \quad (1.7)$$

donde γ es una constante que puede depender de v y c , pero no de las coordenadas. Como esta ecuación se debe reducir a la relación clásica cuando $v \ll c$, esto implica que $\gamma \rightarrow 1$ cuando $v/c \rightarrow 0$. La transformación inversa ha de tener la siguiente forma

$$x = \gamma(x' + vt'). \quad (1.8)$$

Está claro que en nuestro ejemplo $y' = y$ y $z' = z$, ya que no hay movimiento en esas dos direcciones. Sin embargo, $t' \neq t$ (¿sabrías decir por qué?).

Supongamos ahora que un rayo de luz parte del origen de S en $t = 0$. Ya que $t = t' = 0$, el rayo también estará en el origen de S' en $t' = 0$. El rayo se expande desde el origen como una onda esférica. La ecuación para el frente de onda para el observador en S será

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (1.9)$$

y para el observador en S' será

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = c^2(t')^2, \quad (1.10)$$

donde ambas ecuaciones son consistentes con el segundo postulado de la relatividad. Para satisfacer el primer postulado, la transformación que estamos buscando ha de convertir la ec. (1.9) en la ec. (1.10) y viceversa. Recordemos que

$$x' = \gamma(x - vt); \quad t' = \gamma \left[t + \frac{(1 - \gamma^2)x}{\gamma^2 v} \right], \quad (1.11)$$

donde la segunda relación se obtiene substituyendo la ec. (1.7) en la ec. (1.8) y despejando t' .

Consideremos ahora la ec. (1.10):

$$\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2\gamma^2 \left[t + \frac{(1 - \gamma^2)x}{\gamma^2 v} \right]^2. \quad (1.12)$$

Es fácil convencerse de que para recuperar la ec. (1.9) ha de satisfacerse:

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \quad (1.13)$$

Por tanto, las transformaciones de Lorentz adoptan la siguiente forma definitiva:

$$\boxed{x' = \gamma(x - vt); \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right)} \quad (1.14)$$

y la transformación inversa

$$\boxed{x = \gamma(x' + vt'); \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right)} \quad (1.15)$$

A menudo usaremos la notación: $\beta \equiv v/c$, con lo cual $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$.

Ejemplo 1.1: La llegada de dos muones (μ) procedentes de rayos cósmicos se detecta en el laboratorio, uno en el instante t_a y posición x_a y el otro en (t_b, x_b) . ¿Cuál es el intervalo de tiempo entre esos dos sucesos en un sistema S' que se mueve con velocidad v con respecto al sistema del laboratorio?

Solución. Usando la ecuación para la transformación temporal en la ec. (1.14), se obtiene

$$t'_b - t'_a = \gamma \left(t_b - \frac{vx_b}{c^2} \right) - \gamma \left(t_a - \frac{vx_a}{c^2} \right) = \gamma(t_b - t_a) - \frac{\gamma v}{c^2}(x_b - x_a).$$

De este modo, vemos que el intervalo de tiempo medido en S' depende no sólo del correspondiente intervalo temporal en S , sino también de la separación de los relojes en S . Esto es simplemente una manifestación del hecho de que los relojes no están sincronizados.

- *Caso 1:* Si $x_a = x_b$, entonces $t_b - t_a$ se llama **intervalo de tiempo propio**. En este caso: $t'_b - t'_a = \gamma(t_b - t_a) > (t_b - t_a)$. Es decir, *el intervalo de tiempo propio es el intervalo de tiempo mínimo que puede medirse entre dos eventos (o sucesos)*.
- *Caso 2:* ¿Es posible que estos dos sucesos ocurran de manera simultánea en un sistema de referencia inercial? La respuesta es sí:

$$t'_b - t'_a = 0 \Rightarrow \gamma(t_b - t_a) = \frac{\gamma v}{c^2}(x_b - x_a) \Rightarrow \beta = \frac{v}{c} = \left(\frac{t_b - t_a}{x_b - x_a} \right) c. \quad \square$$

1.4 Dilatación del tiempo y contracción de la longitud

Dilatación del tiempo

Consideremos el siguiente ejemplo. En la Fig. 1.5(a) se muestra un observador A' a una distancia D de un espejo. El observador y el espejo están en una nave espacial que está en reposo en el sistema S' . El observador produce un destello y mide el intervalo de tiempo $\Delta t'$ entre el destello original y el momento en que ve el destello que retorna reflejado del espejo. Como la luz viaja con velocidad c , este tiempo es

$$\Delta t' = \frac{2D}{c}. \quad (1.16)$$

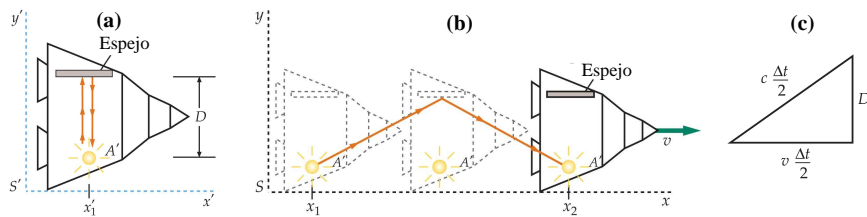


Fig. 1.5 (a) El observador A' y el espejo están dentro de una nave espacial en el sistema S' . El tiempo que tarda el destello luminoso en llegar al espejo y regresar, según la medida realizada por A' , resulta ser $2D/c$. (b) En el sistema S , la nave se está moviendo hacia la derecha con velocidad v . Si la velocidad de la luz es la misma en ambos sistemas, el tiempo que tarda la luz en llegar al espejo y regresar es más largo que $2D/c$ en S porque la distancia recorrida es mayor que $2D$. (c) Triángulo rectángulo que sirve para calcular el tiempo Δt en el sistema S .

Consideremos a continuación estos dos mismos sucesos, el destello luminoso original y la recepción del destello reflejado, según se observarían en el sistema de referencia S , en el que el observador A' y el espejo se están moviendo hacia la derecha con velocidad v , como se indica en la figura. Los sucesos se producen en dos lugares diferentes x_1 y x_2 en el sistema S . Durante el intervalo de tiempo Δt (según se mide en S) entre el destello original y el de retorno, el observador A' y su nave espacial han recorrido una distancia horizontal $v\Delta t$. En la Fig. 1.5(b) podemos ver que el trayecto recorrido por la luz es más largo en S que en S' . Sin embargo,

según los postulados de Einstein, la luz se propaga con la misma velocidad c en el sistema S y en el S' . Como la luz recorre una longitud mayor en S a la misma velocidad, debe emplear más tiempo en llegar al espejo y regresar. El intervalo de tiempo en S es, pues, más largo que en S' . A partir del triángulo de la Fig. 1.5(c) se tiene

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = D^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 \Rightarrow \Delta t = \frac{2D}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2D}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1.17)$$

Haciendo uso de $\Delta t' = 2D/c$, se obtiene

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma \Delta t' \equiv \gamma \tau \quad (1.18)$$

donde $\tau \equiv \Delta t'$ es el intervalo de tiempo propio. La ec. (1.18) describe **la dilatación del tiempo**, es decir, nos dice que el observador en el sistema de referencia S siempre mide un intervalo de tiempo entre dos eventos mayor que el correspondiente intervalo medido en el reloj localizado en ambos eventos en el sistema donde ocurren en la misma posición. De este modo, observadores en S concluyen que el reloj en A' en S' va más lento ya que el reloj mide un intervalo de tiempo más pequeño entre los dos sucesos.

Nota importante: recuérdese que el mismo reloj debe estar colocado en ambos eventos para que $\Delta t'$ sea el intervalo de tiempo propio τ .

El resultado que acabamos de obtener se puede derivar mucho más fácilmente haciendo uso de las transformaciones de Lorentz. Llamando evento 1 al flash inicial y 2 al flash final:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \left(t'_2 + \frac{vx'_2}{c^2} \right) - \gamma \left(t'_1 + \frac{vx'_1}{c^2} \right), \quad (1.19)$$

$$\Rightarrow \Delta t = \gamma(t'_2 - t'_1) + \frac{\gamma v}{c^2}(x'_2 - x'_1), \quad (1.20)$$

$$\Rightarrow \Delta t = \gamma \Delta t' + \frac{\gamma v}{c^2} \Delta x'. \quad (1.21)$$

De este modo, si $\Delta x' = 0$, esto implica que $\Delta t = \gamma \Delta t'$, que es precisamente el resultado de la ec. (1.18).

Ejemplo 1.2: Los astronautas de una nave espacial que se aleja de la tierra a $v = 0.6c$ interrumpen su conexión con el control espacial, diciendo que van a dormir una siesta de 1 hora y luego volverán a llamar. ¿Cuál es la duración de su siesta según se mide en la tierra?

Solución. Usamos la expresión

$$\Delta t = \gamma \tau \quad (\tau = \text{tiempo propio} = 1 \text{ hora}). \quad (1.22)$$

Teniendo en cuenta que $\gamma(v = 0.6c) = 1.25$, tenemos que $\Delta t = 1.25 \text{ h}$. \square

Contracción de la longitud

La longitud de un objeto medida en el sistema de referencia en que dicho objeto se encuentra en reposo se denomina **longitud propia** L_p . En un sistema de referencia en el que el objeto se está moviendo, la longitud medida es más corta que su longitud propia. Consideremos una varilla en reposo en el sistema S' con un extremo en x'_2 y el otro en x'_1 . La longitud de la varilla en reposo en este sistema S' es su longitud propia $L_p = x'_2 - x'_1$. Para hallar la longitud de la varilla en el sistema S hay que tener cierto cuidado. En este sistema la varilla se está moviendo hacia la derecha con velocidad v , que es la velocidad de S' . Se define la longitud de la varilla en el sistema S como $L = x_2 - x_1$, en donde x_2 es la posición de un extremo en un cierto instante t_2 , y x_1 es la posición del otro extremo en el mismo instante $t_1 = t_2$, medidos en el sistema S . Para calcular $x_2 - x_1$ en un cierto instante t es conveniente utilizar la ec. (1.14)

$$x'_2 = \gamma(x_2 - vt_2); \quad x'_1 = \gamma(x_1 - vt_1). \quad (1.23)$$

Como $t_2 = t_1$, tenemos

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) \Rightarrow x_2 - x_1 = \frac{1}{\gamma}(x'_2 - x'_1). \quad (1.24)$$

Por tanto,

$$L = \frac{L_p}{\gamma} = L_p \sqrt{1 - v^2/c^2} < L_p \quad (1.25)$$

La longitud de la varilla es, pues, más corta cuando se mide desde un sistema respecto al cual se está moviendo. Por razones históricas, esta contracción se conoce como la **contracción de Lorentz-FitzGerald**.

Ejemplo 1.3: Una regla tiene una longitud propia de 1 m y se mueve en una dirección a lo largo de su longitud con velocidad relativa v respecto a un observador. Este mide la longitud de la regla y su resultado es 0.914 m. ¿Cuál es la velocidad v ?

Solución.

$$L = L_p \sqrt{1 - v^2/c^2} \Rightarrow v = c \sqrt{1 - L^2/L_p^2} = 0.406c. \quad \square$$

Dacaimiento de los muones

Un ejemplo interesante de dilatación del tiempo o de contracción de longitudes lo proporciona la aparición de muones como radiación secundaria de rayos cósmicos. Los muones se desintegran de acuerdo con la ley estadística de la radiactividad

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}, \quad (1.26)$$

en donde N_0 es el número inicial de muones en el instante $t = 0$, $N(t)$ es el número que queda en el instante t y τ es la vida media, que vale $\sim 2 \mu s$ en el caso de los

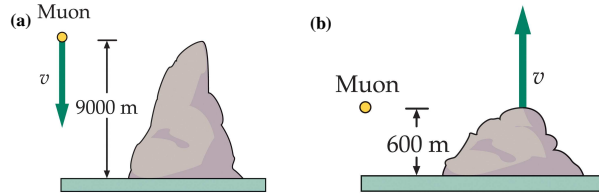


Fig. 1.6 Aunque los muones se crean a una gran altura de la atmósfera y su vida media es sólo de unos $2 \mu\text{s}$ cuando están en reposo, muchos aparecen en la superficie de la tierra. (a) En el sistema de referencia terrestre un muón típico que se mueve a $0.9978c$ tiene una vida media de $30 \mu\text{s}$ y recorre 9000 m en este tiempo. (b) En el sistema de referencia del muón, la distancia recorrida por la tierra es de sólo 600 m durante los $2 \mu\text{s}$ de vida media del muón.

muones en reposo. Puesto que los muones se crean (a partir de la desintegración de los piones) a gran altura en la atmósfera, normalmente a varios miles de metros por encima del nivel del mar, pocos de estos muones deberían alcanzar el nivel del mar. Un muón típico que se mueve con una velocidad de $0.9978c$ recorrerá 600 m en $\sim 2 \mu\text{s}$. Sin embargo, la vida media del muón medida en el sistema de referencia terrestre debe incrementarse en el factor γ :

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{1 - v^2/c^2}} \approx 15. \quad (1.27)$$

Por tanto, la vida media en el sistema de referencia de la tierra es $30 \mu\text{s}$, y un muón con una velocidad de $0.9978c$ recorre del orden de 9000 m en este tiempo (ver Fig. 1.6(a)). Desde el punto de vista del muón, éste sólo vive $2 \mu\text{s}$, pero la atmósfera está moviéndose con respecto a él a la velocidad de $0.9978c$. La distancia de 9000 m en el sistema terrestre se encuentra así contraída a sólo 600 m en el sistema del muón (ver Fig. 1.6(b)).

Ejemplo 1.4: Supóngase que observamos 10^8 muones a una altitud de 9000 m en un cierto intervalo de tiempo con un detector de muones. ¿Cuántos serían de esperar que se observaran al nivel del mar en el mismo intervalo de tiempo según las predicciones clásica y relativista?

Solución. En el caso no relativista:

$$t = \frac{9000 \text{ m}}{0.9978c} \approx 30 \mu\text{s} \Rightarrow N(t) = N_0 e^{-t/\tau} = 10^8 e^{-15} = 30.6.$$

En el caso relativista, la distancia contraída es 600 m y $t = 2 \mu\text{s}$. Por tanto,

$$N(t) = 10^8 e^{-1} = 3.68 \times 10^7. \quad \square$$

1.5 El efecto Doppler relativista

Para la luz u otras ondas electromagnéticas en el vacío no podemos distinguir entre los movimientos de la fuente y el receptor. Por lo tanto, las expresiones clásicas

no pueden aplicarse correctamente a la luz. La razón es que en su deducción uno supone que los intervalos de tiempo medidos en los sistemas de referencia de la fuente y el receptor son los mismos.

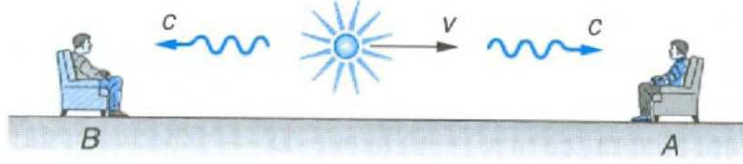


Fig. 1.7 Una fuente luminosa se acerca a un observador A y se aleja de un observador B con una velocidad v .

Consideremos una fuente de luz que se mueve hacia un receptor A con una velocidad relativa v , como se muestra en la Fig. 1.7. La fuente está emitiendo un tren de ondas hacia los receptores A y B mientras se aproxima a A y se aleja de B. Consideremos primero el tren de ondas dirigido hacia A. Durante el tiempo Δt en el que la fuente emite N ondas, la primera onda habrá viajado una distancia $c\Delta t$ y la fuente misma habrá recorrido una distancia $v\Delta t$. Estas distancias están medidas desde el sistema del receptor. De este modo, el receptor (u observador) A medirá una longitud de onda:

$$\lambda = \frac{c\Delta t - v\Delta t}{N} \quad (1.28)$$

y la frecuencia $f = c/\lambda$ será:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{cN}{(c-v)\Delta t} = \frac{1}{1-\beta} \frac{N}{\Delta t}, \quad (1.29)$$

donde $\beta = v/c$. Por su parte, la frecuencia de la fuente f_0 (llamada frecuencia propia) está dada por $f_0 = c/\lambda' = c/(c\Delta t'/N) = N/\Delta t'$, donde $\Delta t'$ está medido en un sistema en reposo con respecto a la fuente. El intervalo $\Delta t'$ es el intervalo de tiempo propio y por tanto,

$$\Delta t = \gamma \Delta t'. \quad (1.30)$$

De este modo,

$$f = \frac{1}{1-\beta} \frac{f_0 \Delta t'}{\Delta t} = \frac{f_0}{1-\beta} \frac{1}{\gamma}, \quad (1.31)$$

o de otra manera

$$f = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta} f_0 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} f_0 \quad (\text{aproximación}) \quad (1.32)$$

Esta expresión sólo difiere de la clásica en el factor de dilatación del tiempo. Nótese que $f > f_0$ para este caso, como es lógico. Por tanto, la frecuencia aumenta y se dice que la luz ha sufrido un **corrimiento al azul**.

Cuando el foco y el receptor se mueven alejándose entre sí, un análisis similar muestra que:

$$f = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} f_0 \quad (\text{alejamiento}) \quad (1.33)$$

Nótese que $f < f_0$ y en este caso se dice que la luz ha sufrido un **corrimiento al rojo**.

En el caso en el que $v \ll c$ ($\beta \ll 1$), como a menudo ocurre para fuentes luminosas moviéndose en la tierra, se puede obtener para el caso de acercamiento la siguiente aproximación:

$$f = f_0(1+\beta)^{1/2}(1-\beta)^{-1/2} = f_0 \left(1 + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{8}\beta^2 + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{2}\beta + \frac{3}{8}\beta^2 + \dots\right)$$

$$\frac{f}{f_0} \approx 1 + \beta \quad (\text{aproximación}) \quad (1.34)$$

De modo similar, se obtiene que

$$\frac{f}{f_0} \approx 1 - \beta \quad (\text{alejamiento}) \quad (1.35)$$

En ambos casos se tiene que

$$|\Delta f/f_0| \approx \beta \quad \text{donde } \Delta f \equiv f_0 - f. \quad (1.36)$$

Nota: esta relación proporciona una forma de obtener la velocidad de la fuente a partir del conocimiento de Δf .

Ejemplo 1.5: La longitud de onda más larga emitida por el hidrógeno en la serie de Balmer tiene un valor de $\lambda_0 = 656$ nm. En la luz procedente de una galaxia lejana, el valor medido es $\lambda = 1458$ nm. Hallar la velocidad de alejamiento de dicha galaxia respecto a la tierra.

Solución.

$$f = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} f_0 \Rightarrow \beta = \frac{1 - (\lambda_0/\lambda)^2}{1 + (\lambda_0/\lambda)^2} = 0.664. \quad \square$$

Ejemplo 1.6: El Sol rota alrededor de su eje una vez cada 25.4 días. El Sol tiene un radio de 7×10^8 m. Calcular el efecto Doppler que se observa entre los bordes izquierdo y derecho del Sol cerca del ecuador para la luz de longitud de onda $\lambda = 550$ nm (luz amarilla). ¿Se corre al rojo o al azul?

Solución. La velocidad de los bordes es

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi(7 \times 10^8) \text{ m}}{25.4 \times 24 \times 3600 \text{ s}} = 2000 \text{ m/s.}$$

Como $v \ll c$, tenemos que

$$\frac{\Delta f}{f_0} \approx \beta = \frac{v}{c} \Rightarrow \Delta f \approx \beta f_0 = \beta \frac{c}{\lambda_0} = 3.64 \times 10^9 \text{ Hz.}$$

Como $f_0 = c/\lambda_0 = 5.45 \times 10^{14}$ Hz, tenemos que

$$\frac{\Delta f}{f_0} \approx 10^{-5}.$$

El corrimiento es hacia el rojo para el borde que se aleja y hacia el azul para el borde que se aproxima. \square

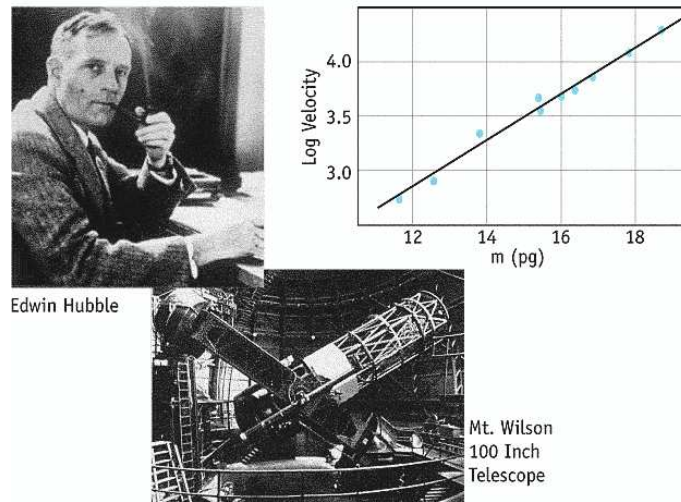


Fig. 1.8 La ley de Hubble nos dice que la velocidad de recesión de las galaxias es proporcional a la distancia a la que se encuentran.

La ley de Hubble

En 1929 E.P. Hubble estableció mediante la medida de la frecuencia de diversas líneas espectrales de diferentes galaxias que existía una relación lineal entre el corrimiento al rojo ($z = (f_0 - f)/f$) de dichas líneas, que siempre era positivo, y la distancia a la que se encuentran las galaxias de nosotros. En virtud de nuestra discusión sobre el efecto Doppler, esto le llevó a concluir que todas las galaxias se alejan de nosotros con una velocidad de recesión v que es proporcional a la distancia r a la que se encuentran (**ley de Hubble**):

$$\boxed{v = H_0 r} \quad (1.37)$$

donde H_0 es la *constante de Hubble*. El valor aceptado de esta constante es de $H_0 = 71 \pm 4 \text{ km}/(\text{s}\cdot\text{Mpc})$, donde $1 \text{ pc} = 1 \text{ parsec} = 3.26 \text{ años-luz}$. Nótese que H_0 tiene las dimensiones de tiempo a la menos uno. La cantidad $1/H_0$ recibe el nombre de *tiempo de Hubble* y es igual a aproximadamente 1.3×10^{10} años. Esto correspondería a la edad del universo si la atracción gravitatoria sobre las galaxias pudiera ser ignorada. La correcta interpretación de la ley de Hubble, así como sus implicaciones cosmológicas, serán discutidas más adelante en este curso.

1.6 Transformación de las velocidades

Se puede hallar la forma en la que se transforma las velocidades de un sistema de referencia a otro derivando las ecuaciones de transformación de Lorentz. Supongamos que una partícula tiene una velocidad $u'_x = dx'/dt'$ en el sistema S' que se está

moviendo hacia la derecha con velocidad v con respecto al sistema S . Su velocidad en el sistema S es $u_x = dx/dt$. A partir de las transformaciones de Lorentz:

$$dx = \gamma(dx' + vdt') \quad y \quad dt = \gamma(dt' + vdx'/c^2). \quad (1.38)$$

La velocidad en S es pues

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(dx' + vdt')}{\gamma(dt' + vdx'/c^2)} = \frac{dx'/dt' + v}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}. \quad (1.39)$$

Si una partícula tiene componentes de la velocidad a lo largo de los ejes y o z , podemos utilizar la misma relación entre dt y dt' con dy y dy' , y dz y dz' :

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma(dt' + vdx'/c^2)} = \frac{dy'/dt'}{\gamma(1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'})} = \frac{u'_y}{\gamma(1 + \frac{vu'_x}{c^2})}, \quad (1.40)$$

$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma(1 + \frac{vu'_x}{c^2})}. \quad (1.41)$$

La transformación relativista completa de velocidades es

$$\boxed{u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}; \quad u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1 + \frac{vu'_x}{c^2})}; \quad u_z = \frac{u'_z}{\gamma(1 + \frac{vu'_x}{c^2})}} \quad (1.42)$$

La transformación inversa se obtiene reemplazando v por $-v$. Nótese que en el límite de bajas velocidades, ec. (1.42) se reduce al resultado conocido ($\gamma \rightarrow 1$):

$$u_x = u'_x + v; \quad u_y = u'_y; \quad u_z = u'_z. \quad (1.43)$$

Ejemplo 1.7: Supongamos que dos protones se aproximan a la tierra desde lados opuestos (ver Fig. 1.9). Las velocidades relativas a la tierra son $v_1 = 0.6c$ y $v_2 = -0.8c$. ¿Cuál es la velocidad de la tierra relativa a cada protón? ¿Cuál es la velocidad de cada protón relativa al otro?

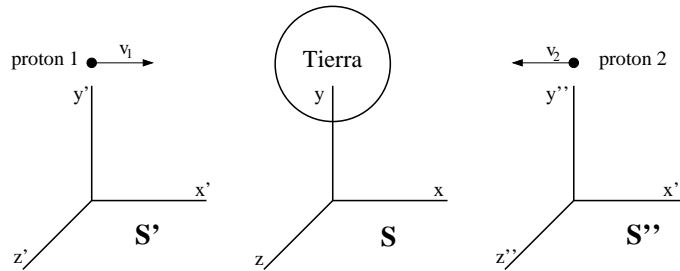


Fig. 1.9 Ejemplo 1.7.

Solución. La velocidad de la tierra relativa a cada protón es obviamente:

$$v'_{x,\text{tierra}} = -0.6c; \quad v''_{x,\text{tierra}} = 0.8c.$$

Si llamamos u'_{2x} a la componente x de la velocidad del protón 2 con respecto al protón 1, usando la ec. (1.42) llegamos a

$$u'_{2x} = \frac{-0.8c - 0.6c}{1 + \frac{(-0.6c)(-0.8c)}{c^2}} = \frac{-1.4c}{1.48} = -0.95c.$$

Por su parte, la componente x de la velocidad del protón 1 con respecto al protón 2, u''_{1x} , vendrá dada por

$$u''_{1x} = \frac{0.6c + 0.8c}{1 + \frac{(0.6c)(0.8c)}{c^2}} = \frac{1.4c}{1.48} = 0.95c = -u'_{2x}. \quad \square$$

Ejemplo 1.8: Un fotón se mueve a lo largo del eje x en el sistema S' con velocidad $u'_x = c$. ¿Cuál es su velocidad en el sistema S ?

Solución.

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} = \frac{c + v}{1 + \frac{vc}{c^2}} = c.$$

Por tanto, la velocidad en S viene dada por c en ambos sistemas, independientemente de v . Esto está de acuerdo con el segundo postulado de Einstein. \square

1.7 La paradoja de los gemelos y otras sorpresas

La paradoja de los gemelos

Homero y Ulises son gemelos idénticos. Ulises realiza un viaje a una velocidad muy elevada hacia un planeta más allá del sistema solar y vuelve a la tierra mientras Homero permanece en ella (ver Fig. 1.10). Cuando se reúnen de nuevo, ¿cuál es el gemelo más viejo, o son ambos de la misma edad? La respuesta correcta es que Homero, el gemelo que permaneció en su casa es más viejo. ¿Sabrías explicar por qué?

La paradoja de la pértiga y el pajar

Un corredor lleva una pértiga de 10 m de largo y se dirige hacia la puerta abierta de un pajar de 5 m de largo. Un granjero está de pie cerca del pajar de manera que puede ver tanto la puerta del pajar como la parte trasera del mismo (ver Fig. 1.11). El corredor entra en el pajar llevando la pértiga con una velocidad v , y en el instante en el que el granjero ve que la pértiga está completamente dentro del pajar cierra la puerta y de este modo, ha conseguido introducir una pértiga de 10 m en un pajar de 5 m. La velocidad mínima que se necesita para realizar esta operación se calcula fácilmente:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{L_p}{L} = \frac{10}{5} \Rightarrow v = 0.866c. \quad (1.44)$$

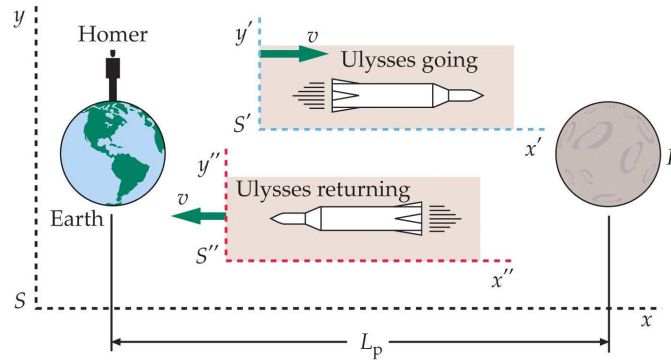


Fig. 1.10 Paradoja de los gemelos. La tierra y un planeta lejano están fijos en el sistema S . Ulises vuela en el sistema S' hacia el planeta y luego regresa a la tierra en S'' . Su gemelo Homero permanece en la tierra. Cuando Ulises regresa es más joven que su gemelo. Los papeles que desempeñan los gemelos no son simétricos. Homero permanece en un sistema de referencia inercial, pero Ulises ha de acelerar si quiere volver a casa.

La paradoja surge cuando la situación es vista desde el sistema de referencia del corredor. Para él la pértiga tiene su longitud propia de 10 m. Sin embargo, para el corredor el pajar mide $L = L_p/\gamma = 5\sqrt{1-v^2/c^2} = 2.5$ m. ¿Cómo es posible introducir una pértiga de 10 m en un pajar de 2.5 m? La respuesta se deja como ejercicio. Digamos como pista que la respuesta está en la relatividad de la simultaneidad.

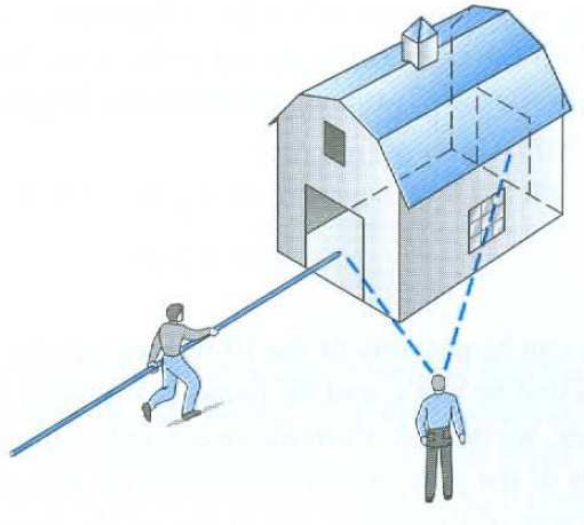


Fig. 1.11 La paradoja de la pértiga y el pajar.

1.8 Diagramas de Minkowski: espacio-tiempo y causalidad

En las secciones anteriores hemos visto que en relatividad especial las coordenadas de espacio y de tiempo están íntimamente ligadas, lo cual es aparente en las transformaciones de Lorentz. Una forma conveniente de expresar esta relación es el concepto de *espacio-tiempo* cuadridimensional y los *diagramas espacio-temporales* introducidos por el matemático alemán Hermann Minkowski. Al igual que en mecánica clásica se usan vectores con tres componentes, la mecánica relativista se puede expresar de una forma elegante con vectores de cuatro componentes relacionadas con las direcciones x , y , z y t . En esta sección, y por simplicidad, nos restringiremos al movimiento en una dimensión a lo largo del eje x .

Un ejemplo de diagrama espacio-tiempo o *diagrama de Minkowski* se muestra en la Fig. 1.12. Este diagrama describe la historia completa o *línea de mundo* de un movimiento unidimensional en el sistema de referencia S . Nótese que en este diagrama el eje de ordenadas (vertical) representa la cantidad ct (con dimensiones de longitud), mientras que en el eje de las abscisas (horizontal) se representa la coordenada x . En este diagrama, la línea de mundo de una señal luminosa dada por $x = ct$ es simplemente una línea recta con pendiente igual a uno, es decir, es una línea que forma un ángulo de 45° con el eje x . El punto E en la Fig. 1.12 corresponde a un evento descrito por las coordenadas (x, t) en el sistema de referencia S . Como de costumbre, los eventos y las líneas de mundo se pueden describir desde otros

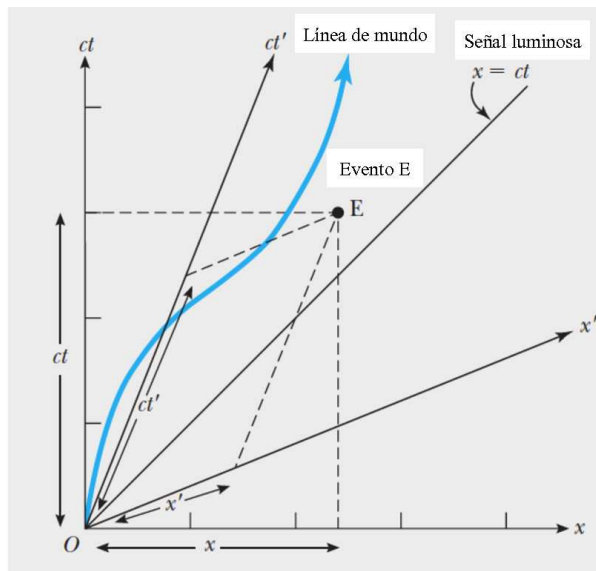


Fig. 1.12 Diagrama espacio-temporal o diagrama de Minkowski que muestra la posición de una partícula en una dimensión en diversos instantes. La trayectoria que muestra la historia completa de la partícula se llama línea de mundo de la partícula. Un evento E tiene coordenadas (x, t) en el sistema S y coordenadas (x', t') en S' .

sistemas de referencia (S'). Curiosamente, estos otros sistemas de referencia tienen ejes ct' y x' que no son ortogonales, como se muestra en la Fig. 1.12. Para encontrar las coordenadas espacio-temporales de un evento E en un sistema de referencia dado, debemos pintar líneas paralelas a los ejes del sistema de referencia y medir las intersecciones con los ejes de ese sistema, tal y como se muestra en la figura. Nótese también que la velocidad de una partícula u_x es inversamente proporcional a la pendiente de su línea de mundo ya que $u_x = c\Delta x/\Delta ct = c/\text{pendiente}$.

Como hemos aprendido en secciones anteriores, en relatividad especial ni las longitudes ni los intervalos de tiempo tienen un sentido absoluto. ¿Existe alguna cantidad (combinación de espacio y tiempo) que sea absoluta o invariante en relatividad especial? En la Fig. 1.13 se muestra un diagrama de Minkowski con dos eventos E_1 y E_2 que están descritos por las coordenadas (x_1, t_1) y (x_2, t_2) en el sistema S y por las coordenadas (x'_1, t'_1) y (x'_2, t'_2) en el sistema S' . Definamos ahora la cantidad $(\Delta s)^2$ como

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (c(t_2 - t_1))^2 - (x_2 - x_1)^2, \quad (1.45)$$

donde Δs tiene dimensiones de longitud y se conoce como *intervalo espacio-temporal* entre dos eventos. Esta cantidad es el análogo de distancia en mecánica clásica. Si evaluamos ahora la cantidad

$$(\Delta s')^2 = (c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = (c(t'_2 - t'_1))^2 - (x'_2 - x'_1)^2 \quad (1.46)$$

para los dos eventos E_1 y E_2 cuyas coordenadas en S y en S' están relacionadas a través de las transformaciones de Lorentz: $x'_1 = \gamma(x_1 - vt_1)$, $t'_1 = \gamma(t_1 - vx_1/c^2)$, etc., se llega después de un poco de álgebra a que

$$(\Delta s')^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (\Delta s)^2. \quad (1.47)$$

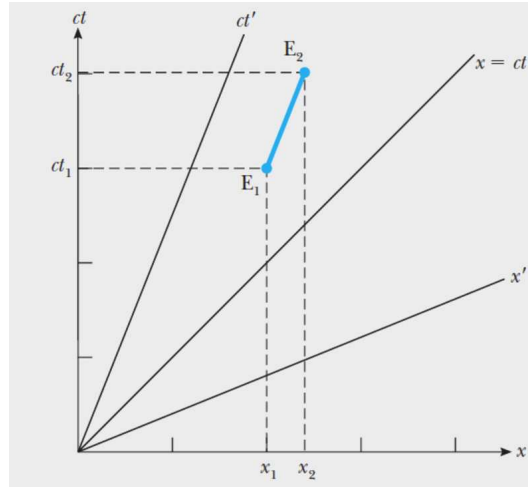


Fig. 1.13 Dos eventos E_1 y E_2 con coordenadas (x_1, t_1) y (x_2, t_2) en el sistema S .

Este es un resultado importante que nos dice que **la cantidad Δs , el intervalo espacio-temporal entre dos eventos, es un invariante que tiene el mismo valor para todos los observadores inerciales.**

Los diagramas de Minkowski se pueden utilizar para clasificar todo el universo de espacio-tiempo y para clarificar si un evento puede ser la causa de otro. La Fig. 1.14 muestra un diagrama de Minkowski para una dimensión con los ejes de dos sistemas de referencia inerciales distintos S y S' , que comparten un origen común O en $x = x' = 0$ y $t = t' = 0$. Las rectas $x = \pm ct$ son las líneas de mundo de pulsos de luz que pasan por el origen y se desplazan en la dirección x positiva o negativa. Las regiones identificadas como pasado y futuro corresponden a valores negativos y positivos del tiempo, según se juzga a partir del momento presente (el ahora), que ocurre en el origen. Las regiones identificadas como “en otras partes” no pueden ser alcanzadas por ningún objeto cuya línea de mundo pase por O , ya que para llegar a ellas se requiere una pendiente espacio-temporal menor que 1, es decir, una velocidad superior a c .

La cantidad $(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$ puede usarse para clasificar el intervalo entre dos eventos y determinar si un evento puede ser provocado por otro. Para comprobar esto, consideremos los tres pares de eventos que se muestran en la figura Fig. 1.15, donde para facilitar las cosas se ha considerado que los eventos V , A y C coinciden con el origen. Para los dos eventos V y W , $(\Delta s)^2 > 0$ ya que $c\Delta t > |\Delta x|$. El evento V podría ser la causa del evento W debido a que alguna señal o influencia podría cubrir la distancia Δx desde V hasta W a una velocidad inferior a c y conectar los dos eventos. El intervalo entre V y W se denomina de *tipo tiempo* por

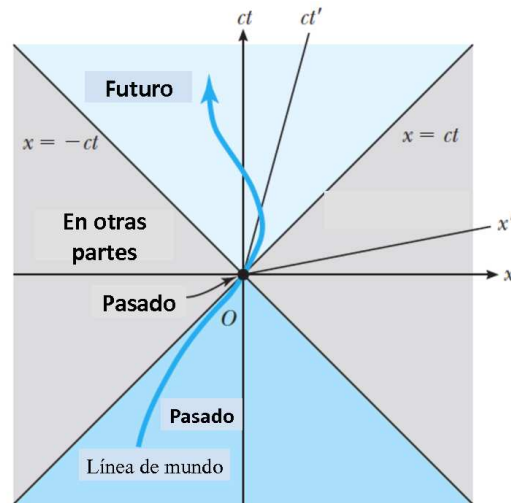


Fig. 1.14 Clasificación del espacio-tiempo unidimensional en regiones de pasado, futuro y en otras partes. Una partícula con una línea de mundo que pase por O no puede alcanzar regiones marcadas como “en otras partes”.

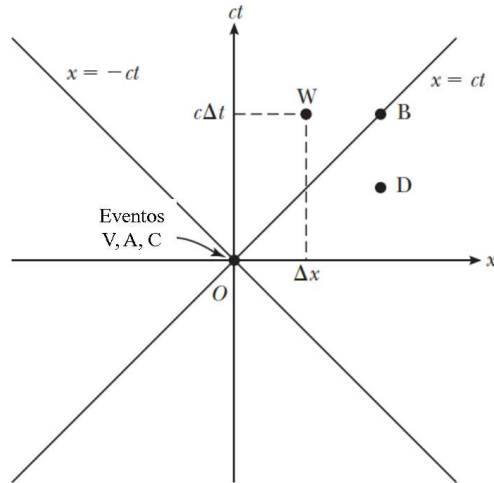


Fig. 1.15 Tres pares de eventos en el espacio-tiempo: V y W , A y B y C y D . El evento V no puede ser la causa del evento D .

razones en las que no entraremos aquí, aunque es importante observar que como $(\Delta s)^2$ es invariante, si V es la causa de W en el sistema de referencia S , también es la causa de W en cualquier otro sistema de referencia inercial. Así, eventos vinculados causalmente en un sistema de referencia también lo están en todos los demás sistemas de referencia inerciales.

Para los eventos A y B , $(\Delta s)^2 = 0$ ya que $c\Delta t = |\Delta x|$. En este caso la línea de mundo de un pulso de luz une a los eventos puntuales A y B , y se dice que el intervalo espacio-temporal Δs es de *tipo luz*.

En el caso final de los eventos C y D , $(\Delta s)^2 < 0$ ya que $c\Delta t < |\Delta x|$. Esto significa que incluso una señal que se propaga a la velocidad de la luz es incapaz de cubrir la distancia $|\Delta x|$ entre los eventos C y D , de modo que C no puede ser la causa de D en ningún sistema de referencia inercial.

1.9 Bibliografía recomendada

Este capítulo está basado en dos de las referencias básicas de este curso:

- Capítulo 39 de “Física para la ciencia y la tecnología, Vol. 2C” (5ª edición) de Tipler y Mosca, editorial Reverté.
- Capítulo 1 de “Modern Physics” (5th edition) de Tipler y Llewellyn, W.H. Freeman.

En particular, el libro de Tipler y Llewellyn contiene una descripción detallada del experimento de Michelson y Morley y una discusión de los diagramas espacio-temporales que constituyen una herramienta muy útil para resolver problemas en

relatividad especial. En este libro también se puede encontrar un análisis de las dos paradojas mencionadas en la sección anterior.

Otros libros de consulta recomendables para este capítulo son:

- Capítulo 1 de “Modern Physics” (3rd edition) de R.A. Serway, C.J. Moses and C.A. Moyer, Thomson/Brook Cole (2005).
- Capítulo 19 de “Física”, M. Alonso y E.J. Finn, Pearson Educación (2000).

Finalmente, para aquellos que deseen profundizar en el estudio de la relatividad especial, yo recomendaría los textos:

- “Introducción a la Relatividad Especial”, J.H. Smith, editorial Reverté.
- “Relatividad Especial”, A.P. French, editorial Reverté.

El libro de Smith es un texto muy pedagógico y con un nivel de matemáticas adaptado a nuestro curso. Desgraciadamente, la notación es poco convencional y, a veces, eso dificulta su lectura. El libro de French es en mi opinión el mejor texto de relatividad especial y el nivel de matemáticas que presupone el autor se asemeja mucho al de nuestro curso. Este libro contiene, en especial, la descripción de muchos de los experimentos fundamentales que contribuyeron a confirmar la relatividad especial. En relación a este capítulo, el libro de French contiene descripciones muy detalladas, por ejemplo, del experimento de Michelson y Morley, de los diagramas espacio-tiempo, del experimento original sobre la dilatación del tiempo para los muones producidos en rayos cósmicos y de la paradoja de los gemelos.

1.10 Ejercicios del Capítulo 1

Cuestiones

- (1) Dos sucesos ocurren en el mismo punto x'_0 en los instantes t'_1 y t'_2 en el sistema S' , que se está moviendo con velocidad v (a lo largo del eje x) con respecto al sistema S . (a) ¿Cuál es la separación espacial entre estos dos sucesos en el sistema S ? (b) ¿Cuál es la separación temporal de estos dos sucesos en el sistema S ?
- (2) Un observador ve un sistema formado por una masa que oscila en el extremo de un muelle que pasa frente a él con una velocidad u y determina el periodo T de oscilación. Otro observador, que se mueve con el sistema masa-muelle, mide también su periodo. ¿Cuál es la relación entre ambos periodos?
- (3) Una nave espacial se dirige a una estrella que se halla a 35 años-luz a una velocidad de 2.7×10^8 m/s. ¿Cuánto tarda en llegar a la estrella (a) según se mide desde la Tierra y (b) según se mide desde la propia nave?
- (4) La vida media propia de un muón es $2 \mu\text{s}$. Un haz de muones se está moviendo a $0.999c$. (a) ¿Cuál es su vida media en el sistema del laboratorio? (b) ¿Qué distancia recorrerán en valor medio antes de desintegrarse?

- (5) Una regla que tiene una longitud propia de 1 m se mueve en una dirección a lo largo de su longitud con velocidad relativa v respecto a un observador. Éste mide la longitud de la regla y su resultado es 0.914 m. ¿Cuál es la velocidad v ?
- (6) En un sistema de referencia S , un evento B ocurre $2 \mu\text{s}$ después de un evento A y a una distancia $\Delta x = 1.5 \text{ km}$ del evento A . (a) ¿A qué velocidad se debe mover un observador a lo largo del eje $+x$ para que vea que los dos eventos ocurren simultáneamente? (b) ¿Es posible que haya un observador para el cual el evento B ocurra antes que el A ?
- (7) Un avión supersónico se aleja de un observador a una velocidad de 1000 m/s a lo largo del eje x . Otro avión se mueve a lo largo del eje x , alejándose del observador y del primer avión con una velocidad de 500 m/s respecto al primer avión. ¿Con qué velocidad se está moviendo el segundo avión con respecto al observador?
- (8) Un rayo de luz se mueve a lo largo del eje y' con velocidad c en el sistema de referencia S' , que se está moviendo hacia la derecha (eje x) con una velocidad v con respecto al sistema S . (a) Determinar las componentes u_x y u_y de la velocidad del rayo de luz en el sistema S . (b) Demostrar que el módulo de la velocidad del rayo en S es c .
- (9) Una fuente luminosa que se está acercando a la Tierra con velocidad v emite luz de sodio de 620 nm de longitud de onda. En el sistema de referencia de la Tierra el valor medido es de 589 nm. Hallar v .
- (10) Una galaxia se está alejando de nosotros con una velocidad de $1.85 \times 10^7 \text{ m/s}$. Calcular el desplazamiento relativo hacia el rojo $(\lambda - \lambda_0)/\lambda_0$ en la luz procedente de esta galaxia.
- (11) ¿A qué velocidad te deberías mover hacia una luz roja ($\lambda = 650 \text{ nm}$) para que te parezca amarilla ($\lambda = 590 \text{ nm}$)?

Problemas

- (12) La vida media propia de los mesones π (piones) es de $2.6 \times 10^{-8} \text{ s}$. Si un haz de estas partículas tiene una velocidad de $0.9c$, (a) ¿cuál es el tiempo de vida media medido en el laboratorio?, (b) ¿qué distancia recorren en promedio antes de decaer?, (c) ¿cuál sería la respuesta a la pregunta (b) si despreciamos la dilatación del tiempo?
- (13) Un astronauta desea ir a una estrella que está a cinco años-luz. (a) Calcular la velocidad de la nave con respecto a la Tierra de manera que el tiempo, medido en el reloj del astronauta, sea de un año. (b) ¿Cuál será el tiempo de la misión medido por un observador terrestre?
- (14) Dos naves espaciales se mueven en direcciones opuestas. Un pasajero en la nave A , que sabe que su nave mide 100 m, ve que la nave B se mueve con una velocidad de $0.92c$ y que su longitud es 36 m. ¿Cuáles son las longitudes de las dos naves medidas por un pasajero en la nave B ?

- (15) Un satélite artificial completa una órbita alrededor de la Tierra a una altura de 600 km en 100 minutos. ¿Cuántos segundos por día atrasará un reloj en este satélite comparado con un reloj fijo en la Tierra? *Nota:* suponer por simplicidad que la Tierra es un sistema de referencia inercial e ignorar los efectos debidos al campo gravitatorio terrestre. El radio de la Tierra es 6370 km.
- (16) Una nave parte de la Tierra con una velocidad constante igual a $3c/5$. Cuando un reloj en la nave indica que ha transcurrido una hora, el cohete emite una señal luminosa hacia la Tierra. (a) De acuerdo con los relojes terrestres, ¿cuándo se emitió la señal? (b) De acuerdo con los relojes terrestres, ¿cuánto tiempo después de la partida de la nave llegó la señal a la Tierra? (c) De acuerdo con los relojes de la nave, ¿cuánto tiempo después de la partida de la nave llegó la señal a la Tierra? (d) ¿Qué relojes atrasan?
- (17) Una nave espacial de longitud L (en el sistema de referencia de la nave) parte de la Tierra a una velocidad $4c/5$. Más tarde, se emite tras él una señal luminosa que llega a la cola de la nave en el instante $t = 0$ según los relojes de la nave y los de la Tierra. (a) ¿Cuándo alcanzará la señal la parte delantera de la nave según los relojes de la misma? (b) ¿Y según los relojes de la Tierra? Posteriormente, la señal luminosa se refleja en la parte delantera de la nave y se dirige hacia la parte trasera. (c) ¿Cuándo alcanza la cola según los relojes de la nave? (d) ¿Y según los relojes de la Tierra?
- (18) Una regla tiene una longitud propia L_p y forma un ángulo θ con el eje x en el sistema S . Demostrar que el ángulo formado con el eje del sistema S' , que se mueve a lo largo del eje $+x$ con una velocidad v , viene dado por $\tan\theta' = \gamma \tan\theta$ y que la longitud de la regla en S' es

$$L' = L_p \left[\frac{1}{\gamma^2} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \right]^{1/2}.$$

- (19) La longitud propia de una nave espacial es tres veces la de otra. Las dos naves están viajando en la misma dirección y, mientras se cruzan, un observador en la Tierra mide la misma longitud para ambas naves. Si la nave más lenta se mueve con una velocidad de $0.35c$ con respecto a la Tierra, determinar la velocidad de la nave más rápida con respecto a la Tierra.
- (20) Las estrellas A y B se encuentran en reposo respecto a la Tierra. La estrella A está a 27 años-luz de la Tierra y la estrella B , vista desde la Tierra, se encuentra aún más allá de la estrella A . (a) Una nave espacial viaja desde la Tierra hasta la estrella A a una velocidad tal que el trayecto dura 12 años según los relojes de la nave. ¿Cuál es su velocidad respecto de la Tierra? (b) Después de llegar a la estrella A , la nave acelera y se dirige hacia la estrella B con una velocidad tal que el factor γ es ahora el doble que en el apartado anterior. El trayecto desde la estrella A a la B dura 5 años (tiempo de la nave). ¿Qué distancia separa en años-luz las estrellas A y B en el sistema de referencia de la Tierra y las dos estrellas? (c) Al llegar a la estrella B , la nave se dirige hacia la Tierra con la misma velocidad que en el apartado (b). Tarda 10 años (tiempo de la nave) en

- regresar a la Tierra. Si un niño nació en la Tierra el día de salida de la nave y permaneció en la Tierra, ¿cuál es su edad el día en que la nave regresa a la Tierra?
- (21) Un observador en un sistema de referencia S ve como dos rayos impactan simultáneamente en dos puntos separados por 100 m. El primer impacto tiene lugar en $x_1 = y_1 = z_1 = t_1 = 0$ y el segundo en $x_2 = 100$ mm, $y_2 = z_2 = t_2 = 0$. (a) ¿Cuáles son las coordenadas de estos dos eventos en un sistema de referencia S' en la configuración habitual con una velocidad relativa a S de $0.7c$? (b) ¿Cuál es la distancia entre los dos eventos en el sistema S' ? (c) ¿Son simultáneos en S' ? Si no lo son, ¿cuál es la diferencia de tiempos entre los dos eventos y cuál ocurrió en primer lugar?
- (22) Un observador en el sistema S situado en el origen observa dos destellos de luz de color separados espacialmente por $\Delta x = 2400$ m. Primero se produce un destello azul, seguido $5 \mu\text{s}$ después por un destello rojo. Un observador en que se mueve a lo largo del eje x con una velocidad v relativa al sistema S observa también destellos separados entre sí $5 \mu\text{s}$ y con una separación de 2400 m, pero observa primero el destello rojo. Hallar el valor y el sentido de v .
- (23) Vistos desde la Tierra, dos naves espaciales A y B se están acercando a lo largo de direcciones perpendiculares. Si la velocidad de la nave A para un observador en la Tierra es $\vec{v}_A = -0.9c\hat{y}$ y la de la nave B es $\vec{v}_B = +0.9c\hat{x}$, encontrar la velocidad de la nave A medida por el piloto de la nave B .
- (24) Un observador en un cohete se mueve hacia un espejo con una velocidad $v = 0.8c$ relativa al sistema de referencia S tal y como muestra la Fig. 1.16. El espejo está en reposo con respecto a S . Un pulso de luz emitido por el cohete viaja hacia el espejo, se refleja en él y vuelve al cohete. La parte delantera del cohete está a una distancia d del espejo (tal y como lo mide un observador en S) en el momento en que el pulso de luz sale del cohete. ¿Cuál es el tiempo total que necesita el pulso para regresar al cohete medido (a) por un observador en S y (b) por un observador en la parte delantera del cohete?

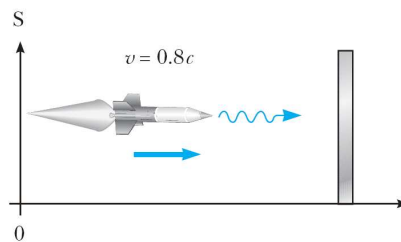


Fig. 1.16 Problema 24.

- (25) Un profesor de física en la Tierra da un examen a sus estudiantes que están en una nave espacial viajando a una velocidad v relativa a la Tierra. El examen comienza en el instante en que la nave pasa por donde está el profesor. Si

éste desea que los estudiantes tengan un tiempo T_0 (medido desde la nave) para completar el examen, demostrar que el profesor deberá esperar un tiempo (medido desde la Tierra) dado por

$$T = T_0 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$$

antes de enviar una señal luminosa para pedirles que paren.

- (26) Dos naves espaciales, cada una de 100 m de longitud (cuando se miden en reposo) viajan una hacia la otra con velocidades de $0.85c$ relativas a la Tierra.
- (a) ¿Qué longitud tiene cada nave medida por un observador desde la Tierra?
- (b) ¿Qué velocidad tiene cada nave medida por un observador de la otra nave?
- (c) ¿Qué longitud tiene cada nave medida por un observador de la otra nave? (d) En el tiempo $t = 0$ se ve desde la Tierra que las dos naves tienen sus extremos frontales en contacto, es decir, comienzan a cruzarse. ¿En qué momento se verán juntos desde la Tierra los extremos posteriores?

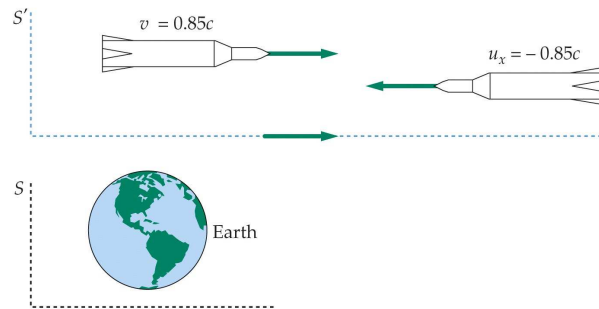


Fig. 1.17 Problema 26.

- (27) Un protón procedente de un rayo cósmico atraviesa un laboratorio con una velocidad de $0.85c$ formando un ángulo de 50° con el eje $+x$ (en el plano xy del laboratorio). Calcular la velocidad (módulo y dirección) del protón desde el punto de vista de un sistema referencia que se mueve con una velocidad de $0.72c$ dirigida a lo largo del eje x del sistema de referencia del laboratorio.
- (28) Una nave se aleja de la Tierra a con velocidad v y dispara una cápsula espacial hacia adelante a una velocidad v con respecto a la nave. El piloto de la cápsula lanza un objeto con velocidad v con respecto a él. Determinar (a) la velocidad de la cápsula espacial con respecto a la Tierra y (b) la velocidad del objeto lanzado con respecto a la Tierra.
- (29) Un observador S ve luz que le llega en una dirección que forma un ángulo de 30° con la dirección de movimiento de un objeto A que pasa por el laboratorio a una velocidad de $0.99c$ ¿Cuál es el ángulo de emisión medido desde un sistema de referencia en reposo con A ?

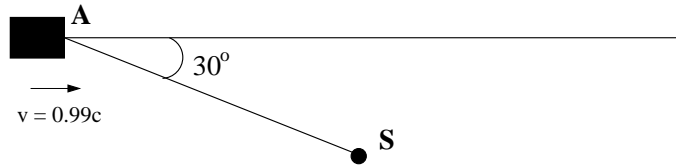


Fig. 1.18 Problema 29.

- (30) Demostrar que si una partícula se mueve formando un ángulo θ con el eje x y con una velocidad u en el sistema S , se moverá formando un ángulo θ' con el eje x' en S' (un sistema que se mueve con una velocidad v a lo largo del eje x con respecto a S) dado por

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\gamma(\cos\theta - v/u)}.$$

- (31) Dos gemelos Speedo y Goslo emigran de la Tierra al planeta X que está a 20 años-luz de distancia según se mide desde un sistema de referencia donde ambos planetas están en reposo. Los gemelos parten al mismo tiempo en diferentes naves espaciales. La nave de Speedo viaja a velocidad constante de $0.95c$ y la de Goslo a $0.75c$. Calcular la diferencia de edad entre los gemelos cuando la nave de Goslo alcance el planeta X . ¿Cuál de los dos es más viejo?
- (32) (a) ¿A qué velocidad y en qué dirección se debe estar moviendo una galaxia A para que una línea de absorción, cuya longitud de onda en la Tierra es de 550 nm (verde), tenga una longitud de onda de 450 nm (azul)? (b) ¿A qué velocidad y en qué dirección se debe estar moviendo una galaxia B para que esa misma línea aparezca a 700 nm (rojo)?
- (33) Las galaxias más lejanas que podemos detectar con el telescopio Hubble se alejan de nosotros con un parámetro de desplazamiento al rojo $z = (f_0 - f)/f = 5$. (a) ¿Cuál es la velocidad de estas galaxias con respecto a nosotros expresada como fracción de la velocidad de la luz? (b) La ley de Hubble afirma que la velocidad con la que se alejan las galaxias de la nuestra propia viene dada por $v = Hr$, donde v es la velocidad de alejamiento, r la distancia y H la constante de Hubble dada por $H = 71 \text{ km}/(\text{s Mpc})$ ($1 \text{ pc} = 3.26 \text{ años-luz}$). Hacer una estimación de la distancia a estas galaxias usando esta información.

Problemas avanzados

- (34) El movimiento de un medio como el agua influencia la velocidad de la luz. Este efecto fue medido por primera vez por Fizeau en 1851. Considérese un rayo de luz atravesando una columna horizontal de agua que se mueve con una velocidad v . (a) Demostrar que si el rayo viaja en la misma dirección del flujo de agua, la velocidad de la luz medida en el sistema del laboratorio viene dada por

$$u = \frac{c}{n} \left(\frac{1 + nv/c}{1 + v/nc} \right),$$

donde n es el índice de refracción del agua. *Nota:* usar la ley inversa de transformación de velocidades y notar que la velocidad de la luz con respecto al sistema en movimiento es c/n . (b) Mostrar que para $v \ll c$ la expresión anterior está de acuerdo con el resultado experimental de Fizeau:

$$u \approx \frac{c}{n} + v - \frac{v^2}{n^2}.$$

Esto demuestra que la transformación de las velocidades de Lorentz y no la de Galileo es la correcta para la luz.

- (35) Contrariamente a lo que ocurre en la mecánica newtoniana, en relatividad especial la aceleración de un objeto depende del sistema de referencia inercial en el que se mide. Utilizar las transformaciones de Lorentz para derivar las relaciones entre las componentes de la aceleración de un objeto medidas en dos sistemas de referencia inerciales que se mueven el uno con respecto al otro con una velocidad v constante a lo largo del eje x .
- (36) Supongamos que una nave espacial parte de la Tierra y se aleja de ella con una aceleración constante a_0 , tal y como se mide desde el interior de la nave. (a) Describir cómo cambia la velocidad con el tiempo, $v(t)$, desde el sistema de referencia de la Tierra (suponer que en el instante $t = 0$ la nave estaba en reposo). Si la nave continúa acelerando durante mucho tiempo, ¿podría superar la velocidad de la luz? (b) Calcular la distancia recorrida como función del tiempo, $x(t)$, desde el sistema de la Tierra. (c) ¿Cuánto tardaría la nave en alcanzar la estrella α -Centauro que dista 4 años-luz de la Tierra si $a_0 = 10 \text{ m/s}^2$? *Pista:* determinar en primer lugar la aceleración haciendo uso de las transformaciones de la aceleración entre dos sistemas inerciales (ver problema anterior), uno el de la tierra y otro uno que esté en reposo momentáneo con la nave espacial.
- (37) Consideremos la siguiente paradoja que está muy relacionada con la paradoja de la pértiga y el pajar. Una lámina muy fina de acero con un agujero circular de 1 m de diámetro está centrada en el eje y y reside en el plano xz en el sistema de referencia S , ver Fig. 1.19. Dicha lámina se mueve en la dirección $+y$ con una velocidad constante v_y . Por otra parte, una vara de medir de 1 m está orientada a lo largo del eje x y se mueve en la dirección $+x$ con una velocidad v . La lámina de acero llega al plano $y = 0$ al mismo tiempo que el centro de la vara de medir alcanza el origen de S . Como la vara de medir se observa contraída desde el sistema S , pasa a través del agujero de la lámina sin problemas. La paradoja aparece cuando uno considera que un observador en S' , el sistema en reposo con la vara, observa que el agujero en la lámina está contraído en la dirección x y, por tanto, resulta demasiado pequeño para que lo atraviese la vara de medir. ¿Podrá pasar la vara de medir por el agujero? Resuelve la paradoja.

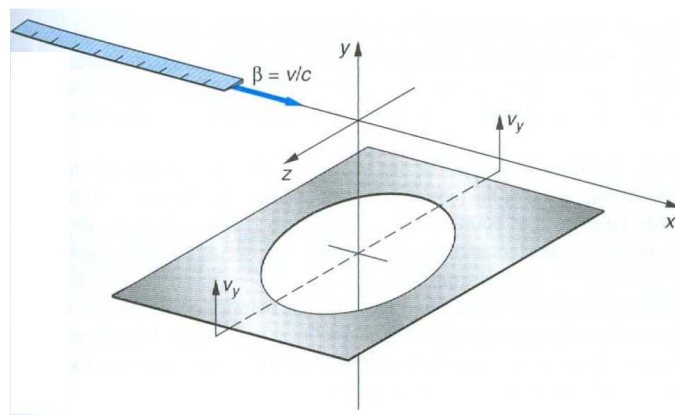


Fig. 1.19 Problema 37.

Capítulo 2

Relatividad II: Dinámica y gravitación

Este capítulo está dedicado a la dinámica relativista, con especial hincapié en los principios de conservación del momento lineal y la energía y sus consecuencias fundamentales. Además, presentaremos una breve introducción a la teoría de la relatividad general que constituye una generalización de la teoría newtoniana de la gravitación.

2.1 Momento lineal relativista

Conservación no relativista del momento lineal

Antes de considerar el momento lineal y la energía en mecánica relativista, es instructivo revisar algunas ideas acerca de la conservación no relativista del momento lineal.

Consideremos la colisión que se muestra en la siguiente figura desde el punto de vista de dos sistemas de referencia que se mueven el uno con respecto al otro con velocidad $\beta = v/c$ a lo largo del eje x , ver Fig. 2.1.

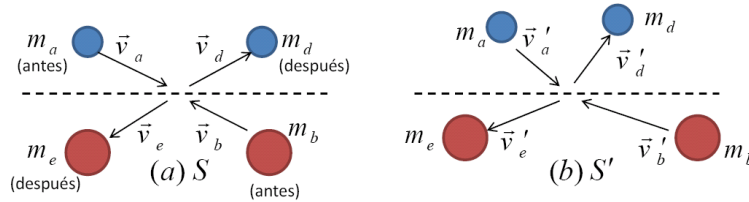


Fig. 2.1 Colisión entre dos partículas vista desde dos sistemas de referencia S y S' que se mueven con velocidad relativa v a lo largo del eje x . Nótese que hemos supuesto que las masas de las partículas pueden cambiar durante el choque.

Supongamos que se conserva el momento en S' :

$$m_a v'_{ax} + m_b v'_{bx} = m_d v'_{dx} + m_e v'_{ex} \quad (2.1)$$

$$m_a v'_{ay} + m_b v'_{by} = m_d v'_{dy} + m_e v'_{ey}. \quad (2.2)$$

Utilizando la transformación no relativista de las velocidades:

$$v'_{ay} = v_{ay}; \quad v'_{by} = v_{by}; \quad \text{etc.} \quad (2.3)$$

obtenemos que

$$m_a v_{ay} + m_b v_{by} = m_d v_{dy} + m_e v_{ey}. \quad (2.4)$$

Esta ecuación expresa simplemente la conservación del momento lineal en el sistema de referencia S , es decir, nos dice que si el momento se conserva en un sistema de referencia inercial, se conserva en todos.

En el párrafo anterior sólo consideramos la componente y . Sin embargo, el resultado es general. La dirección elegida para los ejes x o y es por completo arbitraria.

Utilizemos la expresión para la transformación de la velocidad en la dirección x :

$$v'_{ax} = v_{ax} - v; \quad \text{etc.} \quad (2.5)$$

Substituyendo estas expresiones en la conservación del momento en la dirección x en S' :

$$m_a(v_{ax} - v) + m_b(v_{bx} - v) = m_d(v_{dx} - v) + m_e(v_{ex} - v), \quad (2.6)$$

o lo que es lo mismo

$$m_a v_{ax} + m_b v_{bx} - m_d v_{dx} - m_e v_{ex} - v(m_a + m_b - m_d - m_e) = 0. \quad (2.7)$$

Como v es una velocidad arbitraria, la única posibilidad para que se satisfaga esta ecuación es que

$$m_a v_{ax} + m_b v_{bx} = m_d v_{dx} + m_e v_{ex} \quad \text{y} \quad m_a + m_b = m_d + m_e. \quad (2.8)$$

Esto quiere decir que si la conservación del momento lineal debe ser una ley no relativista válida, es decir, una ley válida en todos los sistemas inerciales, no sólo el momento debe conservarse en una colisión, sino que también la suma de las masas antes y después del choque debe ser la misma, es decir, la masa debe conservarse. Este razonamiento nos muestra que la ley de conservación de la masa se puede deducir a partir de la conservación del momento y del principio de relatividad.

¿Cómo escogemos una expresión para el momento relativista?

Las fórmulas de adición de las velocidades que resultan adecuadas cuando éstas son grandes se deducen de las transformaciones de Lorentz y no de las de Galileo que hemos utilizado en la discusión anterior. En este sentido, sería sorprendente que la expresión clásica del momento lineal, masa por velocidad, pasara sin ninguna modificación a la mecánica relativista.

Para “adivinar” la nueva expresión del momento lineal vamos a analizar una colisión rasante entre un objeto que se mueve rápidamente y otro de igual masa que se mueve con una pequeña velocidad (ver Fig. 2.2).

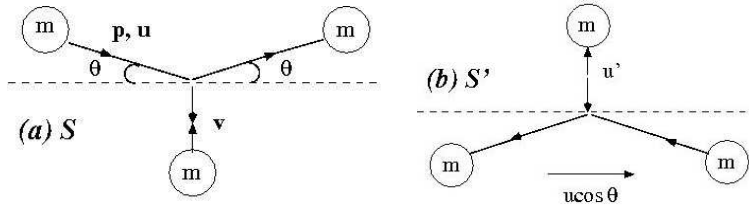


Fig. 2.2 (a) En esta colisión, un objeto se acerca por la parte de arriba con una gran velocidad u y se hace rebotar simétricamente con otro objeto de igual masa que se acerca desde abajo verticalmente con velocidad v . Dado que el choque es simétrico, el segundo objeto rebota hacia abajo con velocidad v . (b) El mismo choque visto en S' , que se mueve con velocidad $u \cos \theta$ hacia la derecha con respecto a S .

En esta colisión un objeto de masa m se acerca por la parte de arriba con gran velocidad \vec{u} y se hace rebotar simétricamente con una velocidad \vec{v} . Dado que el choque es simétrico, el segundo objeto rebota de nuevo hacia abajo con velocidad $-\vec{v}$. Se considera un choque muy rasante porque si bien u puede ser grande, si θ es muy pequeño, v puede ser tan pequeño que el momento lineal del objeto inferior se puede tratar clásicamente.

Supongamos que el objeto que se mueve rápidamente tiene un momento \vec{p} . Si el momento lineal ha de conservarse en esta colisión, deberá tenerse

$$2p \sin \theta = 2mv \Rightarrow p \sin \theta = mv. \quad (2.9)$$

Por otra parte, la componente horizontal del momento se conserva por simetría.

Desde el sistema S' , que se mueve con velocidad $u \cos \theta$ hacia la derecha con respecto a S , la masa de arriba se mueve verticalmente con una velocidad u' . Dicha velocidad viene dada por la fórmula relativista de adición de velocidades¹

$$u' = \frac{u \sin \theta \sqrt{1 - \frac{u^2 \cos^2 \theta}{c^2}}}{1 - \frac{u}{c} \cos \theta \frac{u}{c} \cos \theta} = \frac{u \sin \theta}{\sqrt{1 - \frac{u^2 \cos^2 \theta}{c^2}}} \quad (2.10)$$

Sin embargo, la simetría de la colisión nos dice que $u' = v$. Por tanto,

$$p \sin \theta = mv = mu' = m \frac{u \sin \theta}{\sqrt{1 - \frac{u^2 \cos^2 \theta}{c^2}}}, \quad (2.11)$$

lo que a su vez conduce a

$$p = \frac{mu}{\sqrt{1 - \frac{u^2 \cos^2 \theta}{c^2}}}. \quad (2.12)$$

Para llegar a esta expresión fue necesario suponer que θ era pequeño a fin de que la colisión dejara uno de los objetos con una velocidad tan pequeña que se

¹Aquí hemos usado la expresión

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - vu_x/c^2)},$$

donde $u_x = u \cos \theta$, $u_y = u \sin \theta$ y $v = u \cos \theta$.

podiera tratar clásicamente. Por tanto, si tomamos $\theta = 0$, obtenemos la expresión relativista para el momento lineal:

$$p = \frac{mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma mu \Rightarrow \vec{p} = \gamma m\vec{u} \quad (2.13)$$

Nótese que para velocidades bajas esta expresión se reduce a la relación clásica $\vec{p} = m\vec{u}$.

Conservación relativista del momento lineal

Vamos a comprobar que la expresión del momento de la ec. (2.13) se conserva en una colisión en todos los sistemas inerciales, si se conserva en alguno. Consideremos de nuevo el choque de la Fig. 2.1. Supongamos que se conserva el momento lineal en la dirección y en S' :

$$p'_{ay} + p'_{by} = p'_{dy} + p'_{ey}, \quad (2.14)$$

es decir,

$$\frac{m_a v'_{ay}}{\sqrt{1 - (v'_a)^2/c^2}} + \frac{m_b v'_{by}}{\sqrt{1 - (v'_b)^2/c^2}} = \frac{m_d v'_{dy}}{\sqrt{1 - (v'_d)^2/c^2}} + \frac{m_e v'_{ey}}{\sqrt{1 - (v'_e)^2/c^2}}. \quad (2.15)$$

Ahora debemos comprobar que esto nos lleva a la conservación del momento en el sistema S . Para ello debemos escribir las velocidades con prima en función de las velocidades sin prima, es decir, en el sistema de referencia S .

Ejemplo 2.1: Demostrar que

$$\frac{v'_{iy}}{\sqrt{1 - (v'_i)^2/c^2}} = \frac{v_{iy}}{\sqrt{1 - (v_i)^2/c^2}} \quad (i = a, b, d, e). \quad (2.16)$$

Solución. Pista: utilizar las leyes de adición de velocidades derivadas en la sección 1.6 para transformar las velocidades en el sistema S' en las velocidades en el sistema S . \square

Usando el resultado del ejemplo 2.1 se llega a que

$$\frac{m_a v_{ay}}{\sqrt{1 - v_a^2/c^2}} + \frac{m_b v_{by}}{\sqrt{1 - v_b^2/c^2}} = \frac{m_d v_{dy}}{\sqrt{1 - v_d^2/c^2}} + \frac{m_e v_{ey}}{\sqrt{1 - v_e^2/c^2}} \quad (2.17)$$

que supone la conservación de la componente y del momento relativista en el sistema S . Como la elección de los ejes coordenados ha sido arbitraria, esto implica que el momento lineal se conserva en todas las direcciones.

2.2 Energía relativista

Una vez deducida la conservación del momento lineal, vamos a analizar como dos observadores describirían la conservación del momento a lo largo de la dirección de su movimiento relativo, la dirección x .

El observador en S' escribiría la conservación del momento en la dirección x como sigue:

$$p'_{ax} + p'_{bx} = p'_{dx} + p'_{ex} \Rightarrow m_a \eta'_{ax} + m_b \eta'_{bx} = m_d \eta'_{dx} + m_e \eta'_{ex}, \quad (2.18)$$

donde $\eta'_{ax} = v'_{ax} / \sqrt{1 - (v'_a)^2/c^2}$, etc.

Usando las leyes de transformación de las velocidades de la sección 1.6, se puede demostrar que (se deja como ejercicio):

$$\eta'_{ax} = \gamma \left(\eta_{ax} - \frac{v}{\sqrt{1 - v_a^2/c^2}} \right); \quad \text{etc.} \quad (2.19)$$

Utilizando estas relaciones podemos escribir la ec. (2.18) como

$$\begin{aligned} & \gamma (m_a \eta_{ax} + m_b \eta_{bx} - m_d \eta_{dx} - m_e \eta_{ex}) \quad (2.20) \\ & -v\gamma \left(\frac{m_a}{\sqrt{1 - v_a^2/c^2}} + \frac{m_b}{\sqrt{1 - v_b^2/c^2}} - \frac{m_d}{\sqrt{1 - v_d^2/c^2}} - \frac{m_e}{\sqrt{1 - v_e^2/c^2}} \right) = 0. \end{aligned}$$

La primera línea es igual a cero por la conservación de la componente x del momento lineal en el sistema de referencia S . Sin embargo, si el momento lineal debe conservarse en ambos sistemas de referencia, la expresión que figura en el segundo paréntesis debe también ser cero. Ello significa que

$$\boxed{\frac{m_a}{\sqrt{1 - v_a^2/c^2}} + \frac{m_b}{\sqrt{1 - v_b^2/c^2}} = \frac{m_d}{\sqrt{1 - v_d^2/c^2}} + \frac{m_e}{\sqrt{1 - v_e^2/c^2}}} \quad (2.21)$$

En otras palabras, la cantidad $m/\sqrt{1 - v^2/c^2} = \gamma m$ sumada a todas las partículas debe conservarse. Esta cantidad se reduce a la masa de la partícula para velocidades bajas. Por esta razón, a la cantidad γm se la suele llamar **masa de la partícula en movimiento**:

$$\boxed{M \equiv \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma m \text{ (masa en movimiento)}} \quad (2.22)$$

donde m es la **masa en reposo**. La masa en movimiento (M) también está íntimamente relacionada con la energía. De hecho, si multiplicamos la ec. (2.21) por c^2 obtenemos la conservación de la cantidad:

$$\boxed{E \equiv \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = Mc^2 = \gamma mc^2 \text{ (energía relativista)}} \quad (2.23)$$

Así pues, llegamos a la conclusión de la conservación de la energía, donde ésta está definida como en ec. (2.23).

Si hacemos un desarrollo de Taylor en la ec. (2.23) para velocidades pequeñas ($v \ll c$), obtenemos que

$$E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots \quad (2.24)$$

El primer término, mc^2 , se conoce como **energía en reposo**, mientras que el segundo corresponde a la expresión clásica de la energía cinética. En general, para velocidades arbitrarias, la **energía cinética relativista** se define como:

$$K \equiv E - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2 \quad (\text{energía cinética relativista}) \quad (2.25)$$

Nótese que denotaremos la energía cinética K .

Hoy en día es costumbre dar la masa de una partícula en unidades de energía. Casi todas las tablas de partículas elementales dan sus masas en MeV, es decir, la energía que un electrón adquiere cuando es acelerado por una diferencia de potencial de 1 millón de voltios. Así, el protón tiene una masa de 1.673×10^{-27} kg y, por tanto, $m_p c^2 = (1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}) \times (2.998 \times 10^8 \text{ m/s})^2 = 1.504 \times 10^{10}$ J. Usando que $1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19}$ J, tenemos finalmente que $m_p = 938 \text{ MeV}/c^2$. En el caso del electrón, su masa es $m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$.

Relación entre la energía y el momento lineal

En aplicaciones prácticas, en lugar de la velocidad suele conocerse el momento lineal o la energía de una partícula. Para eliminar la velocidad v , podemos combinar

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{y} \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (2.26)$$

de manera que

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \quad (2.27)$$

Para partículas sin masa ($m = 0$), como el fotón, se tiene que $E = pc$.

Ejemplo 2.2: Una partícula de masa $2 \text{ MeV}/c^2$ y energía cinética 3 MeV choca contra una partícula en reposo de masa $4 \text{ MeV}/c^2$. Después del choque las dos partículas quedan unidas. Hallar (a) el momento lineal inicial del sistema, (b) la velocidad final del sistema de dos partículas y (c) la masa de dicho sistema.

Solución. (a) El momento lineal inicial del sistema es igual al momento de la partícula en movimiento, que llamaremos 1. Usando la relación entre energía y momento lineal:

$$E_1^2 = p_1^2 c^2 + (m_1 c^2)^2 \Rightarrow p_1 c = \sqrt{E_1^2 - (m_1 c^2)^2}.$$

Como $E_1 = 3 \text{ MeV} + 2 \text{ MeV} = 5 \text{ MeV}$ y $m_1 c^2 = 2 \text{ MeV}$, tenemos que $p_1 = 4.58 \text{ MeV}/c$.

(b) La velocidad se puede calcular a partir del cociente entre el momento lineal y la energía:

$$\frac{v}{c} = \frac{pc}{E}.$$

De la conservación de la energía tenemos que:

$$E_f = E_i = E_1 + E_2 = 5 \text{ MeV} + 4 \text{ MeV} = 9 \text{ MeV}.$$

De la conservación del momento lineal tenemos que: $p_f = p_i = 4.58 \text{ MeV}/c$. Por tanto,

$$\frac{v_f}{c} = \frac{p_f c}{E_f} = \frac{4.58 \text{ MeV}}{9 \text{ MeV}} = 0.509.$$

(c) La masa final la hallamos a partir de la relación:

$$E_f^2 = p_f^2 c^2 + (m_f c^2)^2 \Rightarrow m_f = 7.75 \text{ MeV}/c^2.$$

Nótese que la masa del sistema aumenta de $6 \text{ MeV}/c^2$ a $7.75 \text{ MeV}/c^2$. Este aumento multiplicado por c^2 es igual a la pérdida de energía cinética del sistema. \square

Ejemplo 2.3: Un cohete de $1 \times 10^6 \text{ kg}$ lleva 10^3 kg de combustible a bordo. El cohete está estacionado en el espacio cuando de repente se hace necesario acelerar. Se ponen en marcha los motores y se consume todo el combustible. Los residuos de combustible son expulsados durante un intervalo de tiempo muy corto con velocidad $c/2$ respecto a S , el sistema de referencia inercial en el que el cohete está inicialmente en reposo. (a) Calcular la variación de masa del sistema cohete-combustible. (b) Calcular la velocidad final del cohete respecto a S . (c) Calcular de nuevo la velocidad final del cohete respecto a S , esta vez utilizando la mecánica newtoniana.

Solución. (a) 134 kg , (b) $1.5 \times 10^5 \text{ m/s}$ y (c) $1.5 \times 10^5 \text{ m/s}$. \square

Ejemplo 2.4: Un mesón π^+ (también llamado pión) es una partícula responsable de la fuerza nuclear fuerte entre protones y neutrones. Se observa que un mesón decae (se desintegra) en reposo convirtiéndose en un antimuón μ^+ y un neutrino ν . Como el neutrino no tiene carga y tiene muy poca masa, no deja traza en una cámara de burbujas. (Una cámara de burbujas es una cámara llena de hidrógeno líquido que muestra el paso de las partículas cargadas creando una serie de pequeñas burbujas.) Sin embargo, la traza del antimuón es visible cuando pierde energía cinética y se para. Si la masa del antimuón es de $106 \text{ MeV}/c^2$ y su energía cinética se mide y resulta ser 4.6 MeV (por la longitud de su traza), encontrar la masa del π^+ .

Solución. El decaimiento que nos ocupa se describe como: $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$. Usando la conservación de la energía:

$$E_\pi = E_\mu + E_\nu \Rightarrow m_\pi c^2 = \sqrt{(m_\mu c^2)^2 + (p_\mu c)^2} + p_\nu c,$$

donde hemos usado el hecho de que la masa del neutrino es despreciable. Usamos ahora la conservación del momento lineal: $p_\mu = p_\nu$, ya que $p_\pi = 0$. De este modo, tenemos que

$$m_\pi c^2 = \sqrt{(m_\mu c^2)^2 + (p_\mu c)^2} + p_\mu c.$$

Para obtener p_μ , hacemos uso del valor de su energía cinética K_μ :

$$E_\mu^2 = p_\mu^2 c^2 + (m_\mu c^2)^2,$$

$$p_\mu^2 c^2 = E_\mu^2 - (m_\mu c^2)^2 = (K_\mu + m_\mu c^2)^2 - (m_\mu c^2)^2 = K_\mu^2 + 2K_\mu m_\mu c^2.$$

Substituyendo, obtenemos finalmente

$$m_\pi c^2 = \sqrt{m_\mu^2 c^4 + K_\mu^2 + 2K_\mu m_\mu c^2} + \sqrt{K_\mu^2 + 2K_\mu m_\mu c^2}.$$

Usando que $m_\mu c^2 = 106 \text{ MeV}$ y $K_\mu = 4.6 \text{ MeV}$, obtenemos que $m_\pi \approx 140 \text{ MeV}/c^2$. \square

2.3 Algunas consecuencias de los principios de conservación

Procesos inelásticos en física nuclear

Una de las predicciones más sorprendentes de la teoría de la relatividad es la no conservación de la masa en reposo. Dicho de otra forma, la masa de un sistema no tiene por qué ser igual a la suma de las masas de sus partes. La física nuclear proporciona ejemplos de este hecho. Por ejemplo, es bien conocido que la energía en las estrellas se produce por fusión nuclear en sus núcleos.² En concreto, nuestro Sol produce energía mediante el proceso de fusión nuclear conocido como cadena protón-protón.³ En esta reacción, de forma neta cuatro protones (o núcleos de hidrógeno) se convierten en un núcleo de ${}^4\text{He}$. La masa en reposo de los 4 núcleos de hidrógeno es igual a $4 \times 938.3 \text{ MeV}/c^2 = 3.7532 \text{ GeV}/c^2$, mientras que la masa en reposo del núcleo de ${}^4\text{He}$ es igual a $3.7284 \text{ GeV}/c^2$. De este modo, en esta reacción de fusión la masa en reposo se reduce en $\approx 25 \text{ MeV}/c^2$. Esta reducción de energía en reposo se traduce en una energía liberada que es la que finalmente nos llega hasta la tierra.

La creación y aniquilación de partículas

Quizás una de las posibilidades más notables entre todas las que sugiere la equivalencia masa-energía es la creación de partículas nuevas, si se dispone de una cantidad adecuada de energía. Para crear una partícula de masa en reposo m se necesita una energía de al menos mc^2 . En la práctica debe emplearse una energía superior a ésta, y en una gran cantidad de casos una energía muchísimo mayor. El motivo de ello es doble:

- (1) Existen leyes de conservación fundamentales que hacen que en muchos casos sea imposible la creación de una partícula nueva mediante un proceso de choque. La ley más conocida de éstas es la que se refiere a la conservación de la carga eléctrica. Por ejemplo, el primero de los procesos que se descubrió fue la creación de una pareja electrón-positrón a partir de la energía de un fotón de rayos γ (ver Fig. 2.3):

$$\gamma \longrightarrow e^- + e^+. \quad (2.28)$$

Aunque basándonos en consideraciones energéticas, cabría pensar que un rayo γ de 0.511 MeV fuese suficiente para obtener la energía en reposo de un electrón, el único tipo de proceso permitido en la naturaleza requiere, al menos, el doble de esta cantidad.

- (2) La otra razón es de carácter práctico. Surge del hecho de que el proceso de creación tiene lugar normalmente a partir de choques de alta energía entre

²El proceso de fusión nuclear será discutido en detalle en el Capítulo 8.

³Los mecanismos de producción de energía en las estrellas se discutirán en el Capítulo 10.

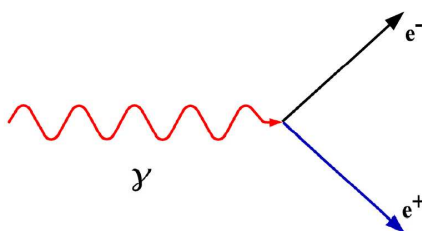
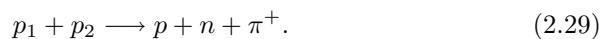


Fig. 2.3 Creación de un par electrón-positrón.

partículas preexistentes. Así por ejemplo, los mesones cargados positivamente (piones) pueden obtenerse mediante bombardeo de un blanco de hidrógeno con protones de elevada energía:

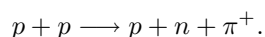


Los protones que intervienen en el choque, p_1 y p_2 , dan origen a un protón, un neutrón y un pión. Puesto que el neutrón y el protón poseen una masa en reposo casi igual, la única energía en reposo nueva que se necesita es la del pión, de unos 140 MeV. Pero si p_2 se encuentra en reposo inicialmente y p_1 posee una gran cantidad de movimiento, interviene en el citado movimiento de todo el sistema una gran cantidad de energía cinética, la cual no está disponible para la conversión en masa en reposo de partículas nuevas.

Está claro que si p_1 y p_2 chocasen entre sí con un momento igual, pero opuesto, toda la energía cinética estaría disponible para la creación de partículas.

Ejemplo 2.5: Dos protones chocan con velocidades iguales y opuestas en el sistema de referencia del laboratorio. Como resultado del choque se tiene un protón, un neutrón y un mesón π^+ . ¿Cuál es la velocidad mínima de los protones para que se produzca este proceso? Nota: $m_p = m_n = 1837m_e$ y $m_\pi = 273m_e$, donde m_e es la masa del electrón.

Solución. La reacción descrita en el enunciado es:



La velocidad mínima tendrá lugar cuando los productos finales estén en reposo. Aplicando la conservación de la energía:

$$2Mc^2 = 2m_p c^2 + m_\pi c^2,$$

donde $M = \gamma m_p$ es la masa en movimiento del protón. Operando,

$$\frac{M}{m_p} = 1 + \frac{m_\pi}{2m_p} \Rightarrow M = 1.074m_p.$$

Teniendo en cuenta que $M = \gamma m_p$, se obtiene que

$$\beta^2 = 1 - \left(\frac{m_p}{M}\right)^2 = 0.135 \Rightarrow \beta \approx 0.37.$$

Nota: Demostrar que esta velocidad sería igual a $\beta' = 0.65$ si uno de los protones estuviera inicialmente en reposo. \square

Ejemplo 2.6: Un fotón de energía E_γ y momento $p = E_\gamma/c$ choca contra un electrón en reposo. Como resultado el fotón se aniquila creando un par electrón-positrón de modo que el grupo se mueve de forma conjunta (ver Fig. 2.4). (a) ¿Cuál es la energía mínima para que este proceso tenga lugar? (b) ¿Cuál será en este caso la velocidad con la que se mueven conjuntamente los dos electrones y el positrón?

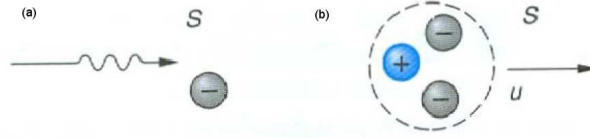


Fig. 2.4 Ejemplo 2.6.

Solución. (a) Antes de la creación se tiene que

$$E_i = E_\gamma + mc^2 \quad \text{y} \quad p_i = E_\gamma/c,$$

donde mc^2 es la energía en reposo del electrón. Después de la creación del par se tiene que

$$E_f = E_i = E_\gamma + mc^2 \quad \text{y} \quad p_f = p_i = E_\gamma/c.$$

En el sistema S' que se mueve con las 3 partículas después de la creación del par:

$$\begin{aligned} (3mc^2)^2 &= E^2 - (pc)^2 \Rightarrow 9(mc^2)^2 = (E_\gamma + mc^2)^2 - \left(\frac{E_\gamma c}{c}\right)^2 \\ &\Rightarrow 9(mc^2)^2 = E_\gamma^2 + 2E_\gamma mc^2 + (mc^2)^2 - E_\gamma^2 \Rightarrow E_\gamma = 4mc^2. \end{aligned}$$

¿Sabrías decir por qué el resultado es $4mc^2$ y no $2mc^2$?

(b) La velocidad del grupo se puede calcular de la relación

$$\frac{u}{c} = \frac{pc}{E} \Rightarrow \frac{u}{c} = \frac{E_\gamma}{E_\gamma + mc^2} = \frac{4mc^2}{5mc^2} = 0.8. \quad \square$$

Absorción de fotones

Supongamos que una partícula en reposo, por ejemplo un átomo o un núcleo, con una masa en reposo m es alcanzada por un fotón de energía Q , el cual es completamente absorbido. El sistema así formado poseerá una masa (en movimiento) M' y retrocederá con una velocidad v . Podemos determinar esta velocidad haciendo uso de los principios de conservación:

$$mc^2 + Q = M'c^2 \quad (\text{conservación de la energía}), \quad (2.30)$$

$$\frac{Q}{c} = M'v \quad (\text{conservación del momento}). \quad (2.31)$$

Combinando estas dos ecuaciones llegamos a que:

$$\boxed{\beta = \frac{v}{c} = \frac{Q}{mc^2 + Q}} \quad (2.32)$$

Observar que cuando $Q \ll mc^2$ resulta simplemente que $\beta \approx Q/mc^2$, lo cual corresponde al tipo de cálculo newtoniano en donde un cuerpo con una masa invariable m recibe un impulso de valor Q/c del fotón.

Emisión de fotones

Considérese un átomo en reposo con una masa en reposo m que emite un fotón de energía Q . Este caso es más complicado que el anterior ejemplo, puesto que el átomo emisor experimenta un retroceso. Supongamos que el átomo que retrocede posee una masa M' (y una masa en reposo m') y una velocidad v . Entonces, aplicando los principios de conservación:

$$E = mc^2 = M'c^2 + Q = E' + Q \quad (\text{conservación de la energía}), \quad (2.33)$$

$$p = 0 = M'v - \frac{Q}{c} = p' - \frac{Q}{c} \quad (\text{conservación del momento}), \quad (2.34)$$

es decir, $E' = mc^2 - Q$ y $p'c = Q$.

Despejamos Q de estas ecuaciones haciendo uso de la relación entre E' y p' para el átomo que retrocede:

$$(m'c^2)^2 = (E')^2 - (p'c)^2 = (mc^2 - Q)^2 - Q^2 = (mc^2)^2 - 2Qmc^2. \quad (2.35)$$

Ahora bien, mc^2 y $m'c^2$, energías en reposo del átomo en sus estados inicial y final, poseen ciertos valores definidos y la diferencia entre ellos es una energía fija bien definida. Si definimos Q_0 como la diferencia de energías en reposo antes y después de la emisión, es decir,

$$Q_0 = mc^2 - m'c^2, \quad (2.36)$$

tenemos que

$$(m'c^2)^2 = (mc^2)^2 - 2Q_0mc^2 + Q_0^2. \quad (2.37)$$

Así finalmente,

$$\boxed{Q = Q_0 \left(1 - \frac{Q_0}{2mc^2}\right)} \quad (2.38)$$

Como la energía del fotón es proporcional a la frecuencia, el retroceso producido en la emisión tiene como consecuencia una reducción de la frecuencia del fotón emitido (o un aumento de su longitud de onda). Únicamente si se pudiera impedir de alguna manera que el átomo emisor retrocediese, se transmitiría íntegramente la energía total desprendida, Q_0 .

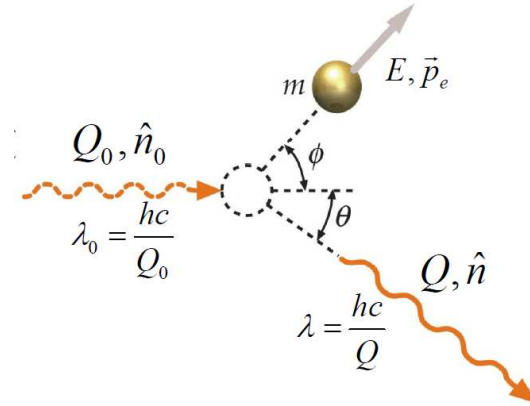


Fig. 2.5 El efecto Compton. La dispersión de la luz por un electrón puede considerarse como el choque de un fotón de momento lineal h/λ_0 y un electrón en reposo. El fotón dispersado posee menos energía y por lo tanto mayor longitud de onda.

El efecto Compton

De todos los fenómenos que ponen de relieve las propiedades corpusculares de la radiación electromagnética, el efecto Compton es quizás el más directo y el más convincente. Este efecto consiste en el choque de un fotón con un electrón libre, lo que en la práctica significa un electrón que se encuentra poco ligado a un átomo. El choque es elástico, en el sentido de que no existe trasvase alguno de energía cinética a otras formas. En esta colisión el electrón retrocede y, como consecuencia, el fotón dispersado posee una energía menor y, por tanto, una longitud de onda mayor que la del fotón incidente. El estudio sistemático de este fenómeno que a lo largo de los años 1919-1923 llevó a cabo A.H. Compton, con el empleo de fotones de rayos X, le valió el premio Nobel de física en 1927.

El proceso de dispersión Compton es, en esencia, un proceso de choque relativista, como viene descrito en la Fig. 2.5. En dicha figura podemos ver como un fotón de energía Q_0 incide sobre un electrón a lo largo de la dirección descrita por el vector unitario \hat{n}_0 . Después del choque el fotón es dispersado con un ángulo θ (medido con respecto a la dirección incidente) y posee una energía Q . Por su parte, el electrón retrocede formando un ángulo ϕ con la dirección del fotón incidente, posee una energía total E y un momento lineal \vec{p}_e .

Nuestro objetivo es obtener una expresión para la variación de la longitud de onda del fotón como función del ángulo θ y de la masa en reposo del electrón m . Para ello aplicaremos los principios de conservación:

$$Q_0 + mc^2 = E + Q \quad (\text{conservación de la energía}), \quad (2.39)$$

$$\hat{n}_0 \frac{Q_0}{c} = \hat{n} \frac{Q}{c} + \vec{p}_e \quad (\text{conservación del momento}), \quad (2.40)$$

donde \hat{n} es el vector unitario que describe la dirección del fotón dispersado. Como nos interesa el fotón que se dispersa, reagrupamos las dos ecuaciones anteriores del

siguiente modo:

$$(Q_0 - Q) + mc^2 = E, \quad (2.41)$$

$$(\hat{n}_0 Q_0 - \hat{n}Q) = \vec{p}_e c. \quad (2.42)$$

Elevando al cuadrado ambas ecuaciones

$$(Q_0 - Q)^2 + (mc^2)^2 + 2(Q_0 - Q)mc^2 = E^2, \quad (2.43)$$

$$Q_0^2 + Q^2 - 2Q_0Q \cos \theta = p_e^2 c^2. \quad (2.44)$$

Restando ambas ecuaciones,

$$2Q_0Q(1 - \cos \theta) - 2(Q_0 - Q)mc^2 = 0 \quad (2.45)$$

Por lo cual,

$$\frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_0} = \frac{1}{mc^2}(1 - \cos \theta). \quad (2.46)$$

Si la energía cuántica es Q , la longitud de onda viene dada por la relación de De Broglie:⁴

$$Q = hf = \frac{hc}{\lambda}, \quad (2.47)$$

donde $h = 6.626068 \times 10^{-34}$ J·s es la constante de Planck. Entonces, la variación de la longitud de onda del fotón dispersado en el efecto Compton puede escribirse como:

$$\boxed{\lambda - \lambda_0 = \lambda_C(1 - \cos \theta)} \quad (2.48)$$

donde $\lambda_C = h/mc$ es la *longitud de onda de Compton* y para el caso de los electrones vale 0.02426 Å. Lo que Compton hizo fue verificar experimentalmente que la longitud de onda de rayos X dispersados por diversos cristales satisfacía la expresión anterior.

2.4 Introducción a la relatividad general

La generalización de la relatividad a sistemas de referencia no inerciales fue llevada a cabo por Albert Einstein en 1916 y se conoce como *la teoría general de la relatividad*. Dicha teoría puede considerarse como una generalización de la teoría de la gravedad de Newton. Desgraciadamente, la teoría de la relatividad general es mucha más complicada matemáticamente que la relatividad especial. Sin embargo, debido a su importancia en áreas como la astrofísica o la cosmología, es interesante hacer aquí una primera aproximación a este hermosa teoría. La descripción detallada de la relatividad general requiere el uso de análisis tensorial y, por tanto, está fuera del alcance de un curso introductorio como el nuestro. Lo que haremos a continuación es introducir el principio de equivalencia, en el que se fundamenta la relatividad general, y después repasaremos de forma cualitativa algunas de las predicciones básicas de esta teoría.

⁴Esta relación se discutirá en detalle en el siguiente capítulo.

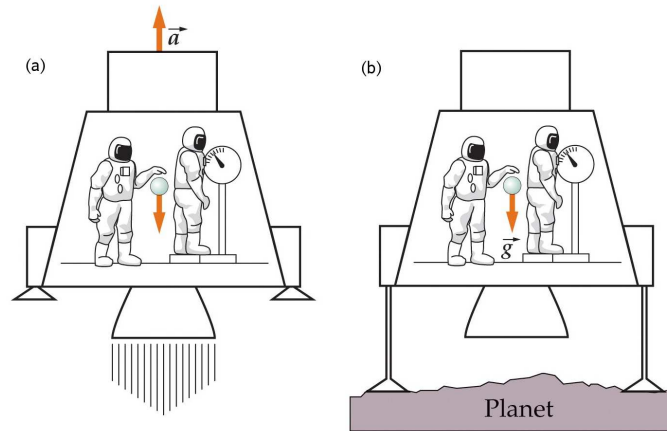


Fig. 2.6 Los resultados de los experimentos en un sistema de referencia uniformemente acelerado no pueden distinguirse de los realizados en un campo gravitatorio uniforme (b) si la aceleración \vec{a} y el campo gravitatorio \vec{g} tienen el mismo módulo.

2.4.1 El principio de equivalencia

El fundamento de la teoría general de la relatividad es el **principio de equivalencia**, que nos dice:

“Un campo gravitatorio homogéneo es completamente equivalente a un sistema de referencia uniformemente acelerado”.

Este principio surge en la mecánica newtoniana debido a la igualdad entre la masa inercial y la masa gravitatoria. Para entender mejor el significado del principio de equivalencia, consideremos un compartimento situado en el espacio, alejado de toda materia y que se encuentra sometido a una aceleración uniforme \vec{a} , tal y como se muestra en la Fig. 2.6(a). No se puede llevar a cabo ningún experimento mecánico en el interior del compartimento que permita distinguir si éste se encuentra acelerando en el espacio o se encuentra en reposo (o moviéndose con velocidad constante) en presencia de un campo gravitatorio uniforme $\vec{g} = -\vec{a}$, como se muestra en la Fig. 2.6(b). Si dentro del compartimento se sueltan algunos objetos, caerán hacia el “suelo” con una aceleración $\vec{g} = -\vec{a}$. Si una persona está sobre una balanza de muelle, leerá que su “peso” tiene un valor ma .

Einstein supuso que el principio de equivalencia se aplica a todas las ramas de la física y no sólo a la mecánica. Supuso que no podía existir ningún experimento que distinguiese entre un movimiento uniformemente acelerado y la presencia de un campo gravitatorio.

Como el principio de equivalencia establece que un sistema en presencia de un campo gravitatorio se asemeja a un sistema acelerado, esto significa que la relatividad especial no se aplica a sistemas bajo la acción de la gravedad. Esto le llevó a Einstein a desarrollar una teoría de la gravitación compatible con los postulados de

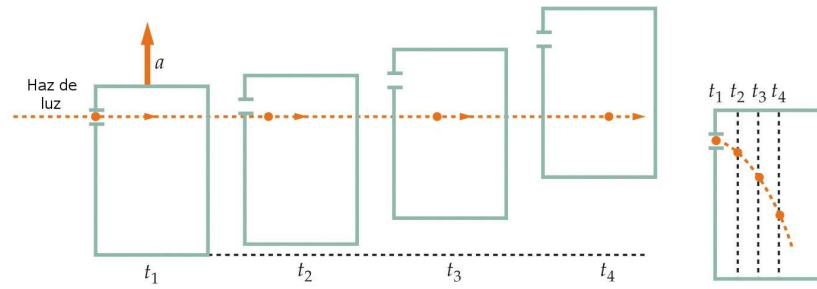


Fig. 2.7 (a) Haz de luz moviéndose en línea recta a través de un compartimento que experimenta una aceleración uniforme. La posición del haz se muestra a intervalos iguales de tiempo t_1 , t_2 , t_3 y t_4 . (b) En el sistema de referencia del compartimento la luz describe una trayectoria parabólica como lo haría una pelota si fuera lanzada horizontalmente. Para mayor claridad, los desplazamientos verticales en (a) y (b) están muy exagerados.

la relatividad especial. Esta teoría introducida en 1916 se conoce con el nombre de *teoría de la relatividad general*. En las próximas subsecciones discutiremos algunas de las predicciones fundamentales de esta teoría.

2.4.2 Desviación de la luz por un campo gravitatorio

Una de las consecuencias más importantes del principio de equivalencia es la desviación de la luz en un campo gravitatorio. Para entender este hecho, consideremos la Fig. 2.7 que nos muestra un rayo de luz que entra en un compartimento que está acelerando con aceleración \vec{a} . En esta figura se muestran varias posiciones sucesivas a intervalos de tiempo iguales. Como el compartimento se está acelerando, la distancia que recorre en cada intervalo de tiempo se incrementa con el tiempo. El camino del rayo de luz, tal y como se observa desde dentro del compartimento, es por tanto una parábola. Pero de acuerdo con el principio de equivalencia, no hay forma de distinguir entre un compartimento acelerado y uno con velocidad constante en un campo gravitatorio uniforme. Por tanto, podemos concluir que el rayo de luz se acelerará en un campo gravitatorio como cualquier objeto con masa en reposo. Así por ejemplo, cerca de la superficie de la tierra la luz caerá con un aceleración de 9.8 m/s^2 . Esto es difícil de observar debido a la enorme velocidad de la luz. Por ejemplo, en una distancia de 3000 km, que es recorrida por la luz en 0.01 s, un rayo de luz debería caer unos 0.5 mm. Einstein señaló que la desviación de la luz en un campo gravitatorio podría observarse cuando la luz de una estrella lejana pasase cerca del Sol.

Einstein calculó en su artículo original (1916) el ángulo de deflexión α que sufre un haz de luz procedente de una estrella al pasar por las inmediaciones del Sol, ver Fig. 2.8, y obtuvo como resultado

$$\alpha = \frac{4GM}{Rc^2} \quad (2.49)$$

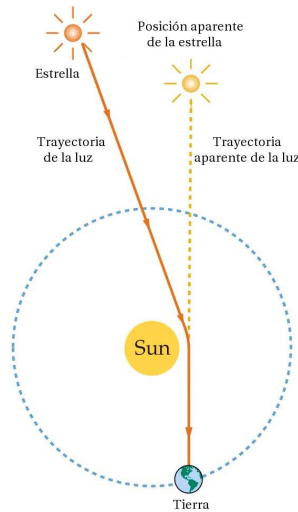


Fig. 2.8 Desviación (muy exagerada) de un haz de luz debido a la atracción gravitatoria del Sol.

donde R es la distancia mínima al centro Sol, M es la masa del Sol ($M = 1.99 \times 10^{30}$ kg) y G es la constante de gravitación universal. Suponiendo que el rayo pasa justo por la superficie del Sol, entonces $R = 6.96 \times 10^8$ m, lo cual da $\alpha = 1.75$ segundos de arco. En realidad, como se muestra en uno de los problemas avanzados al final de este capítulo, este resultado (salvo un factor 2) se puede obtener clásicamente suponiendo que un fotón posee una masa en reposo igual a p/c , donde p es su momento lineal. La predicción de la ec. (2.49) fue comprobada en 1919 por el astrónomo británico Eddington.

2.4.3 Lentes gravitatorias

La desviación de la luz por parte de un campo gravitatorio juega hoy en día un papel crucial en la astronomía y la astrofísica a través del fenómeno conocido como **efecto de lente gravitatoria** (*gravitational lensing*). Este fenómeno, predicho por Einstein en 1936 [A. Einstein, *Science* **84**, 506 (1936)], consiste en la distorsión y amplificación de la imagen de objetos lejanos (como galaxias) producida por la desviación de la luz por parte de objetos como estrellas o galaxias, que actúan de forma similar a como lo hace una lente ordinaria. El principio de lente gravitatoria se ilustra de forma esquemática en la Fig. 2.9.

El propio Einstein era bastante escéptico acerca de la posibilidad de observar este fenómeno y durante muchos años fue considerado como una curiosidad académica. La situación cambió a finales de los años 1970 cuando D. Walsh y sus colaboradores descubrieron en 1979 una doble imagen del cuasar QSO 0957. Desde entonces, se han observado miles de ejemplos del efecto de lente gravitatoria. En la Fig. 2.10

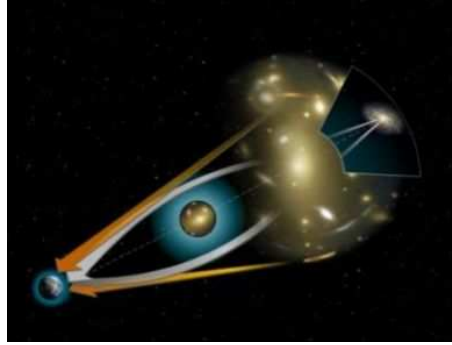


Fig. 2.9 Lentes gravitatorias que curvan la luz procedente de objetos distantes. Las flechas naranjas indican la posición aparente de los objetos, mientras que las blancas indican el camino que la luz ha seguido realmente.

mostramos algunos ejemplos de los llamados “anillos de Einstein” captados por el telescopio espacial Hubble. Esta deformación lumínica se produce cuando la fuente, la lente y el observador están completamente alineados; de no ser así, el anillo es parcial. Como discutiremos en el Capítulo 10, las lentes gravitatorias han cobrado una importancia capital para los astrónomos ya que proporcionan un método ideal para estudiar la existencia y la naturaleza de la materia oscura en el universo.

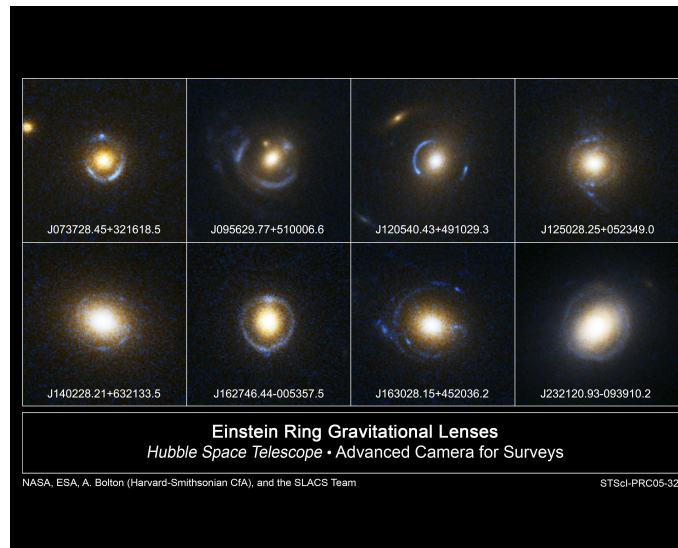


Fig. 2.10 “Anillos de Einstein” captados por el telescopio Hubble. Galaxias elípticas situadas a unos 2000-4000 millones de años-luz actúan como lentes gravitatorias deformando la imagen de otras galaxias situadas a una distancia dos veces más grande.

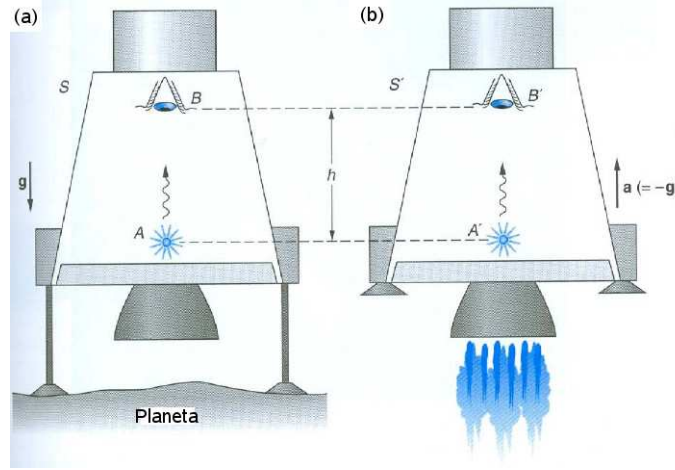


Fig. 2.11 (a) Sistema de referencia S en reposo en el campo gravitatorio de un planeta. (b) Nave espacial S' , lejos de cualquier masa, que acelera con $\vec{a} = -\vec{g}$.

2.4.4 El corrimiento al rojo gravitacional

Otra predicción importante de la relatividad general está relacionada con el efecto que tiene un campo gravitatorio sobre el ritmo de los relojes y sobre las frecuencias de la luz. De nuevo, esto es una consecuencia directa del principio de equivalencia, como pasamos a demostrar. Consideremos dos fuentes de luz idénticas (A y A') situadas en dos naves espaciales idénticas (S y S'), como se ilustra en la Fig. 2.11. La nave S' en la Fig. 2.11(b) está situada lejos de cualquier masa. En el instante $t = 0$, S' comienza a acelerar, y simultáneamente un átomo en la fuente A' emite un pulso de luz con una frecuencia f_0 . Durante el tiempo $t = h/c$ que necesita la luz para viajar de A' a B' , B' adquiere una velocidad $v = at = gh/c$, y el detector B' , que retrocede con respecto a la posición original de A' , mide una frecuencia de la luz incidente igual a f que está corrida al rojo por una fracción dada por $(f_0 - f)/f_0 \approx \beta$ para $v \ll c$ (ver sección 1.5). De este modo,

$$\boxed{(f_0 - f)/f_0 = \Delta f/f_0 \approx \beta = v/c = gh/c^2} \quad (2.50)$$

Nótese que el miembro de la derecha de la ecuación anterior es igual a la diferencia de potencial gravitatorio (es decir, la energía potencial gravitatoria por unidad de masa) $\Delta\phi = gh$ entre A y B , dividida por c^2 . De acuerdo con el principio de equivalencia, el detector B en S debe también medir una frecuencia igual a f para la luz incidente, aunque S está en reposo con respecto al planeta y, por tanto, el corrimiento no tiene nada que ver con el efecto Doppler. Ya que el átomo emisor que produjo el pulso en A puede ser considerado como un reloj, el observador en B debe concluir que el reloj en A corre más lento que el reloj en B . Ya que A está situado en el punto de menor potencial gravitatorio, el observador concluye que *los relojes corren más despacio cuanto menor sea el potencial gravitatorio*. Este

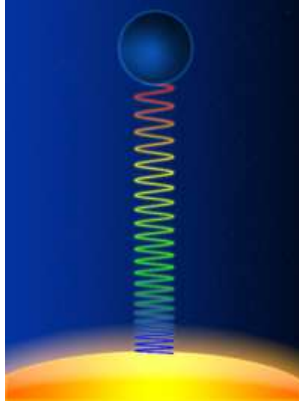


Fig. 2.12 Corrimiento al rojo de un haz luminoso cuando se mueve hacia arriba en un campo gravitatorio.

corrimiento del ritmo de los relojes hacia frecuencias más bajas, o hacia mayores longitudes de onda, al disminuir el potencial gravitatorio se conoce con el nombre de **corrimiento al rojo gravitacional**.

En el caso más general de una masa esférica M que no rota, el cambio de potencial gravitatorio entre la superficie a una distancia R del centro y un punto en el infinito viene dada por

$$\Delta\phi = \int_R^\infty \frac{GM}{r^2} dr = \frac{GM}{R} \quad (2.51)$$

y el factor por el cual la gravedad corre la frecuencia de la luz es

$$\Delta f/f_0 = (f_0 - f)/f_0 = GM/c^2 R \quad (2.52)$$

o

$$\boxed{f/f_0 = 1 - GM/c^2 R \text{ (corrimiento al rojo gravitacional)}} \quad (2.53)$$

Este corrimiento al rojo se ilustra de forma esquemática en la Fig. 2.12.

Si la luz se mueve en sentido opuesto, es decir, desde valores grandes a valores pequeños del potencial gravitatorio, los límites de integración en la ec. (2.51) se invierten y la ec. (2.53) se convierte en

$$\boxed{f/f_0 = 1 + GM/c^2 R \text{ (corrimiento al azul gravitacional)}} \quad (2.54)$$

El análisis de los corrimientos gravitacionales de las frecuencias de la luz procedente de estrellas es extremadamente difícil debido a varios factores. Por ejemplo, la luz se corre hacia el rojo cuando sale de una estrella y se corre hacia el azul cuando llega a la tierra. El corrimiento al azul al llegar a la tierra suele ser despreciable. Sin embargo, el corrimiento al rojo de estrellas y galaxias debido a su movimiento de recesión con respecto a nosotros debido a la expansión del universo suele ser mucho mayor que el corrimiento al rojo debido a efectos gravitatorios. Una complicación

adicional proviene del ensanchamiento térmico de las frecuencias en las atmósferas estelares.

En realidad, la primera comprobación experimental del efecto gravitatorio sobre las frecuencias de la luz se realizó sobre la superficie de la tierra. En 1960 primero y después en 1964, R.V. Pound y sus colaboradores midieron el corrimiento en la frecuencia de rayos gamma de 14.4 keV emitidos por núcleos de ^{57}Fe cayendo desde una altura de $h = 22.5$ m. Usando el efecto Mössbauer, las medidas de Pound y sus colaboradores estaban de acuerdo con el corrimiento al azul predicho ($gh/c^2 = 2.45 \times 10^{-15}$) con un error del 1%. Los detalles sobre estos experimentos se pueden encontrar en R.V. Pound and G.A. Rebka, Jr. Phys. Rev. Lett. **4**, 337 (1960) y R.V. Pound and J.L. Snider Phys. Rev. Lett. **13**, 539 (1964).

2.4.5 Agujeros negros

Los *agujeros negros* fueron predichos por primera vez por J.R. Oppenheimer and H. Snyder en 1939. De acuerdo con la teoría general de la relatividad, si la densidad de un objeto como una estrella es suficientemente grande, la atracción gravitatoria será tan grande que nada puede escapar de su superficie, ni siquiera la luz o cualquier otra radiación electromagnética. Una propiedad notable de un agujero negro es que nada de lo que ocurre en su interior puede estar comunicado con el exterior. Esto ocurre cuando el potencial gravitatorio en la superficie de una masa M es tan grande que la frecuencia de la radiación emitida desde la superficie se corre al rojo hasta tener frecuencia cero. Según la ec. (2.53) esto ocurrirá cuando el radio de la masa alcance el valor crítico $R_G = GM/c^2$. Este resultado es una consecuencia del principio de equivalencia, pero la ec. (2.53) sólo es válida cuando $v \ll c$. Una derivación precisa del valor crítico R_G , conocido como *radio de Schwarzschild* da

$$\boxed{R_G = \frac{2GM}{c^2}} \quad (2.55)$$

Para que un objeto con la masa del Sol fuera un agujero negro, su radio debería ser de 3 km. Durante mucho tiempo se cuestionó la existencia de estos objetos, pero en los últimos años se han identificado muchos agujeros negros, incluyendo uno supermasivo en el centro de nuestra galaxia. Un ejemplo de agujero negro observado con el telescopio espacial Hubble se muestra en la Fig. 2.13.

Es interesante señalar que la ec. (2.55) fue derivada por primera vez en el siglo XIX por el físico francés Pierre Laplace usando la mecánica newtoniana. Lo que él hizo fue calcular la velocidad de escape v_e de un planeta esférico de masa M , $v_e = \sqrt{2GM/r}$, y la igualó a la velocidad de la luz (c). Esto le llevó directamente a la ec. (2.55). Laplace obtuvo el resultado correcto cometiendo dos errores fundamentales que se cancelan el uno al otro.

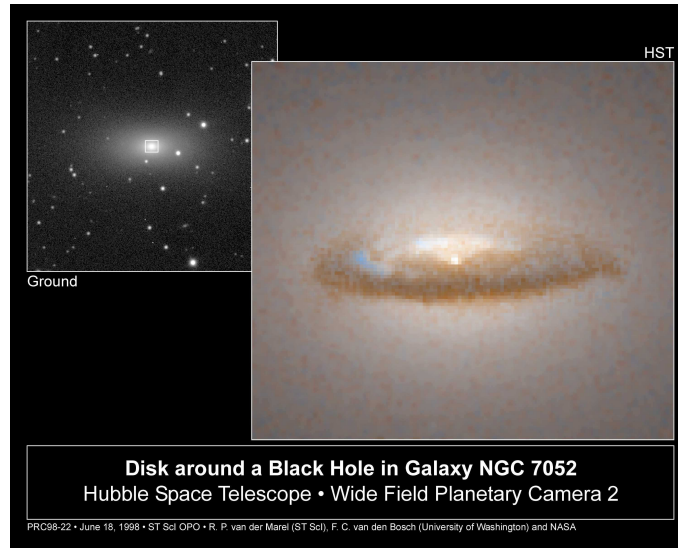


Fig. 2.13 Un disco de polvo de 3700 años-luz de diámetro rodea a un agujero negro situado en el centro de la galaxia elíptica NGC 7052 y que tiene una de masa de 300 millones de veces la del Sol.

2.4.6 Ondas gravitatorias

La teoría de la relatividad general predice la existencia de ondas gravitacionales. Al igual que una carga eléctrica genera ondas electromagnéticas, una masa acelerada debería generar ondas gravitacionales que se propagarían a la velocidad de la luz. Estas ondas son distorsiones de espacio-tiempo que se propagan a la velocidad de la luz.

Tan sólo existe evidencia indirecta de la existencia de ondas gravitacionales. En 1974 R.A. Hulse y J.H. Taylor descubrieron el primer pulsar binario, es decir, un par de estrellas de neutrones orbitando una alrededor de la otra, una de las cuales estaba emitiendo pulsos de radiación electromagnética. En un preciso experimento, demostraron que el decrecimiento en el periodo orbital del par estaba en buen acuerdo con las predicciones de la relatividad general para el ritmo de pérdida de energía gravitacional por medio de la emisión de ondas gravitatorias (ver Fig. 2.14).

2.5 Bibliografía recomendada

Este capítulo está basado fundamentalmente en las siguientes dos referencias:

- Capítulo 39 de “Física para la ciencia y la tecnología, Vol. 2C” (5ª edición) de Tipler y Mosca, editorial Reverté.
- Capítulo 2 de “Modern Physics” (5th edition) de Tipler y Llewellyn, W.H. Freeman.

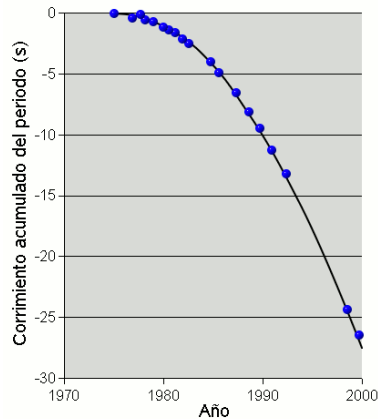


Fig. 2.14 El sistema binario PSR 1913+16 pierde energía debido a la emisión de ondas gravitacionales. Este gráfico compara el cambio en el tiempo de revolución calculado (línea continua) y medido (puntos).

En particular, la discusión en estas notas sobre la relatividad general está enteramente basada en el libro de Tipler y Llewellyn.

Para la parte de dinámica en relatividad especial he hecho uso de:

- Capítulo 9 de “Introducción a la Relatividad Especial”, J.H. Smith, editorial Reverté.
- Capítulo 6 de “Relatividad Especial”, A.P. French, editorial Reverté.

Para aquellos que quieran profundizar en la dinámica dentro del marco de la relatividad especial, yo les recomendaría el libro de French. Aquí podrán encontrar una discusión detallada del papel del concepto de fuerza en relatividad y la conexión entre relatividad especial y electromagnetismo, que son dos temas importantes que no hemos cubierto en este curso por razones de tiempo.

Para aquellos que deseen una introducción más seria y profunda a la relatividad general, yo les recomendaría:

- “Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction”, Ta-Pei Cheng (Oxford Master Series in Physics).

Este texto tiene, sin embargo, un nivel más avanzado que el de nuestro curso.

Finalmente, para aquellos que les guste la literatura de divulgación científica, dos recomendaciones:

- “Einstein’s telescope” Evalyn Gates, W.W. Norton and Company 2009.
- “Brevísima historia del tiempo”, Stephen Hawking, Editorial Crítica, 2005.

Los aficionados a la astronomía no deberían perderse el libro de Evalyn Gates, donde se relata de una forma muy amena la importancia de las lentes gravitatorias

en la astronomía moderna y, en particular, en la búsqueda de la materia y la energía oscura.

2.6 Ejercicios del Capítulo 2

Cuestiones

- (1) Una partícula se mueve con velocidad menor que $c/2$. Si su velocidad se dobla, ¿qué ocurre con su momento lineal?
- (2) Dar un argumento físico para demostrar que es imposible acelerar un objeto de masa m hasta alcanzar la velocidad de la luz, aunque una fuerza constante esté actuando sobre ella.
- (3) El límite superior para la velocidad de un electrón es la velocidad de la luz c . ¿Significa esto que el momento lineal también tiene un límite superior?
- (4) Los fotones tienen masa cero. ¿Cómo es posible que tengan un momento finito?
- (5) Dos relojes idénticos están en la misma casa, uno en el dormitorio del piso de arriba y el otro la cocina en el piso de abajo. ¿Cuál de los dos relojes marca un menor tiempo?
- (6) Un electrón (cuya energía en reposo es 0.511 MeV) se mueve a una velocidad de $0.6c$ con respecto al sistema de referencia del laboratorio. Determinar (a) el factor γ , (b) el módulo del momento lineal p en unidades de MeV/c , (c) su energía total E y (d) su energía cinética K .
- (7) La velocidad orbital del Sol relativa al centro de la vía láctea es de 250 km/s. ¿Cuál es el cociente entre los valores relativistas y newtonianos del momento lineal y de la energía cinética del Sol?
- (8) En una reacción de fusión nuclear dos átomos ${}^2\text{H}$ se combinan para producir un átomo ${}^4\text{He}$. (a) Calcular el decrecimiento de la masa en reposo. (b) ¿Cuánta energía se libera en esta reacción? (c) ¿Cuántas reacciones de este tipo han de tener lugar por segundo para producir una potencia de 1 W? Nota: el átomo de ${}^2\text{H}$ tiene una masa de $2.014102u$ y el de ${}^4\text{He}$ de $4.002602u$, donde $u = 1.66054 \times 10^{-27} \text{ kg} = 931.494 \text{ MeV}/c^2$ es la unidad de masa atómica.
- (9) Demostrar que los procesos siguientes son imposibles: (a) Un fotón choca con un electrón en reposo y le cede toda su energía al electrón. (b) Un fotón situado en el espacio libre se transforma en un electrón y un positrón. (c) Un positrón rápido y un electrón en reposo se destruyen mutuamente dando lugar a un solo fotón.
- (10) El Sol irradia al espacio una energía de unos $4.0 \times 10^{26} \text{ J}$ por segundo. (a) ¿Cuánta masa se convierte en energía por segundo? (b) Si la masa del Sol es de $2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$, ¿cuánto tiempo sobrevivirá el Sol si sigue emitiendo a este ritmo?

Problemas

- (11) El neutrón libre se desintegra en un protón, un electrón y un antineutrino (de masa en reposo despreciable) de acuerdo a $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}$. Esta reacción recibe el nombre de desintegración β^- . Si el neutrón está inicialmente en reposo (en el sistema de referencia del laboratorio), ¿cuál debe ser la energía cinética total de los productos finales de esta reacción? Si además el momento lineal del antineutrino fuera despreciable, ¿cuáles serían las energías cinéticas del electrón y del protón? *Nota:* la masa en reposo del neutrón es $939.6 \text{ MeV}/c^2$, la del protón $938.3 \text{ MeV}/c^2$, la del electrón $0.511 \text{ MeV}/c^2$ y la del antineutrino es despreciable.
- (12) Una partícula inestable de masa $3.34 \times 10^{-27} \text{ kg}$ está inicialmente en reposo. La partícula se desintegra en dos fragmentos que se mueven con velocidades $0.987c$ y $-0.868c$. Determinar las masas en reposo de los dos fragmentos.
- (13) Una partícula A en reposo se desintegra en dos partículas B y C ($A \rightarrow B + C$).
 (a) Demostrar que la energía total de las partículas resultantes (B y C) en términos de las masas de las partículas vienen dadas por

$$E_B = \frac{m_A^2 + m_B^2 - m_C^2}{2m_A} c^2 \quad \text{y} \quad E_C = \frac{m_A^2 + m_C^2 - m_B^2}{2m_A} c^2.$$

- (b) Demostrar que los módulos del momento lineal de las partículas resultantes vienen dados por

$$p_B = p_C = \frac{c}{2m_A} \sqrt{\lambda(m_A^2, m_B^2, m_C^2)},$$

donde $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$ es la llamada *función triángulo*.

- (c) Aplicar los resultados anteriores para determinar la velocidad de un muón en la desintegración (en reposo) del pión negativo: $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$, donde $\bar{\nu}_\mu$ es un antineutrino muónico, cuya masa en reposo es despreciable. *Nota:* la masa del pión es $139.56 \text{ MeV}/c^2$ y la de muón es $105.66 \text{ MeV}/c^2$.
- (14) Una partícula de masa m moviéndose a lo largo del eje x con una velocidad $+u$ colisiona frontalmente con una partícula de masa $m/3$ moviéndose a lo largo del eje x en sentido contrario con una velocidad $-u$. Después del choque las dos partículas permanecen unidas. ¿Cuál es la masa M de la partícula resultante?
- (15) Un electrón con energía cinética de 1 GeV colisiona frontalmente con un positrón en reposo. En la colisión las dos partículas se aniquilan y se crean dos fotones γ de igual energía, cada uno viajando en una dirección que forma el mismo ángulo θ con la dirección del electrón original. Calcular la energía E , el momento p y el ángulo de emisión θ de los rayos γ .
- (16) La partícula K^0 tiene una masa de $497.9 \text{ MeV}/c^2$. Se desintegra en un π^+ y un π^- , cada uno de masa $139.6 \text{ MeV}/c^2$. Después de la desintegración de una partícula K^0 , uno de los piones queda en reposo en el sistema del laboratorio. Determinar la energía cinética del otro pión y la de la partícula K^0 antes de desintegrarse.

- (17) Un antiprotón \bar{p} tiene la misma energía en reposo que un protón. Esta partícula se crea en la reacción $p + p \longrightarrow p + p + p + \bar{p}$. En un experimento, los protones que se encuentran en reposo en el laboratorio son bombardeados con protones de energía cinética K_L , que debe ser lo suficientemente grande como para que pueda convertirse una energía cinética igual a $2mc^2$ en la energía en reposo de las dos partículas. En el sistema de referencia del laboratorio, la energía cinética total no puede convertirse exclusivamente en energía en reposo debido a la conservación del momento lineal. Sin embargo, en el sistema de referencia de momento lineal total cero donde los dos protones se están moviendo el uno hacia el otro con la misma velocidad u , la energía cinética total puede convertirse en energía en reposo. (a) Hallar la velocidad de cada protón u de modo que la energía cinética total en este último sistema de referencia sea $2mc^2$. (b) Transformar al sistema del laboratorio en el que un protón está en reposo y hallar la velocidad del otro protón. (c) Demostrar que la energía cinética del protón móvil en el sistema de referencia del laboratorio es $K_L = 6mc^2$.
- (18) Una partícula de masa $1 \text{ MeV}/c^2$ y energía cinética 2 MeV choca con una partícula en reposo de masa $2 \text{ MeV}/c^2$. Después de la colisión, las partículas quedan adheridas. Hallar (a) la velocidad de la primera partícula antes del choque, (b) la energía total de la primera partícula antes del choque, (c) el momento lineal total inicial del sistema, (d) la energía cinética total después del choque y (e) la masa del sistema después del choque.
- (19) Una partícula inestable de masa en reposo M se desintegra en dos partículas idénticas, cada una de masa en reposo m . Obtener una expresión para las velocidades de las dos partículas resultantes en el sistema de referencia del laboratorio (a) si M está en reposo en el laboratorio y (b) si M tiene una energía total igual a $4mc^2$ cuando se desintegra y las partículas resultantes se mueven a lo largo de la dirección de M .
- (20) El pión neutro π^0 posee una masa de $135 \text{ MeV}/c^2$. Esta partícula puede crearse en una colisión protón-protón: $p + p \longrightarrow p + p + \pi^0$. Determinar la energía cinética umbral para la creación de un π^0 en el choque de un protón móvil y otro en reposo. Nota: la masa en reposo del protón es $938.3 \text{ MeV}/c^2$.
- (21) El pión neutro π^0 se descompone en dos rayos γ (y nada más). Si un π^0 (cuya masa en reposo es de $135 \text{ MeV}/c^2$) se mueve con una energía cinética de 1 GeV : (a) ¿cuáles son las energías de los rayos γ si el proceso de desintegración hace que sean emitidos en sentido opuesto según la trayectoria original del pión? (b) ¿Qué ángulo forman los rayos γ si son emitidos formando un ángulo igual con respecto a la dirección del movimiento del pión?
- (22) Un antiprotón \bar{p} con una energía cinética de $2/3 \text{ GeV}$ choca contra un protón p que se encuentra en reposo en el laboratorio. Se destruyen mediante la reacción $p + \bar{p} \longrightarrow \gamma_1 + \gamma_2$, dando lugar a dos fotones que marchan en sentido directo o inverso según la línea que recorría el antiprotón al incidir. La energía en reposo del protón y del antiprotón es de 1 GeV cada una. (a) ¿Cuáles son las energías

- que poseen los fotones? (b) ¿En qué dirección marcha cada fotón? (c) ¿Qué energía posee cada uno de los fotones medido en el sistema de referencia ligado al antiprotón incidente?
- (23) Un pión puede desintegrarse espontáneamente en un muón y en un antineutrino muónico según la reacción: $\pi^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$. Experimentos recientes sugieren que la masa del $\bar{\nu}_\mu$ es menor que $190 \text{ keV}/c^2$. Suponiendo que el pión se desintegra en reposo en el sistema de referencia del laboratorio, calcular las energías y los momentos lineales del muón y del antineutrino muónico si la masa del antineutrino fuera $190 \text{ keV}/c^2$. *Nota:* la masa del pión es $139.56 \text{ MeV}/c^2$ y la de muón es $105.66 \text{ MeV}/c^2$.
- (24) Un pión π^- choca con un protón en reposo y produce un kaón K^0 (mesón neutro) y una partícula Λ^0 (barión neutro): $\pi^- + p \longrightarrow K^0 + \Lambda^0$. ¿Cuál es la energía cinética mínima del pión para que esto pueda ocurrir? Las masas de las partículas son: pión $139.6 \text{ MeV}/c^2$; protón $938.3 \text{ MeV}/c^2$; kaón K^0 $493.7 \text{ MeV}/c^2$; Λ^0 $1116 \text{ MeV}/c^2$.
- (25) Un positrón con una energía cinética de 0.51 MeV choca inelásticamente con un electrón en reposo dando lugar a un átomo de positronio que retrocede libremente. El electrón y el positrón que forman el positronio se aniquilan mutuamente en vuelo, dando lugar a dos rayos γ . (a) ¿Cuál es la velocidad del átomo de positronio? (b) ¿Cuál es la energía máxima posible para uno de los fotones producidos mediante este proceso de destrucción mutua?
- (26) (a) Si un protón con una energía cinética de 437 MeV choca elásticamente con un protón en reposo y los dos protones rebotan con energías iguales, ¿cuál es el ángulo existente entre ambos? [R.B. Sutton et al., Phys. Rev. **97**, 783 (1955), hallaron experimentalmente el valor $84.0^\circ \pm 0.2^\circ$.] (b) Si el protón incidente posee una energía total de 33 GeV , ¿cuál es el ángulo que forman ambos después del choque? *Nota:* ver problema 41.
- (27) La teoría usual del efecto Compton considera el caso de un electrón libre en reposo que es alcanzado por un fotón resultando dispersado un fotón de energía menor. Supongamos que un fotón (de energía Q) choca con un electrón en movimiento (de masa en reposo m). ¿Qué velocidad inicial deberá poseer el electrón si, como consecuencia del choque, el fotón retrocede con la misma energía Q que el fotón incidente?
- (28) La luz que viaja en la dirección en la que se incrementa el potencial gravitatorio experimenta un corrimiento hacia el rojo en su frecuencia. Calcular el cambio de la longitud de onda de un haz de luz de longitud de onda $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ que sube por un tubo vertical de altura $h = 100 \text{ m}$.
- (29) Derivar una expresión para el corrimiento al rojo gravitacional en términos de la longitud de onda. Usar este resultado para determinar el corrimiento de la longitud de onda de la luz emitida por una enana blanca a 720 nm . Supóngase que la enana blanca tiene la misma masa que el Sol ($1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$), pero un radio igual al 1% del radio del Sol ($6.99 \times 10^8 \text{ m}$).

- (30) Sirio B es una enana blanca que forma con la estrella Sirio A un sistema binario. Un análisis de la órbita de esta enana blanca indica que su masa es 2×10^{30} kg, que es aproximadamente la masa del Sol. Una comparación de las líneas espectrales emitidas por esta estrella con aquellas del mismo elemento en la Tierra muestra un corrimiento relativo de la frecuencia igual a 7×10^{-4} . Suponiendo que este corrimiento se debe exclusivamente al corrimiento al rojo gravitacional, calcular la densidad de esta enana blanca. *Nota:* la densidad media del Sol es 1409 kg/m^3 .
- (31) Imaginemos que el Sol colapsa para convertirse en una esfera de radio R_g tal que el trabajo necesario para extraer una pequeña masa m de la superficie fuera igual a su energía en reposo mc^2 . Encontrar el valor de R_g . A este radio se le conoce como *radio gravitacional del Sol*.

Problemas avanzados

- (32) La forma relativista de la segunda ley de Newton viene dada por la expresión $\vec{F} = d\vec{p}/dt = d(\gamma m \vec{v})/dt$, donde \vec{p} es el momento lineal relativista. Demostrar que cuando \vec{F} es paralela a \vec{v} se tiene que

$$F = m \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \frac{dv}{dt},$$

donde m es la masa de un objeto y v su velocidad.

- (33) Una partícula cargada se mueve a lo largo de una línea recta en un campo eléctrico uniforme E con velocidad v . Si el movimiento y el campo eléctrico están en la dirección x , (a) demostrar que el módulo de la aceleración de la carga q está dada por

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{qE}{m} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}.$$

(b) Discutir el significado de la dependencia de la aceleración con la velocidad.

(c) Si la partícula parte desde el reposo en $x = 0$ en $t = 0$, determinar la velocidad de la partícula y su posición después de transcurrido un tiempo t . Comentar los valores de v y x cuando $t \rightarrow \infty$.

- (34) Recordemos que la fuerza magnética ejercida sobre una carga q en movimiento con velocidad \vec{v} en un campo magnético \vec{B} es igual a $q\vec{v} \times \vec{B}$. Si una partícula cargada se mueve en una órbita circular con una velocidad constante v en presencia de un campo magnético constante, usar la forma relativista de la segunda ley de Newton para demostrar que la frecuencia de su movimiento orbital es

$$\omega = \frac{qB}{2\pi m} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}.$$

- (35) Demostrar que el momento lineal de una partícula con carga e moviéndose en un círculo de radio R en un campo magnético B está dado por $p = 300BR$, donde p está en MeV/c, B en teslas y R en metros.

- (36) El kaón K^0 es un mesón neutro que se desintegra en dos piones cargados de acuerdo con $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$. Los piones tienen cargas opuestas y masas idénticas e iguales a $m_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2$. Supongamos que el K^0 se desintegra en reposo en una cámara de burbujas en presencia de un campo magnético de 2.0 T (ver Fig. 2.15). Si el radio de curvatura de los piones es 34.4 cm, calcular (a) los momentos lineales y las velocidades de los piones y (b) la masa del mesón K^0 .

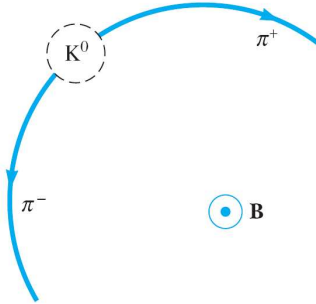


Fig. 2.15 Problema 35.

- (37) Para comprobar las predicciones de la relatividad especial y general sobre la dilatación del tiempo, en 1971 se llevaron relojes atómicos a bordo de cuatro aviones que volaron alrededor de la Tierra dirigiéndose dos de ellos hacia el oeste y los otros dos hacia el este. (a) Si los aviones que se dirigen hacia el oeste volaran a una velocidad promedio de 1500 km/h relativa a la superficie de la Tierra, ¿cuánto tiempo deberían estar volando para que el reloj de abordó retrasara 1 s con respecto a un reloj en la superficie de la Tierra? (b) En el experimento real los aviones volaron alrededor de la Tierra una vez y la discrepancia con los relojes en la Tierra fue de 273 ns. ¿Cuál fue la velocidad promedio de estos aviones? Nota: tener en cuenta las correcciones debidas tanto a la relatividad espacial (dilatación del tiempo) como a la relatividad general (influencia de un campo gravitatorio en el tiempo).
- (38) En un experimento mental sencillo, Einstein demostró que existe una masa asociada con la radiación electromagnética. Consideraremos una caja de longitud L y masa M apoyada sobre una superficie sin rozamiento. En la pared izquierda de la caja existe una fuente luminosa que emite radiación de energía E , la cual es absorbida por la pared de la derecha de la caja. De acuerdo con la teoría clásica del electromagnetismo, esta radiación transporta un momento lineal de valor $p = E/c$. (a) Hallar la velocidad de retroceso de la caja de forma que se conserve dicho momento lineal cuando se emite la luz. (Como p es pequeño y M es grande, se puede utilizar la mecánica clásica). (b) Cuando la luz es absorbida por la pared de la derecha de la caja, ésta se para, de modo que sigue siendo

nulo el momento lineal total. Si despreciamos la velocidad extremadamente pequeña de la caja, el tiempo que tarda la luz en atravesar la caja es $\Delta t = L/c$. Hallar la distancia que ha recorrido la caja en ese tiempo. (c) Demostrar que si el centro de masas del sistema ha de permanecer fijo en el mismo sitio, la radiación debe poseer una masa $m = E/c^2$.

- (39) (a) Desde un sistema de referencia S se observa que una partícula se mueve con una velocidad u a lo largo del eje y . Esta partícula también es observada desde otro sistema de referencia S' que se mueve con respecto a S con una velocidad v a lo largo del eje x . Demostrar que el momento lineal y la energía en ambos sistemas están relacionados por las siguientes ecuaciones de transformación:

$$p'_x = \gamma \left(p_x - \frac{vE}{c^2} \right); \quad p'_y = p_y; \quad p'_z = p_z; \quad \frac{E'}{c} = \gamma \left(\frac{E}{c} - \frac{vp_x}{c} \right).$$

Nota: si comparamos estas ecuaciones con la transformación de Lorentz correspondiente a x', y', z', t' , nos damos cuenta de que las magnitudes $p_x, p_y, p_z, E/c$ se transforman del mismo modo que x, y, z, ct .

(b) Usando los resultados del apartado anterior, demostrar que la expresión $E^2/c^2 - p^2$, donde p es el módulo del momento lineal, es un invariante Lorentz, es decir, tiene el mismo valor en todos los sistemas de referencia inerciales. Demostrar además que esta expresión vale m^2c^2 . *Nota:* este resultado es válido tanto si E y p son la energía y el momento de una partícula individual como si lo son de un conjunto de ellas.

- (40) (a) Una partícula A de energía total E colisiona con una partícula B en reposo y como resultado se producen las partículas $C_1, C_2, \dots: A + B \rightarrow C_1 + C_2 + \dots + C_n$. Demostrar que el valor mínimo de E para que se produzca esta reacción (conocido como energía umbral) viene dado en términos de las masas de las partículas por la siguiente expresión:

$$E_{\text{umbral}} = \frac{M^2 - m_A^2 - m_B^2}{2m_B} c^2, \quad \text{donde } M = m_1 + m_2 + \dots + m_n.$$

Pista: es conveniente usar el resultado del apartado (b) del problema anterior.

(b) Utilizar la fórmula anterior para resolver el problema 24 de este capítulo.

- (41) Una partícula A en reposo se desintegra en tres o más partículas: $A \rightarrow B + C + D + \dots$. (a) Determinar los valores máximos y mínimos de la energía de B en esta desintegración en función de las masas de las diversas partículas. (b) Utilizar el resultado anterior para determinar la energía cinética máxima y mínima del electrón en la desintegración β^- del neutrón: $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$. *Nota:* la masa en reposo del neutrón es $939.6 \text{ MeV}/c^2$, la del protón $938.3 \text{ MeV}/c^2$, la del electrón $0.511 \text{ MeV}/c^2$ y la del antineutrino es despreciable.

- (42) Se cree que la dispersión Compton por fotones procedentes de estrellas puede ser un mecanismo de degradación energética de electrones de elevada energía en el espacio interestelar. Se ha propuesto un experimento [por R. Milburn, Phys. Rev. Lett. **10**, 75 (1963)] en el cual este fenómeno puede observarse en el laboratorio mediante la dispersión de un haz de electrones de elevada

energía contra el flujo intenso de fotones visibles producido por un laser típico. Demostrar que en tal proceso la energía del laboratorio del fotón dispersado viene dada con una aproximación excelente ($\beta \approx 1$) por

$$E_2 \approx \gamma mc^2 \left[\frac{\lambda(1 - \beta \cos \theta_0)}{1 + \lambda(1 - \cos \theta_0)} \right],$$

en donde $\lambda = 2\gamma E_1/mc^2$ (E_1 es la energía del fotón incidente) y θ_0 es el ángulo de dispersión del fotón en el sistema en reposo del electrón. Demostrar también que θ , ángulo de dispersión del fotón, viene dado por

$$\text{tg} \theta = \frac{\text{sen} \theta_0}{\gamma(\cos \theta_0 - \beta)}.$$

Si los electrones de un haz incidente se aceleran con una energía de 6 GeV y los fotones son producidos por un laser de rubí de 694.3 nm (de forma que su energía sea 1.79 eV), ¿cuál será la energía máxima de los fotones que se dispersan?

- (43) Un resultado muy conocido de la mecánica newtoniana nos dice que si una partícula en reposo es alcanzada por otra partícula idéntica y el choque es elástico, el ángulo que forman sus trayectorias subsiguientes es de 90° . El objetivo de este problema es demostrar que este resultado deja de ser cierto en la mecánica relativista. Para ello consideraremos el caso especial en el que después del choque las dos partículas marchan simétricamente formando el mismo ángulo $\theta/2$ con la dirección de la partícula incidente. Suponiendo que la energía cinética de la partícula incidente es K_1 y la energía en reposo de las partículas es E_0 , demostrar que el ángulo θ viene dado por:

$$\cos \theta = \frac{K_1}{K_1 + 4E_0}.$$

- (44) El objetivo de este problema es estimar la desviación que sufre un rayo de luz cuando pasa cerca del Sol. Suponer que la luz consiste en partículas de masa m que viajan a la velocidad de la luz c y cuya desviación al pasar por el Sol es pequeña. (a) Usar la relación $\Delta p_x = \int_{-\infty}^{\infty} F_x dt$ para mostrar que el ángulo de deflexión θ está dado por $\theta = 2GM/(bc^2)$, donde Δp_x es el cambio total del momento lineal de las partículas de luz incidiendo en el Sol, b es el parámetro de impacto (distancia mínima entre la partícula y el centro del Sol si no hubiera interacción entre ellos) y M es la masa del Sol. (b) Para b igual al radio del Sol ($R = 6.99 \times 10^8$ m), demostrar que $\theta = 4.2 \times 10^{-6}$ rad.

Capítulo 3

Mecánica cuántica I: dualidad onda-corpúsculo

La mecánica cuántica (no relativista) se desarrolló en su plenitud a mediados de la década de los años 1920. A su desarrollo contribuyeron decisivamente los progresos realizados en los 25 primeros años del siglo XX en la comprensión de dos problemas físicos fundamentales: la estructura del átomo y la naturaleza corpuscular de la radiación electromagnética. El primero de ellos será abordado en el Capítulo 5, mientras que el segundo problema es el tema central de este capítulo. En particular, mostraremos cómo la comprensión de la naturaleza última de la radiación condujo de manera natural a la visión ondulatoria de la materia como paso previo a la formulación cuantitativa de la mecánica cuántica, que se abordará en el siguiente capítulo.

3.1 La naturaleza corpuscular de la luz: fotones

3.1.1 *Breve repaso de la teoría clásica de la radiación*

Una de las cuestiones más importantes de la historia de la física fue descubrir si la luz era de naturaleza corpuscular (haz de partículas) u ondulatoria (ondas en movimiento). Newton utilizó una teoría corpuscular de la luz para explicar las leyes de la reflexión y de la refracción, pero para este último fenómeno tuvo que suponer que la luz se propagaba más rápidamente en el agua o en el vidrio que en el aire, hipótesis que más tarde se demostró que era falsa. Los pioneros de la teoría ondulatoria fueron Robert Hooke y Christian Huygens, quienes explicaron la refracción suponiendo que la luz se propagaba más lentamente en el vidrio o en el agua que en el aire. Newton rechazó la teoría ondulatoria porque en su tiempo se consideraba que la luz se propagaba a través de un medio sólo en línea recta y la difracción no había sido todavía observada.

Debido a la gran reputación y autoridad de Newton, su teoría corpuscular de la luz fue aceptada durante más de un siglo. Después, en 1801, Thomas Young comprobó la teoría ondulatoria de la luz mediante un famoso experimento en el que se producían dos focos de luz coherentes iluminando con un solo foco un par de rendijas estrechas y paralelas (ver Fig. 3.1). En el experimento de Young cada rendija actúa

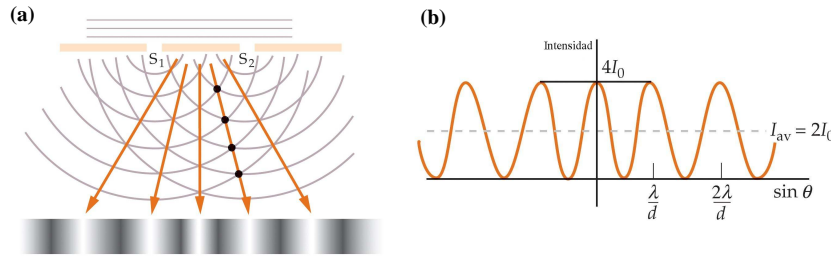


Fig. 3.1 (a) Dos ranuras actúan como focos coherentes de luz para la observación de interferencias en el experimento de Young. Las ondas de las ranuras se solapan y producen un diagrama de interferencias sobre una pantalla alejada. (b) Gráfico del diagrama de intensidades producido en (a). La intensidad es máxima en los puntos donde la diferencia de caminos es un número entero de longitudes de onda y cero donde esta diferencia es un número impar de semilongitudes de onda.

como una fuente lineal, equivalente a una fuente puntual en dos dimensiones. El diagrama de interferencia se observa sobre una pantalla situada detrás de las rendijas. Los máximos de interferencia tienen lugar bajo ángulos tales que la diferencia de caminos es un número entero de longitudes de onda. Análogamente, los mínimos de interferencia ocurren cuando la diferencia de caminos es media longitud de onda o cualquier número impar de semilongitudes de onda. La Fig. 3.1(b) muestra un gráfico del diagrama de intensidades visto sobre la pantalla. Éste y muchos otros experimentos demuestran que la luz se propaga como una onda.

A principios del siglo XIX, el físico francés Augustin Fresnel (1788-1827) realizó numerosos experimentos sobre interferencia y difracción y estableció las bases matemáticas de la teoría ondulatoria. Entre sus resultados, demostró que la propagación observada de la luz en línea recta es una consecuencia de las longitudes de onda muy cortas de la luz visible.

La teoría ondulatoria clásica de la luz culminó en 1860 cuando James Clerk Maxwell publicó su teoría matemática del electromagnetismo. Esta teoría proporcionó una ecuación de onda que predecía la existencia de ondas electromagnéticas que se propagaban con una velocidad $c \approx 3 \times 10^8$ m/s, coincidente con el valor medido de la velocidad de la luz. Esto sugirió que la luz es una onda electromagnética. El ojo humano es sensible a las ondas electromagnéticas con longitudes de onda en el intervalo comprendido entre 400 nm y 700 nm. Este intervalo corresponde a lo que llamamos luz visible. Otras ondas electromagnéticas, tales como las microondas, las ondas de radio o televisión y los rayos X, difieren de la luz en la longitud de onda y la frecuencia (ver Fig. 3.2).

A principios del siglo XX se demostró que la luz también posee una naturaleza corpuscular. A esta conclusión se llegó con el análisis de tres fenómenos físicos que fueron de suma importancia en el desarrollo de la mecánica cuántica. A ellos les vamos a dedicar el resto de esta sección.

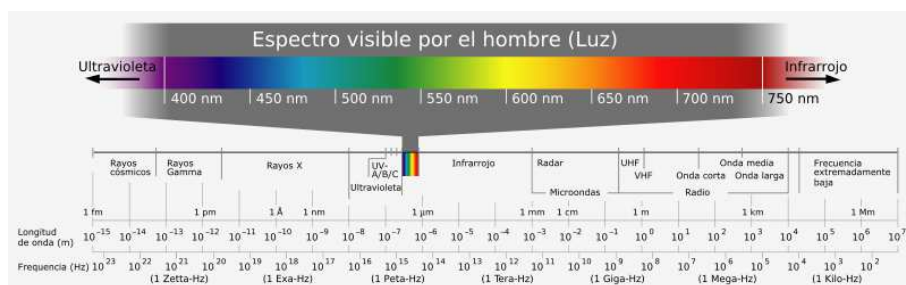


Fig. 3.2 Espectro electromagnético.

3.1.2 La radiación de cuerpo negro

La primera pista de la naturaleza cuántica de la radiación provino del estudio de la radiación térmica emitida por cuerpos opacos. Cuando la radiación incide en un cuerpo opaco, parte de ella se refleja y parte se absorbe. Los cuerpos con colores claros reflejan la mayor parte de la radiación que les llega, mientras que cuerpos oscuros absorben la mayor parte de ella. La parte de la absorción puede ser descrita como sigue. La radiación absorbida por el cuerpo aumenta la energía cinética de sus átomos, que oscilan entorno a sus posiciones de equilibrio. Como la energía cinética de los átomos determina la temperatura del cuerpo, la energía absorbida causa un aumento de la temperatura. Sin embargo, los átomos contienen carga eléctrica (los electrones) que son aceleradas por las oscilaciones. Como consecuencia, los átomos emiten radiación electromagnética que reduce la energía cinética de las oscilaciones y tiende a reducir la temperatura. Cuando el ritmo de absorción iguala al ritmo de emisión, la temperatura es constante y se dice que el cuerpo está en equilibrio termodinámico con los alrededores. Por tanto, un cuerpo que absorbe de forma eficaz la radiación también es un buen emisor.

La radiación electromagnética emitida bajo estas circunstancias se llama **radiación térmica**. A temperaturas ordinarias (por debajo de 600 °C) la radiación térmica emitida por un cuerpo no es visible y la mayor parte de la energía se concentra en longitudes de onda más largas que las del rango del visible. Cuando un cuerpo se calienta, la cantidad de energía térmica emitida aumenta y ésta se extiende hacia longitudes de onda más cortas. Sobre los 600-700 °C ya hay suficiente energía en el rango del visible y el cuerpo comienza a aparecer como rojo pálido, y a temperaturas más altas se convierte en rojo brillante o incluso en “blanco caliente”.

A un cuerpo que absorbe toda la radiación incidente se le llama **cuerpo negro**. En 1879 Josef Stefan encontró la siguiente relación empírica entre la potencia radiada por un cuerpo negro y su temperatura

$$R = \sigma T^4 \quad (\text{ley de Stefan-Boltzmann}) \quad (3.1)$$

donde R es la potencia radiada por unidad de área, T es la temperatura en la escala absoluta y $\sigma = 5.6703 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ es una constante llamada la *constante de*

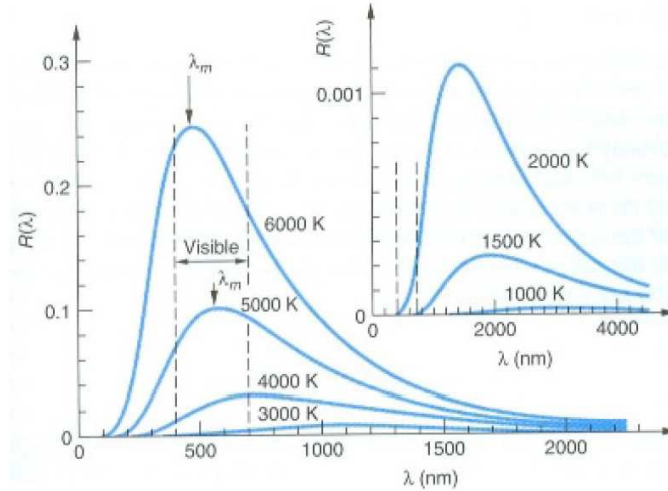


Fig. 3.3 Distribución espectral $R(\lambda)$ de un cuerpo negro en unidades arbitrarias medida a diferentes temperaturas. La longitud de onda donde se alcanza el máximo, λ_m , se indica en las curvas de 5000 y 6000 K.

Stefan. Este resultado fue derivado con argumentos basados en la termodinámica clásica por Ludwig Boltzmann 5 años después y la ec. (3.1) recibe el nombre de **ley de Stefan-Boltzmann**. Nótese que la potencia radiada por unidad de área por un cuerpo negro sólo depende de la temperatura y no de otras características del cuerpo, como su color o composición química.

Los objetos reales no son cuerpos negros y emiten menos que éste a la misma temperatura. Para estos objetos el ritmo de emisión depende también de su color y su composición. Los efectos de estas dependencias se combinan en un factor llamado *emisividad* ϵ que multiplica al miembro de la derecha en la ec. (3.1). Los valores de ϵ , que a su vez son dependientes de la frecuencia, son siempre menores que la unidad.

Relacionada con la potencia radiada total R , se define la **distribución espectral** $R(\lambda)$ de la radiación emitida por un cuerpo negro de modo que $R(\lambda)d\lambda$ describe la potencia emitida por unidad de área en el rango de longitudes de onda comprendido entre λ y $\lambda + d\lambda$. Al igual que la potencia total, $R(\lambda)$ depende tan sólo de la temperatura absoluta. Esta dependencia se ilustra en la Fig. 3.3 donde se muestra $R(\lambda)$ como función de λ para diversas temperaturas.

Nótese que $R(\lambda)$ presenta siempre un máximo a un valor de la longitud de onda λ_m que depende de la temperatura absoluta. Se observa experimentalmente que λ_m es inversamente proporcional a dicha temperatura de modo que:

$$\lambda_m T = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K} \quad (\text{ley de desplazamiento de Wien}) \quad (3.2)$$

Este resultado se conoce con el nombre de **ley de desplazamiento de Wien** y

fue obtenida por Wilhelm Wien en 1893.¹

Ejemplo 3.1: Medidas de la longitud de onda a la que $R(\lambda)$ alcanza su máximo para una estrella indican que la temperatura de su superficie es de 8000 K. Si la estrella irradia 100 veces más que el Sol, ¿cuál es el tamaño de la estrella? La temperatura del Sol es de 5800 K.

Solución. Relacionamos primero la potencia total radiada por la estrella con su temperatura absoluta usando la ley de Stefan-Boltzmann:

$$R_{\text{estrella}} = \frac{P_{\text{estrella}}}{A_{\text{estrella}}} = \frac{100P_{\odot}}{4\pi r_{\text{estrella}}^2} = \sigma T_{\text{estrella}}^4.$$

Aplicando esta ley al Sol (\odot):

$$R_{\odot} = \frac{P_{\odot}}{A_{\odot}} = \frac{P_{\odot}}{4\pi r_{\odot}^2} = \sigma T_{\odot}^4 \Rightarrow P_{\odot} = 4\pi r_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4.$$

Despejando el radio de la estrella en función del radio solar:

$$r_{\text{estrella}}^2 = 100r_{\odot}^2 \left(\frac{T_{\odot}}{T_{\text{estrella}}} \right)^4 \Rightarrow r_{\text{estrella}} = 37.4r_{\odot}. \quad \square$$

Ecuación de Rayleigh-Jeans

Para entender el papel que jugó la radiación del cuerpo en el desarrollo de la física cuántica es interesante repasar los problemas de la teoría clásica para describir este fenómeno. Nuestra discusión aquí será sólo cualitativa y para aquellos que deseen profundizar en este tema, les recomiendo consultar la bibliografía que se detalla al final de este capítulo.

El cálculo de la distribución espectral $R(\lambda)$ involucra el cálculo de la densidad de energía de las ondas electromagnéticas en una cavidad. La mejor realización práctica de un cuerpo negro es un pequeño agujero en una cavidad, como se muestra en la Fig. 3.4. La radiación que incide sobre el agujero tiene una pequeña probabilidad de ser reflejada fuera del mismo antes de que sea absorbida por las paredes de la cavidad. La potencia radiada fuera del agujero es proporcional a la densidad de energía total U (la energía por unidad de volumen de la radiación en la cavidad). La constante de proporcionalidad resulta ser $c/4$, donde c es la velocidad de la luz,

$$R = \frac{1}{4}cU. \quad (3.3)$$

Del mismo modo, la distribución espectral de la potencia radiada desde el agujero es proporcional a la distribución espectral de la densidad de energía en la cavidad. Si $u(\lambda)d\lambda$ es la fracción de energía por unidad de volumen en la cavidad en el intervalo entre λ y $\lambda + d\lambda$, entonces $u(\lambda)$ y $R(\lambda)$ están relacionadas por

$$R(\lambda) = \frac{1}{4}cu(\lambda). \quad (3.4)$$

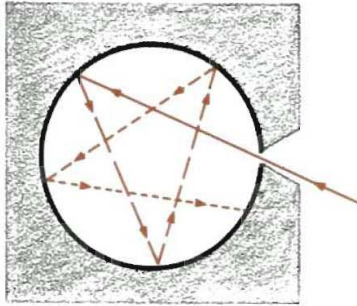


Fig. 3.4 Un pequeño agujero en la pared de una cavidad es un ejemplo casi ideal de cuerpo negro. La radiación que entra en el agujero tiene una baja probabilidad de salir antes de que sea absorbida (y reemitida) por las paredes de la cavidad.

La función de distribución de densidad de energía $u(\lambda)$ se puede calcular dentro del marco de la física clásica. El método requiere encontrar el número de modos de oscilación del campo electromagnético en la cavidad con longitudes de onda en el intervalo comprendido entre λ y $\lambda + d\lambda$ y multiplicarlo por la energía promedio por modo. El resultado es que el número de modos de oscilación por unidad de volumen, $n(\lambda)$, es independiente de la forma de la cavidad y viene dado por

$$n(\lambda) = 8\pi\lambda^{-4}. \quad (3.5)$$

De acuerdo con la teoría cinética clásica, la energía media por modo de oscilación es $k_B T$, donde $k_B = 1.380 \times 10^{23} \text{ J/K} = 8.617 \times 10^5 \text{ eV/K}$ es la constante de Boltzmann. De este modo, la teoría clásica predice para la función de distribución de densidad de energía el siguiente resultado:

$$u(\lambda) = k_B T n(\lambda) = 8\pi k_B T \lambda^{-4} \quad (\text{ecuación de Rayleigh-Jeans}) \quad (3.6)$$

Esta predicción, inicialmente derivada por Lord Rayleigh, se conoce con el nombre de **ecuación de Rayleigh-Jeans**.

Para longitudes de onda muy largas, la ecuación de Rayleigh-Jeans está de acuerdo con los experimentos, pero para longitudes de onda cortas esta ecuación nos dice que $u(\lambda) \rightarrow \infty$ cuando $\lambda \rightarrow 0$, mientras que el experimento muestra que cuando $\lambda \rightarrow 0$, $u(\lambda) \rightarrow 0$, como se muestra en la Fig. 3.3. Esta enorme discrepancia entre experimento y teoría pasó a conocerse con el nombre de *catástrofe ultravioleta*. La palabra catástrofe no es en absoluto exagerada ya que la ec. (3.6) implica que la energía total diverge ya que

$$\int_0^{\infty} u(\lambda) d\lambda = \infty, \quad (3.7)$$

es decir, según la teoría clásica, todo objeto tendría una densidad de energía infinita, lo cual es absurdo.

¹Wilhelm Wien, físico alemán, fue galardonado con el premio Nobel de física en 1911 por su descubrimiento sobre las leyes de la radiación térmica.

La ley de Planck

En 1900 el físico alemán Max Planck mostró que el problema de la catástrofe ultravioleta podría arreglarse haciendo una suposición un tanto extraña. Planck propuso que la energía media de cada modo electromagnético de la cavidad se debería calcular de una forma distinta. Él propuso que la energía de cada modo está *cuantizada*, es decir, sólo puede tomar valores que sean múltiplos de una cierta cantidad. En concreto, propuso que la energía E_n del modo n sólo podía adoptar la siguiente forma:

$$E_n = nhf \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.8)$$

donde h es la llamada **constante de Planck**.

Esta hipótesis conduce a la siguiente expresión para la energía por unidad de volumen a una longitud de onda λ :

$$u(\lambda) = \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} \quad (\text{ley de Planck}) \quad (3.9)$$

que se conoce con el nombre de **ley de Planck**.²

Esta expresión para $u(\lambda)$ se reduce a la clásica para longitudes de onda grandes. Esto se puede ver haciendo el desarrollo de Taylor de la exponencial que aparece en el denominador en ec. (3.9): $\exp(hc/\lambda k_B T) - 1 \approx hc/\lambda k_B T$ cuando $hc/\lambda k_B T \ll 1$. Esto conduce al resultado clásico: $u(\lambda) = 8\pi k_B T/\lambda^4$. Por otra parte, para longitudes de onda pequeñas, podemos usar la aproximación $\exp(hc/\lambda k_B T) - 1 \approx \exp(hc/\lambda k_B T)$ para obtener en este límite

$$u(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} e^{-hc/\lambda k_B T}, \quad (3.10)$$

que tiende a cero cuando $\lambda \rightarrow 0$, contrariamente a lo que sucede en el caso clásico.

La ley de Planck describe con gran precisión los resultados experimentales, como se muestra en la Fig. 3.5. En esta figura también se puede observar las limitaciones de la teoría clásica (ecuación de Rayleigh-Jeans). Por otra parte, partiendo de la ley de Planck se pueden derivar tanto la ley de Stefan-Boltzmann (ver Ejemplo 3.3) como la ley de desplazamiento de Wien (ver problema 37). El valor de la constante de Planck se puede obtener ajustando la ec. (3.9) a los datos experimentales y su valor es

$$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = 4.136 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s} \quad (\text{constante de Planck}) \quad (3.11)$$

Ejemplo 3.2: La temperatura de la superficie del Sol es 5800 K y medidas de la distribución espectral muestran que el Sol se comporta como un cuerpo negro, salvo a longitudes de onda cortas. Suponiendo que el Sol irradia como un cuerpo negro, ¿a qué longitud de onda aparece el pico del espectro solar?

Solución. Usando la ley de desplazamiento de Wien:

$$\lambda_m = \frac{2.898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}}{5800 \text{ K}} = 499.7 \text{ nm}. \quad \square$$

²Max Planck recibió en 1918 el premio Nobel de física por esta contribución que muchos consideran como el nacimiento de la física cuántica.

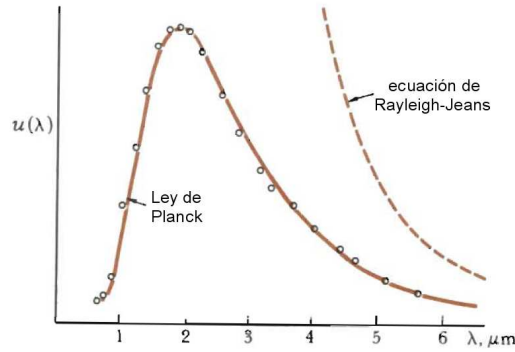


Fig. 3.5 Comparación de la ley de Planck y de la ecuación de Rayleigh-Jeans con datos experimentales a $T = 1600$ K obtenidos por W.W. Coblentz en 1915.

Ejemplo 3.3: Deducir la ley de Stefan-Boltzmann a partir de la ley de Planck.

Solución. Recordemos que la potencia total emitida por unidad de área R está relacionada con U , la energía total emitida por unidad de volumen, a través de $R = (1/4)cU$. Así pues, nuestro problema es determinar U . Para ello sólo tenemos que integrar $u(\lambda)$, dada por la ley de Planck, para todo el rango de longitudes de onda:

$$U = \int_0^{\infty} u(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} d\lambda.$$

Haciendo el cambio de variable $x = hc/\lambda k_B T$ y teniendo en cuenta que $dx = -hc d\lambda/(\lambda^2 k_B T)$,

$$U = \int_0^{\infty} \frac{8\pi hc\lambda^{-3}}{e^x - 1} \left(\frac{k_B T}{hc}\right) dx = 8\pi hc \left(\frac{k_B T}{hc}\right)^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx.$$

Se puede demostrar que la integral definida que aparece en la última igualdad es igual a $\pi^4/15$. De este modo,

$$U = \left(\frac{8\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^3}\right) T^4.$$

Así pues, tenemos finalmente que $R = \sigma T^4$, donde $\sigma = 2\pi^5 k_B^4/(15h^3 c^2)$, que corresponde a ley de Stefan-Boltzmann. \square

Radiación de fondo de microondas

Quizá el mejor ejemplo que existe en la naturaleza de cuerpo negro es el propio universo. En 1965, Arno Penzias y Robert Wilson descubrieron una radiación de 7.35 cm que tenía la misma intensidad independientemente de la dirección del espacio. Pronto se comprendió que esa radiación era un remanente del Big Bang (explosión inicial de la que surgió nuestro universo).³ La primera vez que se pudo medir la

³Arno Penzias y Robert Wilson recibieron el premio Nobel de física por este descubrimiento en 1978.

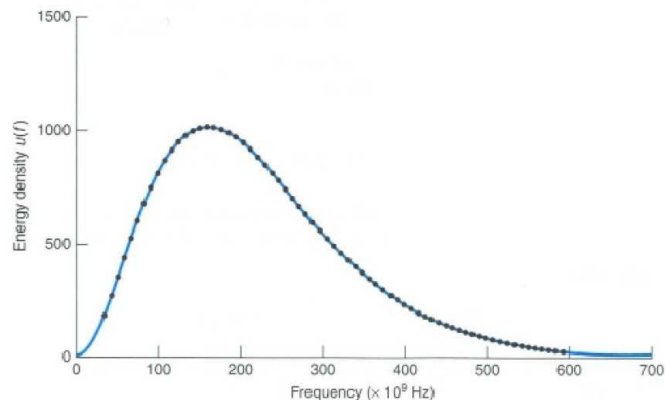


Fig. 3.6 La distribución espectral de densidad de energía $u(\lambda)$ de la radiación de fondo de microondas. La línea continua es la ley de Planck con $T = 2.725$ K. Los puntos son los datos medidos por el satélite COBE.

distribución espectral para un amplio rango de longitudes de onda fue gracias al satélite COBE (Cosmic Background Explorer) y posteriormente ha sido medida por el satélite WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe). Ajustando los datos experimentales a la ley de Planck, ver Fig. 3.6, se obtiene que la temperatura de esta radiación de microondas es de 2.725 ± 0.001 K.

3.1.3 El efecto fotoeléctrico

La naturaleza cuántica de la luz y la cuantización de la energía fueron sugeridas por Einstein en su explicación del efecto fotoeléctrico en 1905. La Fig. 3.7 muestra un diagrama del aparato básico para el estudio de este efecto. En este experimento luz de una sola frecuencia entra en una cámara de vacío. Cuando la luz incide sobre la superficie metálica limpia C (del cátodo) se emiten electrones y algunos de ellos inciden sobre una segunda placa metálica A (el ánodo), dando lugar a una corriente eléctrica entre las placas. La placa A está cargada negativamente, de modo que repele a los electrones. Sólo los electrones más energéticos la alcanzan. La energía cinética máxima de los electrones emitidos se mide aumentando lentamente el voltaje hasta que la corriente se hace cero. Los experimentos ofrecen el resultado sorprendente de que la energía cinética máxima de los electrones emitidos es independiente de la intensidad de la luz incidente. Clásicamente se esperaría que al aumentar el ritmo con el que incide la energía lumínica en la superficie del metal, aumentase la energía absorbida por los electrones individuales y, por tanto, la energía cinética máxima de los electrones emitidos. Experimentalmente, no es lo que ocurre. La energía cinética máxima de los electrones emitidos es la misma para una determinada longitud de onda de la luz incidente, independientemente de la intensidad de la luz. Einstein sugirió que este resultado experimental sólo tiene

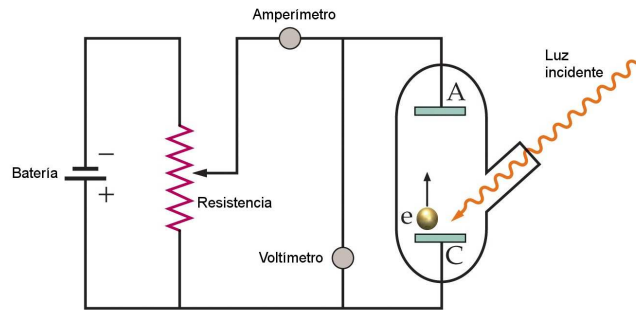


Fig. 3.7 Esquema del aparato utilizado para observar el efecto fotoeléctrico. Luz monocromática entra en una cámara de vacío y choca contra el cátodo C , que expulsa electrones. La corriente del amperímetro es una medida del número de estos electrones que llegan al ánodo A por unidad de tiempo. El ánodo se hace negativo con respecto al cátodo para que repela a los electrones. Solamente aquellos electrones con una energía cinética inicial suficiente para superar la repulsión llegan al ánodo. El voltaje entre las placas se aumenta hasta que la corriente se hace cero, lo cual ocurre cuando ni siquiera los electrones más energéticos pueden alcanzar la placa A .

explicación si la energía luminosa está cuantizada en pequeños “paquetes” llamados **fotones**. La energía E de cada fotón viene dada por

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} \quad (3.12)$$

en donde f es la frecuencia de la radiación y h es la constante de Planck.

En esta descripción, un haz luminoso consta de un chorro de partículas o fotones, cada uno de ellos con una energía hf . La intensidad de un haz luminoso (potencia por unidad de área) es el número de fotones por unidad de área y unidad de tiempo multiplicado por la energía de cada fotón. La interacción del haz luminoso con la superficie del metal consiste en choques entre fotones y electrones. En estas colisiones el fotón desaparece, cediendo toda su energía al electrón. Un electrón emitido por una superficie metálica expuesta a la luz recibe su energía de un solo fotón. Cuando la intensidad de la luz aumenta, un número mayor de fotones inciden sobre la superficie por unidad de tiempo y se emiten más electrones. Sin embargo, cada fotón tiene la misma energía hf y, por tanto, la energía absorbida por cada electrón es la misma.

Si ϕ es la energía mínima necesaria para que se desprenda un electrón de la superficie metálica, la energía cinética máxima de los electrones emitidos viene dada por

$$K_{\max} = \left(\frac{1}{2}mv^2\right)_{\max} = hf - \phi. \quad (3.13)$$

La magnitud ϕ , denominada **función de trabajo**, es una característica del metal particular.

De acuerdo con la ec. (3.13), un gráfico de K_{\max} en función de la frecuencia f debería ser una línea recta de pendiente h . Esta predicción fue comprobada

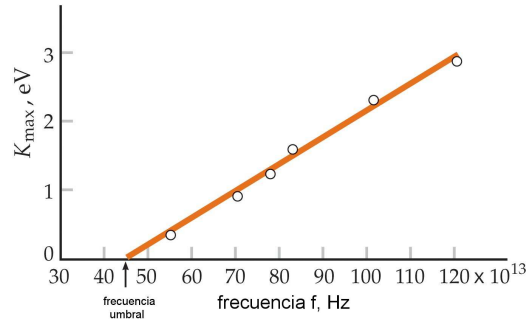


Fig. 3.8 Datos de Millikan sobre la energía cinética máxima en función de la frecuencia f para el efecto fotoeléctrico. Los datos caen sobre una recta que tiene una pendiente h según predijo Einstein un decenio antes del experimento.

experimentalmente por R.A. Millikan aproximadamente 10 años más tarde de la predicción de Einstein⁴ (ver Fig. 3.8).

Los fotones con frecuencias menores que una frecuencia umbral f_u , y por lo tanto con longitudes de onda mayores que una longitud de onda umbral $\lambda_u = c/f_u$, no tienen energía suficiente para expulsar a un electrón de un metal particular. La frecuencia umbral y la correspondiente longitud de onda umbral se relacionan con la función de trabajo ϕ estableciendo que la energía cinética máxima de los electrones sea igual a cero en la ec. (3.13):

$$\phi = hf_u = \frac{hc}{\lambda_u}. \quad (3.14)$$

Los valores típicos de ϕ son de entre 3 y 6 eV para los diferentes metales.

Nota: a menudo nos aparecerá la combinación hc . Su valor en unas unidades particularmente útiles es aproximadamente $hc \approx 1240$ eV·nm.

Ejemplo 3.4: Calcular la energía de los fotones correspondientes a la luz de 400 nm de longitud de onda (violeta) y de 700 nm (rojo).

Solución. Usamos la relación de Einstein $E = hf = hc/\lambda$:

$$\lambda = 400 \text{ nm} \Rightarrow E = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{400 \text{ nm}} = 3.10 \text{ eV},$$

$$\lambda = 700 \text{ nm} \Rightarrow E = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{700 \text{ nm}} = 1.77 \text{ eV}.$$

Nota: los rayos X tienen energías en el rango de keV, mientras que los rayos γ poseen energías del orden de MeV. \square

Ejemplo 3.5: La intensidad de la luz del Sol en la superficie de la tierra es aproximadamente 1400 W/m^2 . Suponiendo que la energía media de los fotones es

⁴Albert Einstein recibió el premio Nobel de física en 1921 por su teoría del efecto fotoeléctrico y Robert A. Millikan lo recibió en 1923 por su trabajo sobre la carga eléctrica fundamental y por su estudio experimental del efecto fotoeléctrico.

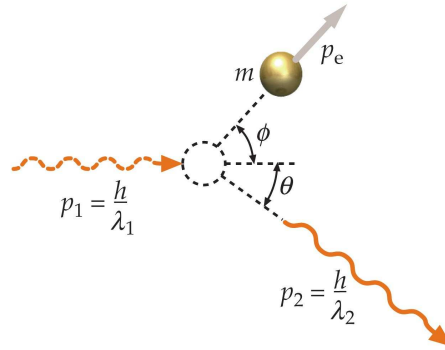


Fig. 3.9 La dispersión de la luz por un electrón puede considerarse como el choque de un fotón de momento lineal h/λ_1 y un electrón en reposo. El fotón dispersado posee menos energía y, por lo tanto, mayor longitud de onda.

de 2 eV ($\lambda \sim 600$ nm), calcular el número de fotones que inciden sobre un área de 1 cm^2 cada segundo.

Solución. La energía total contenida en N fotones es igual a $\Delta E = Nhf$, mientras que la intensidad (potencia por unidad de área) está relacionada con la energía a través de: $I = P/A = \Delta E/(A\Delta t)$. Despejando el número de fotones en términos de la intensidad tenemos:

$$N = \frac{IA\Delta t}{hf} = \frac{(1400 \text{ W/m}^2) \times (1 \text{ cm}^2) \times (1 \text{ s})}{2 \times 1.60217646 \times 10^{-19} \text{ J}} = 4.38 \times 10^{17} \text{ fotones.} \quad \square$$

3.1.4 El efecto Compton

El efecto Compton fue discutido en detalle en la sección 2.3. Recordemos que en este efecto un fotón es dispersado por un electrón libre de manera que su longitud de onda se reduce (ver Fig. 3.9). Recordemos que la correcta descripción de este fenómeno se obtiene suponiendo que el fotón se comporta como una partícula con un momento lineal dado por:

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad (3.15)$$

donde λ es su longitud de onda y h es la constante de Planck. Compton postuló esta relación basándose en la relación de Einstein $E = hf$ para la energía del fotón y la relación relativista $E = pc$ entre la energía y el momento de una partícula sin masa.

Recordemos que un análisis relativista del choque entre un fotón y un electrón inicialmente en reposo nos lleva a la siguiente expresión para el cambio en la longitud de onda del fotón en función del ángulo θ con el que es dispersado:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) \quad (3.16)$$

donde m_e es la masa del electrón. La confirmación experimental de esta relación supuso el espaldarazo definitivo a la visión corpuscular de la radiación.

Ejemplo 3.6: Un fotón de rayos X de longitud de onda 6 pm realiza una colisión frontal con un electrón de manera que el fotón dispersado se mueve en el sentido contrario al del fotón incidente (ver Fig. 3.10). (a) ¿Cuál es la variación de la longitud de onda experimentada por el fotón? (b) ¿Cuál es la energía cinética del electrón en retroceso?

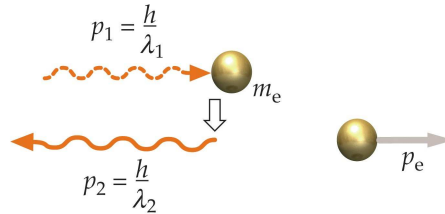


Fig. 3.10 Ejemplo 3.6.

Solución. (a) Usando la ec. (3.16):

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta) = (2.43 \text{ pm}) \times (1 - \cos\pi) = 4.86 \text{ pm}.$$

(b) La energía cinética del electrón es igual a la diferencia de energías del fotón antes y después del choque:

$$K_e = E_1 - E_2 = \frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_2}.$$

Como $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda = 10.86 \text{ pm}$, tenemos que $K_e = 93 \text{ keV}$. \square

3.2 Electrones y ondas de materia

Los electrones fueron las primeras partículas materiales cuyo compartamiento ondulatorio fue puesto de manifiesto. Recordemos que el electrón fue la primera partícula elemental descubierta. J.J. Thomson en 1897 demostró que los rayos emitidos por un tubo de rayos catódicos pueden desviarse mediante campos eléctricos y magnéticos y, por tanto, deben estar formados por partículas eléctricamente cargadas. Midiendo las desviaciones de esas partículas, Thomson mostró que se pueden obtener partículas con esta misma relación carga-masa utilizando cualquier material como cátodo, lo cual significa que estas partículas, ahora llamadas electrones, son un constituyente fundamental de toda materia.

3.2.1 La hipótesis de Louis de Broglie

Como la luz posee propiedades ondulatorias y corpusculares, parece lógico preguntarse si la materia (por ejemplo electrones, protones, etc.) posee también características de onda y partícula. En 1924 un estudiante de física francés Louis de Broglie, sugirió esta idea en su tesis doctoral.

En analogía con las relaciones para fotones, de Broglie escogió para la longitud de onda de las ondas electrónicas la expresión:

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (3.17)$$

donde p es el momento lineal del electrón, y para la frecuencia:

$$f = \frac{E}{h} \quad (3.18)$$

donde E es la energía del electrón.

Hoy en día se admite que estas relaciones pueden aplicarse a todo tipo de materia. Sin embargo, para un objeto macroscópico, las longitudes de onda son tan pequeñas que es imposible observar las propiedades usuales de las ondas, tales como la interferencia o la difracción.

Ejemplo 3.7: Determinar la longitud de onda de de Broglie correspondiente a una masa de 10^{-6} g que se mueve a una velocidad de 10^{-6} m/s.

Solución.

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{(10^{-9} \text{ kg}) \times (10^{-6} \text{ m/s})} = 6.63 \times 10^{-19} \text{ m}. \quad \square$$

La situación es distinta en el caso de electrones u otras partículas microscópicas de baja energía. Consideremos una partícula de energía cinética K . Su momento lineal se deduce de

$$K = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{2mK} \quad (3.19)$$

y, por lo tanto, su longitud de onda es

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mK}}. \quad (3.20)$$

Si multiplicamos numerador y denominador por c se obtiene

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{2mc^2K}} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{\sqrt{2mc^2K}} \quad (3.21)$$

Para los electrones, $mc^2 = 0.511$ MeV. Por lo tanto,

$$\lambda = \frac{1.23}{\sqrt{K}} \text{ nm} \quad (K \text{ en eV}). \quad (3.22)$$

Ejemplo 3.8: Hallar la longitud de onda de un electrón cuya energía cinética es 10 eV.

Solución.

$$\lambda = \frac{1.23}{\sqrt{K}} \text{ nm} = \frac{1.23}{\sqrt{10}} \text{ nm} = 0.388 \text{ nm}. \quad \square$$

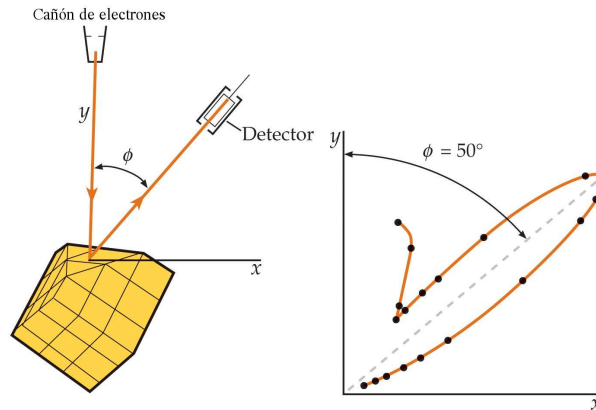


Fig. 3.11 Experimento de Davisson-Germer. (a) Los electrones son dispersados por un cristal de níquel hacia un detector. (b) Intensidad de los electrones dispersados en función del ángulo de dispersión. El máximo corresponde al ángulo previsto por la difracción de ondas de longitud de onda dada por la fórmula de de Broglie.

3.2.2 Interferencia y difracción de electrones

La prueba crucial para demostrar la existencia de las propiedades ondulatorias de los electrones fue la observación de la difracción y de la interferencia de las ondas de los electrones. Esta prueba la realizaron primeramente de forma accidental en 1927 C.J. Davisson y L.H. Germer cuando estaban estudiando la dispersión de los electrones en un blanco de níquel. Después de calentar el blanco para eliminar un recubrimiento de óxido que se había formado durante una interrupción accidental del sistema de vacío, Davisson y Germer vieron que la intensidad de los electrones dispersados expresada como función del ángulo de dispersión mostraba máximos y mínimos. Su blanco había cristalizado y por accidente habían observado la difracción de los electrones. Entonces prepararon un blanco compuesto por un solo cristal de níquel e investigaron exhaustivamente este fenómeno.

En la Fig. 3.11(a) se ilustra su experimento. Los electrones procedentes de un cañón de electrones se dirigen hacia el cristal y luego se detectan bajo cierto ángulo ϕ que puede variarse a voluntad. La Fig. 3.11(b) muestra uno de los diagramas típicos observados, y en él se observa un intenso máximo de dispersión a un ángulo de 50° . El ángulo correspondiente a la intensidad máxima de la dispersión de las ondas por un cristal depende de su longitud de onda y del espaciado entre los átomos del cristal. Utilizando el espaciado conocido de los átomos de su cristal, Davisson y Germer calcularon la longitud de onda que podía producir ese máximo y encontraron que concordaba con la obtenida de la ecuación de de Broglie [ec. (3.22)] correspondiente a la energía de los electrones que estaban utilizando. Variando la energía de los electrones incidentes, pudieron modificar las longitudes de onda de los electrones y producir máximos y mínimos en diferentes posiciones en los diagramas de difracción. En todos los casos, las longitudes de onda medidas estaban de acuerdo

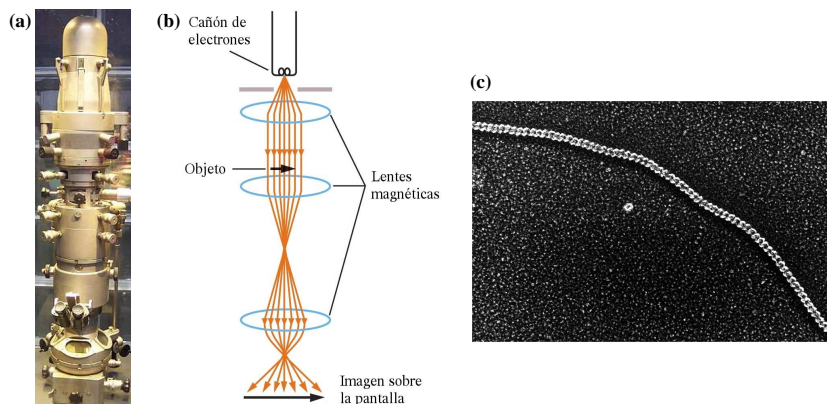


Fig. 3.12 (a) Imagen de un microscopio electrónico. (b) Diseño: los electrones procedentes de un filamento caliente se aceleran mediante una gran diferencia de potencial. El haz de electrones se hace paralelo mediante una lente de enfoque magnética. Los electrones inciden sobre un blanco muy delgado y después se enfocan mediante una segunda lente magnética. La tercera lente magnética proyecta el haz de electrones sobre una pantalla fluorescente donde se realiza la observación de la imagen. (c) Imagen tomada con un microscopio electrónico de un molécula de ADN.

con la hipótesis propuesta por de Broglie.

Otra prueba de la naturaleza ondulatoria de los electrones la proporcionó G.P. Thomson (hijo de J.J. Thomson) en 1927, quien observó la difracción de electrones en su transmisión a través de hojas delgadas de metal.

3.2.3 El microscopio electrónico

Poco después de que se descubrieran las propiedades ondulatorias del electrón, se sugirió que podían utilizarse éstos en lugar de la luz para “ver” objetos pequeños. Las ondas reflejadas o transmitidas pueden mostrar con resolución detalles sólo cuando éstos son mayores que la longitud de onda de la onda reflejada (o transmitida). Los haces de electrones pueden enfocarse eléctricamente y pueden tener longitudes de onda muy pequeñas, mucho más cortas que las de la luz visible.

El primer **microscopio electrónico** fue diseñado por Ernst Ruska⁵ y Max Knoll a finales de los años 1920. El microscopio electrónico, cuyo funcionamiento se describe en la Fig. 3.12, opera con un haz de electrones generados por un cañón electrónico, acelerados por un alto voltaje y focalizados por medio de lentes magnéticas (todo ello en alto vacío ya que los electrones son absorbidos por el aire). Los electrones atraviesan la muestra y la amplificación se produce por un conjunto de lentes magnéticas que forman una imagen sobre una placa fotográfica o sobre una pantalla sensible al impacto de los electrones que transfiere la imagen formada a la pantalla de un ordenador. Los microscopios electrónicos sólo se pueden ver en

⁵Ernst Ruska, físico alemán, recibió el premio Nobel de física en 1986 por la invención de este microscopio.

blanco y negro, puesto que no utilizan la luz, pero se le pueden dar colores en el ordenador. Como se puede apreciar, su funcionamiento es semejante a un monitor monocromático.

3.3 Interpretación de la función de onda

La función de onda correspondiente a las ondas de una cuerda describe el desplazamiento vertical de la cuerda, y . La función de onda para las ondas sonoras describe o bien el desplazamiento s de las moléculas del aire, o bien la presión P . En el caso de ondas electromagnéticas, la función de onda describe los campos eléctrico \vec{E} y magnético \vec{B} . ¿Qué describe la función de onda correspondiente a ondas electrónicas o de materia en general? ¿Qué es lo que oscila en este caso? Podemos obtener una pista considerando la cuantización de las ondas electromagnéticas. Para las ondas clásicas, como las sonoras o las luminosas, la energía por unidad de volumen de la onda es proporcional al cuadrado de la función de onda. Como la energía de una onda luminosa está cuantizada, la energía por unidad de volumen es proporcional al número de fotones por unidad de volumen. Es, por tanto, lógico suponer que el cuadrado de la función de onda sea proporcional al número de fotones por unidad de volumen. Sin embargo, supongamos que tenemos una fuente luminosa de muy baja energía, tal que en cierto tiempo emite tan sólo un fotón. En cualquier unidad de volumen existirá un fotón o ninguno. El cuadrado de la función de onda describe entonces la probabilidad de encontrar un fotón en cada unidad de volumen.

La ecuación de Schrödinger (que discutiremos en el siguiente capítulo) describe las ondas de materia de una sola partícula. El cuadrado de la función de onda de una partícula describe la probabilidad de encontrar la partícula en alguna unidad de volumen. Esta probabilidad debe ser proporcional al tamaño del elemento de volumen dV . Así, en una dimensión, la probabilidad de encontrar una partícula en una región dx entorno a la posición x es $|\psi(x)|^2 dx$. Si llamamos $P(x)dx$ a esta probabilidad, en donde $P(x)$ es la **densidad de probabilidad**, tendremos

$$\boxed{P(x) = |\psi(x)|^2} \quad (3.23)$$

Nótese que tomamos el módulo al cuadrado de la función de onda ya que, como veremos en el siguiente capítulo, la función de onda en mecánica cuántica es una función compleja.

Generalmente, la función de onda depende del tiempo, así como de la posición, y se escribe $\psi(x, t)$. Sin embargo, para las ondas estacionarias, la densidad de probabilidad es independiente del tiempo.

La probabilidad de encontrar la partícula en dx en el punto x_1 o en el punto x_2 es la suma de las probabilidades por separado $P(x_1)dx_1 + P(x_2)dx_2$. Si sólo tenemos una partícula la probabilidad de encontrarla en algún lugar debe de ser 1.

Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1. \quad (3.24)$$

Esta ecuación se llama **condición de normalización**. Si ψ ha de satisfacer la condición de normalización, debe de tender a cero cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

Ejemplo 3.9: Una partícula puntual se mueve atrás y adelante con velocidad constante entre dos paredes situadas en $x = 0$ y $x = 8$ cm. Se carece de cualquier información adicional. (a) ¿Cuál es la densidad de probabilidad $P(x)$? (b) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar la partícula en $x = 2$ cm? (c) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar la partícula entre $x = 3.0$ cm y $x = 3.4$ cm?

Solución. (a) Obviamente la densidad de probabilidad será una constante (independiente de la posición entre las paredes):

$$P(x) = \begin{cases} P_0, & 0 < x < 8 \text{ cm} \\ 0, & x < 0 \text{ ó } x > 8 \text{ cm}. \end{cases}$$

Para determinar la constante P_0 hacemos uso de la condición de normalización:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_0^{8 \text{ cm}} P_0 dx = P_0 \times (8 \text{ cm}) = 1 \Rightarrow P_0 = \frac{1}{8 \text{ cm}}.$$

(b) La probabilidad de encontrar a la partícula en el punto $x = 2$ cm es 0 ya que la anchura de este “intervalo” es cero.

(c) La probabilidad de encontrar la partícula en un intervalo de anchura $\Delta x = 0.4$ cm es:

$$P_0 \Delta x = \left(\frac{1}{8 \text{ cm}} \right) 0.4 \text{ cm} = 0.05. \quad \square$$

3.4 El principio de incertidumbre de Heisenberg

Una consecuencia importante de la dualidad onda-corpúsculo en la naturaleza es el *principio de incertidumbre o principio de indeterminación*, el cual establece que es imposible medir simultáneamente la posición y el momento lineal de una partícula con precisión ilimitada. Vamos a tratar de entender este principio con el siguiente razonamiento. Una forma usual de medir la posición de un objeto es observarlo mediante luz. Al hacer esto, la luz se dispersa en el objeto y determinamos su posición por la dirección de la luz dispersada. Si utilizamos luz de longitud de onda λ , podemos medir la posición x sólo hasta una incertidumbre Δx del orden de λ debido a los efectos de difracción:

$$\Delta x \sim \lambda. \quad (3.25)$$

Para reducir la incertidumbre en la posición podemos, por lo tanto, utilizar luz de longitud de onda muy corta, incluso quizá rayos X. En principio, no hay límite en

la exactitud de la medida de la posición, ya que no hay límite en la pequeñez de la longitud de onda.

Si conocemos la masa de un objeto, podemos determinar su momento lineal p_x midiendo su posición en dos instantes próximos y calculando su velocidad. Si utilizamos luz de longitud de onda λ , los fotones tienen un momento lineal h/p_x (en la dirección x). Cuando estos fotones son dispersados por el objeto en estudio, el momento lineal de éste se modifica por la dispersión. La incertidumbre del momento lineal Δp_x del objeto introducido al intentar observarlo, es del orden de h/λ :

$$\Delta p_x \sim h/\lambda. \quad (3.26)$$

Cuando la longitud de onda de la radiación es pequeña, el momento lineal del fotón es grande y la medida de p_x tendrá una gran incertidumbre. Esta incertidumbre no puede eliminarse reduciendo la intensidad de la luz. Por lo tanto, la incertidumbre en la medida del momento lineal de la partícula será grande si λ es pequeña y la incertidumbre en la medida de la posición del objeto será grande si λ es grande también.

El producto de las incertidumbres intrínsecas en la posición y el momento lineal es

$$\Delta x \Delta p_x \sim \lambda \frac{h}{\lambda} = h. \quad (3.27)$$

Si se define con precisión lo que se entiende por incertidumbres en la medida se tiene que:

$$\boxed{\Delta x \Delta p_x \geq \frac{1}{2} \hbar} \quad (3.28)$$

donde $\hbar \equiv h/(2\pi)$. La expresión anterior corresponde al **principio de incertidumbre posición-momento** y fue enunciado por Werner Heisenberg en 1927. En la práctica, los errores en las medidas experimentales son usualmente mayores que el límite intrínseco inferior establecido por el principio de incertidumbre.

De modo similar, se puede demostrar que existe un límite para la medida de la energía y el tiempo que se requiere para medirla:

$$\boxed{\Delta E \Delta t \geq \frac{1}{2} \hbar} \quad (3.29)$$

En la siguiente sección exploraremos algunas de las consecuencias de estos dos principios de incertidumbre.

3.5 Algunas consecuencias del principio de incertidumbre

Energía mínima de una partícula en una caja

Una consecuencia importante del principio de incertidumbre es el hecho de que una partícula confinada en un espacio finito no puede tener energía cinética nula.

Consideremos el caso de una caja unidimensional de longitud L . Si sabemos que la partícula está en la caja, Δx no puede ser mayor que L . Esto implica que Δp es al menos \hbar/L (nos olvidamos del factor 2 ya que tan sólo buscamos una estimación). Tomamos la desviación estándar como una medida de Δp ,

$$(\Delta p)^2 = \overline{(p - \bar{p})^2} = \overline{p^2} - \bar{p}^2, \quad (3.30)$$

donde \bar{p} significa el promedio de p . Si la caja es simétrica, $\bar{p} = 0$ y, por tanto,

$$(\Delta p)^2 = \overline{p^2} \geq \left(\frac{\hbar}{L}\right)^2. \quad (3.31)$$

Lo que implica que el valor promedio de la energía cinética es

$$\bar{E} = \frac{\overline{p^2}}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{2mL^2} \quad (3.32)$$

De este modo, vemos que el principio de incertidumbre indica que la energía mínima de una partícula en una caja no puede ser cero. Esta energía mínima dada por la ecuación anterior se conoce con el nombre de **energía del punto cero**.

Ejemplo 3.10: Considérese una partícula pequeña pero macroscópica de masa $m = 10^{-6}$ g confinada en una caja unidimensional con $L = 10^{-6}$ m. Calcúlese su energía cinética y su correspondiente velocidad.

Solución.

$$\bar{E} = \frac{\hbar^2}{2mL^2} = \frac{(1.055 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{2 \times (10^{-9} \text{ kg}) \times (10^{-6} \text{ m})^2} = 5.57 \times 10^{-48} \text{ J} = 3.47 \times 10^{-29} \text{ eV}.$$

$$v = \sqrt{\frac{2\bar{E}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times (5.57 \times 10^{-48} \text{ J})}{10^{-9} \text{ kg}}} = 1.06 \times 10^{-19} \text{ m/s}. \quad \square$$

Ejemplo 3.11: Si la partícula en una caja unidimensional de $L = 0.1$ nm es un electrón, ¿cuál es su energía del punto cero?

Solución.

$$E = \frac{(\hbar c)^2}{2mc^2 L^2} = \frac{(197.3 \text{ eV} \cdot \text{nm})^2}{2 \times (0.511 \times 10^6 \text{ eV}) \times (0.1 \text{ nm})^2} = 3.81 \text{ eV}. \quad \square$$

Tamaño de un átomo de hidrógeno

Vamos a estimar el tamaño de un átomo de hidrógeno haciendo uso del principio de incertidumbre. La energía de un electrón de momento lineal p a una distancia r de un protón es

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{ke^2}{r}. \quad (3.33)$$

Si tomamos $\Delta x = r$, tendremos

$$(\Delta p)^2 = \overline{p^2} \geq \frac{\hbar^2}{r^2}. \quad (3.34)$$

La energía es por tanto

$$E = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{ke^2}{r}. \quad (3.35)$$

Hay un r_m para el cual E es mínima, es decir, para el cual $dE/dr = 0$. Es fácil demostrar que dicho radio viene dado por

$$r_m = \frac{\hbar^2}{ke^2m} \equiv a_0 = 0.0529 \text{ nm} \quad (3.36)$$

y la correspondiente energía mínima se expresa como

$$E_m = -\frac{k^2e^4m}{2\hbar^2} = -13.6 \text{ eV}. \quad (3.37)$$

Anchura de las rayas espectrales

El principio de incertidumbre energía-tiempo implica que la energía de un sistema no se puede medir exactamente a no ser que se utilice un tiempo infinito para la medida. Si un átomo está en un estado excitado, no permanece en este estado indefinidamente, sino que tiene lugar una transición a un estado de más baja energía hasta que alcanza el estado fundamental. El decaimiento de un estado excitado es un proceso estocástico.

Podemos tomar el tiempo medio para el decaimiento τ , llamado **tiempo de vida media**, como una medida del tiempo disponible para medir la energía del estado. Para transiciones atómicas, $\tau \sim 10^{-8}$ s. La incertidumbre en la energía será por tanto

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{\tau} = \frac{6.58 \times 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s}}{10^{-8} \text{ s}} \approx 10^{-7} \text{ eV}. \quad (3.38)$$

Esta incertidumbre causa una imprecisión $\Delta\lambda$ en la longitud de la luz emitida. Para transiciones al estado fundamental E_0 :

$$E - E_0 = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow dE = -hc \frac{d\lambda}{\lambda^2} \Rightarrow |\Delta E| \approx hc \frac{|\Delta\lambda|}{\lambda^2}, \quad (3.39)$$

y por tanto,

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{\Delta E}{E - E_0}. \quad (3.40)$$

La anchura en energías $\Delta E = \hbar/\tau$ recibe el nombre de **anchura natural** y se representa por Γ_0 . Otros efectos que causan una anchura en las rayas espectrales son el efecto Doppler, el retroceso de los átomos emisores y las colisiones atómicas.

Ejemplo 3.12: Un estado excitado de un átomo decae en un tiempo característico $\tau = 10^{-8}$ s. ¿Cuál es la incertidumbre mínima para la energía y la frecuencia del fotón emitido?

Solución. La incertidumbre mínima para la energía (o la anchura natural) es

$$\Gamma_0 = \frac{\hbar}{\tau} = \frac{6.58 \times 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s}}{10^{-8} \text{ s}} = 6.58 \times 10^{-8} \text{ eV}.$$

La correspondiente incertidumbre en la frecuencia la podemos calcular usando su relación con la energía: $\Delta E = \hbar\Delta f$ y el principio de incertidumbre energía-tiempo:

$$\Delta E \Delta t = \hbar \Delta f \Delta t \geq \hbar \Rightarrow \Delta f \geq \frac{1}{2\pi \Delta t} = \frac{1}{2\pi \times 10^{-8} \text{ s}} = 1.6 \times 10^7 \text{ Hz}. \quad \square$$

3.6 Bibliografía recomendada

Este capítulo está basado en las dos siguientes referencias:

- Capítulos 3 y 5 de “Modern Physics” (5th edition) de Tipler y Llewellyn, W.H. Freeman.
- Capítulo 34 de “Física para la ciencia y la tecnología, Vol. 2C” (5ª edición) de Tipler y Mosca, editorial Reverté.

En particular, el libro de Tipler y Llewellyn contiene una descripción muy detallada de los fenómenos que hemos descrito en la sección 3.1.

Dentro de los libros habituales de consulta en este curso, recomendamos para este tema:

- Capítulos 3 y 5 de “Modern Physics” (3rd edition) de R.A. Serway, C.J. Moses and C.A. Moyer, Thomson/Brook Cole (2005).
- Capítulo 36 de “Física”, M. Alonso y E.J. Finn, Pearson Educación (2000).

Un libro muy recomendable para todos los temas de física cuántica es:

- “Física Cuántica” de Robert Eisberg y Robert Resnick, editorial Limusa (1988).

Este libro tiene un nivel intermedio entre nuestro curso y los cursos especializados de mecánica cuántica. En particular, este libro contiene una discusión muy extensa de la radiación del cuerpo negro, del efecto fotoeléctrico y del efecto Compton (capítulos 1 y 2).

Finalmente, para aquellos que quieran profundizar en el tema de la radiación de fondo, recomendamos el libro de divulgación de George Smoot, premio Nobel de física en 2006 y uno de los responsables de la misión del satélite COBE:

- “Wrinkles in Time: Witness to the Birth of the Universe” de George Smoot y Keay Davidson, editorial Harper Perennial (2007).

3.7 Ejercicios del Capítulo 3

Cuestiones

- (1) Calcular λ_m para la radiación de cuerpo a (a) $T = 3$ K, (b) $T = 300$ K y (c) $T = 3000$ K.
- (2) Determinar la temperatura de un cuerpo negro si su espectro exhibe un pico en (a) $\lambda_m = 700$ nm (visible), (b) $\lambda_m = 3$ cm (microondas) y (c) $\lambda_m = 3$ m (ondas de radio FM).
- (3) Si la temperatura absoluta de un cuerpo negro se duplica, ¿en qué factor aumenta la correspondiente potencia emitida?
- (4) Dos fuentes de luz monocromática, A y B , emiten el mismo número de fotones por segundo. La longitud de onda de A es $\lambda_A = 400$ nm y la de B es $\lambda_B = 600$

- nm. La potencia radiada por la fuente B (a) es igual a la de la fuente A ; (b) es menor que la de la fuente A ; (c) es mayor que la de la fuente A ; (d) con los datos disponibles no puede compararse con la potencia de A .
- (5) Verdadero o falso: en el efecto fotoeléctrico (a) la corriente es proporcional a la intensidad de la luz incidente, (b) la función de trabajo de un metal depende de la frecuencia de la luz incidente, (c) la energía máxima de los electrones emitidos varía linealmente con la frecuencia de la luz incidente, (d) la energía del fotón es proporcional a su frecuencia.
- (6) En el efecto fotoeléctrico, el número de electrones emitidos por segundo es (a) independiente de la intensidad de la luz; (b) proporcional a la intensidad de la luz; (c) proporcional a la función de trabajo de la superficie emisora; (d) proporcional a la frecuencia de la luz.
- (7) La función de trabajo de una superficie es ϕ . La longitud de onda umbral para la emisión de los fotoelectrones de la superficie es (a) hc/ϕ ; (b) ϕ/hf ; (c) hf/ϕ ; (d) ninguno de los anteriores.
- (8) En un experimento se mide la longitud de onda de los fotones dispersados por efecto Compton en un ángulo de $\theta = 90^\circ$. Si el cociente $\Delta\lambda/\lambda$ es del 1%, ¿cuál es la longitud de onda del fotón incidente?
- (9) (a) Calcular la longitud de onda de Compton de un electrón y de un protón. (b) ¿Cuál es la energía de un fotón cuya longitud de onda es igual a la longitud de onda de Compton de (i) un electrón y (ii) un protón?
- (10) Si la longitud de onda de de Broglie de un electrón y un protón son iguales, (a) la velocidad del protón es mayor que la del electrón; (b) las velocidades del protón y del electrón son iguales; (c) la velocidad del protón es menor que la del electrón; (d) la energía del protón es mayor que la del electrón; (e) las afirmaciones (a) y (d) son correctas.
- (11) Un protón y un electrón tienen energías cinéticas iguales. En consecuencia, la longitud de onda de de Broglie del protón es (a) mayor que la del electrón; (b) igual que la del electrón; (c) menor que la del electrón.
- (12) Hallar la energía en julios y electrón-voltios de los fotones correspondientes a (a) una onda electromagnética en la banda de radio de FM de frecuencia 100 MHz y (b) a una banda de radio AM de 900 kHz.
- (13) ¿Cuál es la frecuencia de un fotón de energía (a) 1 eV, (b) 1 keV y (c) 1 MeV?
- (14) La longitud de onda emitida por un láser He-Ne de 3 mW es 632 nm. Si el diámetro del haz láser es 1.0 mm, ¿cuál es la densidad de fotones del haz?
- (15) Calcular la longitud de onda de de Broglie para un electrón de energía cinética (a) 2.5 eV, (b) 250 eV, (c) 2.5 keV y (d) 25 keV.
- (16) Un neutrón térmico en un reactor tiene una energía cinética próxima a 0.02 eV. Calcular la longitud de onda de de Broglie teniendo en cuenta que la energía en reposo del neutrón es $mc^2 = 940$ MeV.
- (17) Un neutrón posee una energía cinética de 10 MeV. ¿Qué tamaño debería tener un objeto para observar efectos de difracción de neutrones? ¿Existe algo en la

naturaleza de este tamaño para poner de manifiesto la naturaleza ondulatoria de estos neutrones?

- (18) Para localizar una partícula, como por ejemplo un electrón, dentro de un rango de 5×10^{-12} m usando ondas electromagnéticas, la longitud de onda debe ser al menos de ese tamaño. Calcular el momento y la energía de un fotón con $\lambda = 5 \times 10^{-12}$ m. Si la partícula es un electrón con $\Delta x = 5 \times 10^{-12}$ m, ¿cuál es la correspondiente incertidumbre en el momento lineal?

Problemas

- (19) (a) La temperatura de la piel humana es aproximadamente 35°C . ¿Cuál es la longitud de onda a la que aparece el pico en la radiación emitida por la piel? (b) ¿Cuál es la potencia total radiada por unidad de área por un filamento de tungsteno a una temperatura de 3000 K. (Suponer que el filamento emite radiación como un cuerpo negro.) (c) Si el filamento de tungsteno de una bombilla es de 75 W, ¿cuál es la superficie del filamento? (Suponer que la pérdida principal de energía se debe a la radiación.)
- (20) (a) Demostrar que la ley de Planck expresada en términos de la frecuencia f viene dada por:

$$u(f) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{hf^3}{e^{hf/k_B T} - 1}.$$

- (b) Representar gráficamente la función de distribución de densidad de energía $u(f)$ para la temperatura de la radiación de fondo de microondas ($T = 2.725$ K). (c) ¿Cuál es la longitud de onda a la cual tiene lugar el máximo de la intensidad del espectro de la radiación de fondo? (d) ¿Cuál es la frecuencia correspondiente? (e) ¿Cuál es la potencia total de la radiación de fondo que incide sobre la tierra?
- (21) La energía que alcanza la parte superior de la atmósfera de la tierra procedente del Sol es de 1.36×10^3 W/m², que recibe el nombre de *constante solar*. Suponiendo que la tierra irradia como un cuerpo negro, ¿qué podemos concluir acerca de la temperatura de equilibrio de la tierra?
- (22) Determinar la fracción de energía irradiada por el Sol en la región del visible (400-700 nm). Supóngase que la temperatura de la superficie del Sol es de 5800 K.
- (23) Al iluminar una superficie con luz de 780 nm de longitud de onda, se emiten electrones cuya energía cinética máxima es de 0.37 eV. ¿Cuál sería la energía cinética máxima si se iluminara con luz de 410 nm de longitud de onda?
- (24) Cuando luz de 450 nm de longitud de onda incide sobre una superficie de potasio se emiten electrones con una energía cinética de 0.52 eV. Si se cambia la longitud de onda de la luz incidente a 300 nm, la energía cinética de los electrones expulsados es de 1.90 eV. Usando únicamente estos números y el valor de la velocidad de la luz, (a) encontrar el valor de la función de trabajo

- del potasio y (b) calcular el valor de la constante de Planck.
- (25) Un electrón y un positrón se mueven el uno hacia el otro con la misma velocidad de 3×10^6 m/s. Las dos partículas se aniquilan produciendo dos fotones de la misma energía. (a) ¿Cuáles eran las longitudes de De Broglie del electrón y del positrón? (b) Determinar la energía, momento y longitud de onda de cada fotón.
- (26) Un fotón de rayos X, cuya longitud de onda es 6 pm, tiene una colisión frontal con un electrón, de manera que sufre una dispersión con un ángulo de 90° . (a) ¿Qué cambio se produce en la longitud de onda del fotón? (b) ¿Cuál es la energía cinética del electrón dispersado?
- (27) Los rayos γ emitidos por un núcleo radiactivo también exhiben el efecto Compton. Supongamos que un fotón de 0.511 MeV procedente de la aniquilación de un par electrón-positrón es dispersado por un electrón libre con un ángulo de 110° . ¿Cuáles son las energías del fotón dispersado y del electrón después del choque? ¿En qué dirección retrocede el electrón con respecto a la dirección del fotón incidente?
- (28) En una colisión Compton con un electrón, un fotón de luz violeta ($\lambda = 400$ nm) es dispersado hacia atrás con un ángulo de 180° . (a) ¿Cuánta energía (en eV) se transfiere al electrón en esta colisión? (b) Comparar este resultado con la energía que adquiriría este electrón en un proceso fotoeléctrico con el mismo fotón. (c) ¿Podría la luz violeta expulsar electrones de un metal por colisión Compton? Explicar la respuesta.
- (29) Demostrar que la máxima energía cinética K , conocida como *límite de Compton*, que un electrón puede tener tras una dispersión Compton está dada por

$$K = \frac{hf}{1 + mc^2/2hf},$$

donde f es la frecuencia del fotón incidente.

- (30) Un electrón, un protón y una partícula alfa (el núcleo de un átomo de helio) tienen, cada uno de ellos, una energía cinética de 150 keV. Hallar (a) sus momentos y (b) sus longitudes de onda de De Broglie.
- (31) Para “observar” objetos pequeños se mide la difracción de partículas cuya longitud de De Broglie es comparable al tamaño del objeto. Determinar la energía cinética (en eV) necesaria para que los electrones resuelvan (a) una gran molécula orgánica con un tamaño de 10 nm, (b) detalles de la estructura atómica (0.1 nm) y (c) un núcleo de 10 fm de diámetro (1 fm = 10^{-15} m). Repetir el cálculo usando partículas alfa en lugar de electrones. Nota: la masa de una partícula alfa es de aproximadamente $4u$, donde $uc^2 = 931.5$ MeV (u es la llamada unidad de masa unificada).
- (32) Los protones y neutrones en un núcleo se mantienen ligados mediante el intercambio de piones (o mesones π). Esto es posible sin violar la conservación de la energía, siempre y cuando el pión sea reabsorbido en un tiempo consistente con el principio de incertidumbre de Heisenberg. Consideremos la reacción

de emisión $p \rightarrow p + \pi$, donde $m_\pi = 135 \text{ MeV}/c^2$. (a) Ignorando la energía cinética, ¿por cuánto se viola el principio de conservación de la energía en esta reacción? (b) ¿En qué intervalo de tiempo debe ser absorbido el pión para no violar la conservación de la energía?

- (33) (a) Considérese una partícula de masa m restringida a moverse en una dimensión entre dos barreras infinitas separadas por una distancia L . Utilice el principio de incertidumbre para obtener una expresión para la energía del punto cero (o energía mínima) de la partícula. (b) Usando el resultado del apartado anterior, calcular la energía mínima de un electrón en dicho espacio si $L = 10^{-10} \text{ m}$ y $L = 1 \text{ cm}$. (c) Calcular la energía del punto cero para un abalorio (o cuenta) de un ábaco de 0.1 g moviéndose en un cable fino entre dos extremos separados por 2 cm .
- (34) Un protón y una bala de 10 g se mueven con una velocidad de 500 m/s , medida con una incertidumbre del 0.01% . Si se realizan medidas de sus posiciones de forma simultánea a sus medidas de la velocidad, ¿cuál es la mínima incertidumbre posible en las medidas de las posiciones?
- (35) Un mesón π^0 es una partícula inestable que se produce en colisiones de partículas a altas energías. Su energía en reposo es de 135 MeV y su vida media es de sólo $8.7 \times 10^{-17} \text{ s}$ antes de desintegrarse en dos rayos γ . Estimar la incertidumbre relativa $\Delta m/m$ en la determinación de su masa.

Problemas avanzados

- (36) Para algunas partículas fundamentales es posible violar la conservación de la energía creando y reabsorbiendo rápidamente otra partícula. Por ejemplo, un protón puede emitir un π^+ de acuerdo a la reacción $p \rightarrow n + \pi^+$, donde n corresponde a un neutrón. El π^+ tiene una masa de $140 \text{ MeV}/c^2$. La reabsorción debe ocurrir en un intervalo de tiempo Δt consistente con el principio de incertidumbre. (a) Ignorando la energía cinética, ¿por cuánto se viola la conservación de la energía? (b) ¿Durante cuánto tiempo puede existir el π^+ ? (c) Suponiendo que el π^+ se mueva a casi la velocidad de la luz, ¿qué distancia puede recorrer en el intervalo de tiempo Δt ? (Esta es una estimación del alcance de la interacción nuclear fuerte.) (d) Suponiendo que tan pronto como se reabsorbe el pión se emite otro, ¿cuántos piones se podrían detectar en un intervalo de tiempo de $1 \mu\text{s}$?
- (37) El objetivo de este problema es derivar la ley de Wien a partir de la ley de Planck. (a) Demostrar que la distribución de densidad de energía se puede escribir como $u = C\lambda^{-5}(e^{a/\lambda} - 1)^{-1}$, donde C es una constante y $a = hc/k_B T$. (b) Demostrar que el valor de λ para el cual se cumple que $du/d\lambda = 0$ satisface la ecuación $5\lambda(1 - e^{-a/\lambda}) = a$. (c) Esta ecuación trascendente se puede resolver mediante prueba y error. Intentar una solución $\lambda = \alpha a$ para varios valores de α hasta determinar el cociente λ/a con cuatro cifras significativas. (d) Demostrar

que la solución obtenida en el apartado (c) implica $\lambda_m T = \text{constante}$ y calcular el valor de la constante.

- (38) El objetivo de este problema es estimar el retraso de tiempo del efecto fotoeléctrico (esperado clásicamente, pero no observado). Sea 0.01 W/m^2 la intensidad de la radiación incidente. (a) Si el área del átomo es 0.01 nm^2 , hallar la energía por segundo que incide en un átomo. (b) Si la función de trabajo es 2 eV , ¿cuánto tiempo se tardará según la teoría clásica en hacer incidir esta energía sobre un átomo?
- (39) (a) Demostrar que la relación relativista entre la longitud de onda de de Broglie, λ , de una partícula y su correspondiente energía cinética, K , viene dada por

$$\lambda/\lambda_c = \frac{1}{[2(K/E_0) + (K/E_0)^2]^{1/2}},$$

donde $\lambda_c = h/mc$ es la longitud de onda de Compton y E_0 es la energía en reposo de la partícula. (b) Demostrar que esta expresión se reduce al resultado no-relativista en el límite de bajas velocidades. (c) Representar gráficamente la longitud de onda frente a la energía cinética para electrones y protones y comparar el resultado clásico con el relativista.

Capítulo 4

Mecánica cuántica II: la ecuación de Schrödinger

Este capítulo está dedicado a la ecuación de Schrödinger que describe las ondas de materia (de forma no relativista) y que constituye el resultado central de la mecánica cuántica. Por cuestiones de simplicidad matemática, nos centraremos en el análisis de problemas unidimensionales y discutiremos la solución de esta ecuación en algunas situaciones de especial interés.

4.1 La ecuación de Schrödinger en una dimensión

Aunque podríamos postular la ecuación de Schrödinger, vamos a tratar de motivarla. Para ello vamos a considerar la ecuación de ondas para los fotones. La ecuación de ondas que describe el campo eléctrico en el vacío y en una dimensión $E(x, t)$ se escribe como

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}, \quad (4.1)$$

donde c es la velocidad de la luz. Esta ecuación admite una solución armónica de la forma: $E(x, t) = E_0 \cos(kx - \omega t)$. Existe una relación entre k y ω que se puede obtener substituyendo esta solución en la ec. (4.1). Para ello calculamos las derivadas segundas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= -\omega^2 E_0 \cos(kx - \omega t) = -\omega^2 E(x, t), \\ \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= -k^2 E(x, t). \end{aligned}$$

Substituyendo en la ecuación de ondas obtenemos que

$$-k^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow \omega = kc. \quad (4.2)$$

Usando $\omega = E/\hbar$ y $p = \hbar k$ para la radiación electromagnética, se obtiene que

$$E = pc, \quad (4.3)$$

que es la relación relativista entre energía y momento de un fotón.

Ahora usemos las relaciones de de Broglie para una partícula como el electrón para encontrar la relación entre ω y k . Podemos usar esta relación para obtener una idea de qué aspecto tiene la ecuación de ondas en el caso de la materia. La energía total (no relativista) de una partícula de masa m es

$$E = \frac{p^2}{2m} + V, \quad (4.4)$$

donde V es la energía potencial. Substituyendo las relaciones de de Broglie obtenemos que

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V. \quad (4.5)$$

Esto difiere de la ec. (4.1) para un fotón ya que tiene la energía potencial V y ω no varía linealmente con k . Nótese que obtenemos un factor ω al derivar la función armónica con respecto al tiempo y un factor k cuando derivamos con respecto a la posición. De este modo, esperamos que la ecuación de ondas relacione una derivada primera con respecto al tiempo con una derivada segunda con respecto al espacio.

Finalmente, requerimos que la ecuación de ondas para electrones (u otras partículas materiales) sea una ecuación diferencial lineal en la función de onda $\Psi(x, t)$. Esto asegura que si $\Psi_1(x, t)$ y $\Psi_2(x, t)$ son soluciones para el mismo potencial, entonces una combinación arbitraria de estas dos soluciones, $\Psi(x, t) = a_1\Psi_1(x, t) + a_2\Psi_2(x, t)$, es también una solución con a_1 y a_2 constantes arbitrarias. La linealidad de la ecuación garantiza que las funciones de onda se combinen para producir las interferencias, que hemos visto que caracterizan a las ondas de materia, al igual que a cualquier fenómeno ondulatorio.

4.1.1 La ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

En una dimensión, la ecuación de Schrödinger que describe la dinámica de una partícula de masa m sometida a un potencial $V(x, t)$ adopta la forma

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x, t)\Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}} \quad (4.6)$$

A esta ecuación se la conoce con el nombre de **ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo**.

Ahora mostraremos que para el caso especial de una partícula libre, esta ecuación admite soluciones armónicas. Así pues, supongamos que $V(x, t) = V_0$ y busquemos dichas soluciones armónicas. Se puede ver fácilmente que ni $\cos(kx - \omega t)$ ni $\sin(kx - \omega t)$ son soluciones. Sin embargo, la función exponencial compleja sí que lo es:

$$\Psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} = A[\cos(kx - \omega t) + i\text{sen}(kx - \omega t)], \quad (4.7)$$

donde A es una constante. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} &= -i\omega Ae^{i(kx - \omega t)} = -i\omega \Psi(x, t), \\ \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} &= (ik)^2 Ae^{i(kx - \omega t)} = -k^2 \Psi(x, t). \end{aligned}$$

Substituyendo en la ecuación de Schrödinger con $V(x, t) = V_0$ se obtiene que

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(-k^2)\Psi(x, t) + V_0\Psi(x, t) = i\hbar(-i\omega)\Psi(x, t) \Rightarrow \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V_0 = \hbar\omega, \quad (4.8)$$

es decir, se recupera la ec. (4.5), como era de esperar.

Nótese que la función de onda es una función compleja. Recordemos además la interpretación de la función de onda que nos dice que

$$P(x, t)dx = \Psi^*(x, t)\Psi(x, t)dx = |\Psi(x, t)|^2 dx \quad (4.9)$$

es la probabilidad de encontrar un electrón entre x y $x + dx$. Recordemos también la condición de normalización:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1. \quad (4.10)$$

4.1.2 La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

Cuando el potencial V es independiente del tiempo las dependencias espacial y temporal de la función de onda se pueden separar, lo que simplifica enormemente la ecuación de Schrödinger. La separación se consigue con el siguiente Ansatz:

$$\boxed{\Psi(x, t) = \psi(x)\phi(t)} \quad (4.11)$$

Substituyendo en la ecuación de Schrödinger tenemos que

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2(\psi(x)\phi(t))}{\partial x^2} + V(x)\psi(x)\phi(t) &= i\hbar \frac{\partial(\psi(x)\phi(t))}{\partial t}, \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \phi(t) \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x)\phi(t) &= i\hbar\psi(x) \frac{d\phi(t)}{dt}. \end{aligned}$$

Dividiendo por $\psi(x)\phi(t)$ se tiene que

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x) = i\hbar \frac{1}{\phi(t)} \frac{d\phi(t)}{dt}. \quad (4.12)$$

Nótese que en la ecuación anterior en el miembro de la izquierda sólo hay funciones que dependen de x , mientras que en la derecha todo depende únicamente de t . De este modo, la única posibilidad de satisfacer esta ecuación es que ambos miembros sean iguales a la misma constante:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x) = C \quad (4.13)$$

$$i\hbar \frac{1}{\phi(t)} \frac{d\phi(t)}{dt} = C. \quad (4.14)$$

Resolvamos primero la segunda ecuación:

$$\frac{d\phi(t)}{\phi(t)} = \frac{C}{i\hbar} dt = -i \frac{C}{\hbar} dt. \quad (4.15)$$

La solución de esta ecuación adopta la forma

$$\phi(t) = e^{-iCt/\hbar} = \cos(Ct/\hbar) - i\text{sen}(Ct/\hbar) = \cos(2\pi Ct/h) - i\text{sen}(2\pi Ct/h). \quad (4.16)$$

Vemos pues, que $\phi(t)$ describe una oscilación con frecuencia $f = C/h$. De acuerdo con la relación de de Broglie $f = E/h$ y, por tanto, concluimos que $C = E$. De este modo, llegamos a que la dependencia en el tiempo de la función de onda viene descrita por

$$\phi(t) = e^{-iEt/\hbar}. \quad (4.17)$$

Con este resultado la ec. (4.13) se convierte en

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)} \quad (4.18)$$

que se conoce como la **ecuación de Schrödinger independiente del tiempo**. El resto de este capítulo estará dedicado a resolver esta ecuación en diversas situaciones.

La condición de normalización de $\Psi(x, t)$ se puede escribir exclusivamente en términos de ψ ya que

$$\Psi^*(x, t)\Psi(x, t) = \psi^*(x)e^{iEt/\hbar}\psi(x)e^{-iEt/\hbar} = \psi^*(x)\psi(x) \quad (4.19)$$

y por tanto,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\psi(x)dx = 1} \quad (4.20)$$

4.1.3 Condiciones para una función de onda válida

La forma de la función de onda $\psi(x)$ que satisface la ec. (4.18) depende de la forma de la función energía potencial $V(x)$. En las próximas secciones estudiaremos algunos problemas de especial importancia. En estos ejemplos, los potenciales serán aproximaciones a los potenciales reales, es decir, serán simplificaciones que nos faciliten los cálculos. En algunos casos que veremos, la pendiente de la función $V(x)$ puede ser discontinua. El procedimiento a seguir en tales casos será resolver la ecuación de Schrödinger en las diversas regiones y después impondremos que las soluciones se unan de forma suave en las puntos donde ocurran las discontinuidades.

Como la probabilidad de encontrar una partícula no puede variar de forma discontinua de un punto a otro, la función de onda $\psi(x)$ debe de ser continua. Por otra parte, como la ecuación de Schrödinger involucra la derivada segunda $d^2\psi/dx^2$, la derivada primera debe de ser continua. En el caso especial en el que el potencial $V(x)$ sea infinito en una cierta región del espacio, esta restricción no se aplica. Como ninguna partícula puede tener energía potencial infinita, $\psi(x)$ debe de ser cero en las regiones en las que $V(x)$ se haga infinito. En la frontera de dichas regiones, la derivada $d\psi/dx$ puede ser discontinua.

Si $\psi(x)$ o $d\psi/dx$ no fueran finitas o univaluadas, la cantidades medibles no estarían bien definidas (esto quedará claro en las próximas secciones). Una restricción final es que la función de onda satisfaga la condición de normalización, para lo cual

$\psi(x)$ debe tender a cero suficientemente rápido cuando $x \rightarrow \pm 0$. Para futuras referencias, a continuación resumimos las diversas propiedades que una función de onda debe satisfacer para que sea aceptable físicamente:

- (1) $\psi(x)$ debe satisfacer la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo [(ec. (4.18)].
- (2) $\psi(x)$ y $d\psi(x)/dx$ deben ser continuas.
- (3) $\psi(x)$ y $d\psi(x)/dx$ deben ser finitas.
- (4) $\psi(x)$ y $d\psi(x)/dx$ deben ser univaluadas.
- (5) $\psi(x) \rightarrow 0$ suficientemente rápido cuando $x \rightarrow \pm 0$, de modo que la integral de la ec. (4.20) permanezca acotada.

Ejemplo 4.1: Demostrar que para una partícula libre de masa m moviéndose en una dimensión, la función $\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx$ es una solución de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para cualquier valor de las constantes A y B .

Solución. Para una partícula libre $V(x) = 0$ (o constante) y el correspondiente momento lineal viene dado por $p = \hbar k = \sqrt{2mE}$, donde E es la energía. Derivando la función $\psi(x)$ se obtiene

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = kA \cos kx - kB \sin kx,$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k^2 A \sin kx - k^2 B \cos kx = -k^2 (A \sin kx + B \cos kx) = -k^2 \psi(x).$$

Substituyendo en la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} [(-k^2)(A \sin kx + B \cos kx)] = E(A \sin kx + B \cos kx),$$

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi(x) = E\psi(x).$$

Como $\hbar^2 k^2 = 2mE$, se tiene que $E\psi(x) = E\psi(x)$, como queríamos demostrar. \square

4.2 Partícula en un pozo de potencial infinito

Supongamos que una partícula de masa m está sometida al siguiente potencial:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < L \\ \infty & \text{si } x < 0 \text{ ó } x > L \end{cases} \quad (4.21)$$

Esta función energía potencial está representada en la Fig. 4.1.

Ya que el potencial es infinito fuera del pozo, la función de onda debe anularse en esa región. Así pues, tenemos que resolver la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo en la región $0 < x < L$ con las condiciones de contorno

$$\psi(x) = 0 \text{ si } x = 0, L. \quad (4.22)$$

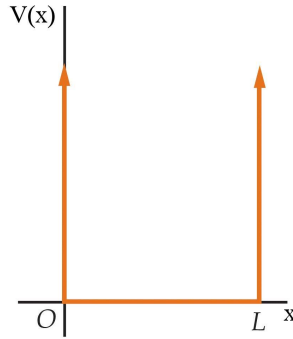


Fig. 4.1 Energía potencial del pozo rectangular infinito. Para $x < 0$ y $x > L$, la energía potencial $V(x)$ es infinita. La partícula está confinada en la región del pozo $0 < x < L$.

Nuestro objetivo es resolver la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x), \quad (4.23)$$

es decir,

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = -k^2\psi(x), \quad (4.24)$$

donde $k^2 = (p/\hbar)^2 = 2mE/\hbar^2$. La ecuación anterior tiene soluciones del tipo $\psi(x) = A \operatorname{sen} kx$ y $\psi(x) = B \operatorname{cos} kx$, donde A y B son constantes. Las condiciones de contorno no se pueden satisfacer con la función $\operatorname{cos} kx$. Así pues, nos quedamos con la función seno que cumple $\psi(0) = 0$ e imponemos

$$\psi(L) = A \operatorname{sen} kL = 0, \quad (4.25)$$

lo que implica que los valores posibles de k vienen dados por

$$k_n L = n\pi \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.26)$$

Si escribimos el número de onda k en términos de la longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$, vemos que se obtiene la condición

$$\lambda_n = 2L/n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.27)$$

que son también las longitudes de onda permitidas para una cuerda vibrante.

Las correspondientes energías viene dadas por

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = n^2 \left(\frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \right) = n^2 E_1, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.28)$$

Aquí $E_1 = \hbar^2 \pi^2 / (2mL^2)$ es la energía del estado de más baja energía, conocido como *estado fundamental*. El esquema de niveles descrito por la ecuación anterior está representado en la Fig. 4.2.

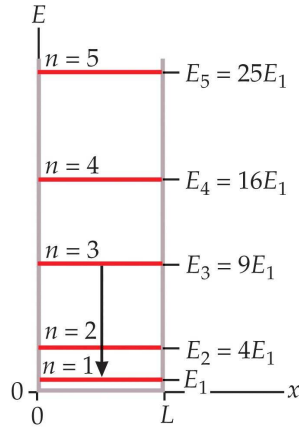


Fig. 4.2 Diagrama de niveles de energía de una partícula dentro de un potencial del pozo infinito.

La constante A de la función de onda se determina a través de la condición de normalización:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x)\psi_n(x)dx = \int_0^L A_n^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = A_n^2 \frac{L}{2} = 1 \quad (4.29)$$

Con lo cual $A_n = \sqrt{2/L}$ y las funciones de onda se escriben finalmente como

$$\boxed{\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots} \quad (4.30)$$

A las funciones $\psi_n(x)$ se las llama *autofunciones* y al número n se lo conoce como *número cuántico*. Este número especifica tanto la energía como la función de onda. Las autofunciones para $n = 1, 2, 3$ están representadas en la Fig. 4.3.

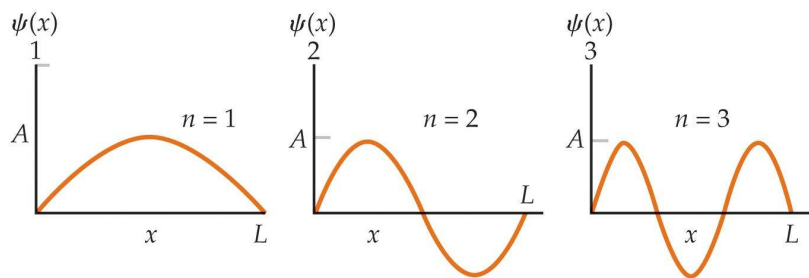


Fig. 4.3 Funciones de onda estacionarias para un pozo de potencial infinito para $n = 1, 2, 3$.

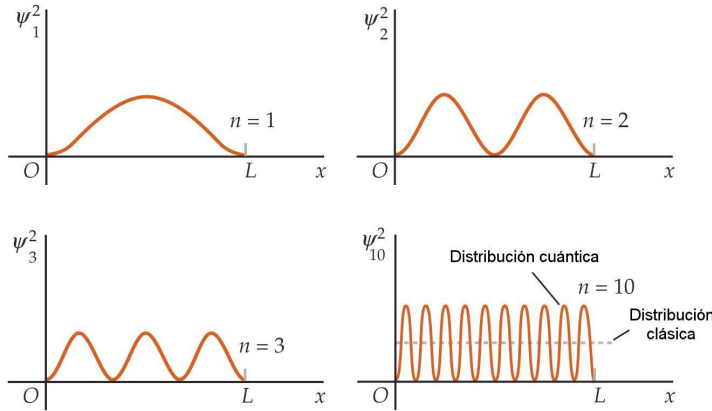


Fig. 4.4 Ilustración del principio de correspondencia de Bohr para el caso de un pozo de potencial infinito. Las distribuciones de probabilidad clásica y cuántica coinciden cuando el número cuántico n es muy grande.

Comparación con los resultados clásicos: principio de correspondencia de Bohr

Comparemos ahora nuestra solución mecano-cuántica con la solución clásica de este problema. En mecánica clásica, si conocemos el potencial $V(x)$, también podemos encontrar la fuerza via $F_x = -dV(x)/dx$ y la correspondiente aceleración $a_x = d^2x/dt^2$ gracias a la segunda ley de Newton. Entonces, podemos encontrar la posición x como función del tiempo, si conocemos la posición y velocidad inicial. En este problema no hay fuerza cuando la partícula está entre las paredes donde $V = 0$. La partícula se mueve, por tanto, con velocidad constante. De este modo, clásicamente la probabilidad de encontrar la partícula en una posición x está dada por una densidad de probabilidad constante:

$$P_C(x) = \frac{1}{L}. \quad (4.31)$$

Este resultado es muy distinto al resultado cuántico. Este último sólo se parece al clásico para números cuánticos muy altos ($n \gg 1$):

$$[\psi_n^2(x)]_{\text{promedio}} = \left[\frac{2}{L} \sin^2 k_n x \right]_{\text{promedio}} = \frac{2}{L} \frac{1}{2} = \frac{1}{L}. \quad (4.32)$$

El resultado de esta discusión está ilustrado en la Fig. 4.4.

Este resultado es un ejemplo de lo que se conoce con el nombre de **principio de correspondencia de Bohr** que nos dice que:

En el límite de números cuánticos muy grandes, los cálculos clásico y cuántico dan el mismo el resultado.

La función de onda completa

La función de onda completa, incluyendo la dependencia temporal, se obtiene multiplicando la parte espacial por $\exp(-i\omega_n t) = \exp(-iE_n t/\hbar)$, donde $\omega_n = E_n/\hbar = n^2\hbar^2\pi^2/(2mL^2)$. Por tanto,

$$\Psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} k_n x e^{-i\omega_n t}. \quad (4.33)$$

Usando la identidad

$$\operatorname{sen} k_n x = \frac{e^{ik_n x} - e^{-ik_n x}}{2i} \quad (4.34)$$

podemos escribir las funciones de onda como

$$\Psi_n(x, t) = \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2}{L}} \left[e^{i(k_n x - \omega_n t)} - e^{-i(k_n x + \omega_n t)} \right]. \quad (4.35)$$

Estas funciones de onda coinciden con las ondas estacionarias clásicas de una cuerda vibrante.

Ejemplo 4.2: Consideremos un electrón en el estado fundamental de un pozo de potencial infinito. (a) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar al electrón en la región $0 < x < L/4$? (b) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar al electrón en una región muy estrecha de anchura $\Delta x = 0.01L$ centrada en $x = 5L/8$?

Solución. (a) La función de onda para $n = 1$ es $\psi_1(x) = \sqrt{2/L} \operatorname{sen}(\pi x/L)$. Por tanto, la probabilidad que buscamos viene dada por

$$\int_0^{L/4} P_1(x) dx = \int_0^{L/4} \frac{2}{L} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx.$$

Haciendo el cambio de variable $u = \pi x/L$ la integral anterior se convierte en

$$\int_0^{\pi/4} \frac{2}{\pi} \operatorname{sen}^2 u du = \frac{2}{\pi} \left(\frac{u}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2u}{4} \right)_0^{\pi/4} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) \approx 0.091.$$

(b) Como en este caso la región es muy estrecha, la probabilidad P se puede aproximar por

$$P \approx P(x)\Delta x = \frac{2}{L} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \Delta x.$$

Como $\Delta x = 0.01L$ y $x = 5L/8$, tenemos que $P = 0.017$. \square

Ejemplo 4.3: (a) Encontrar la energía de un electrón en el estado fundamental de un pozo de potencial infinito de anchura $L = 0.1$ nm. (b) Construir un diagrama de energía y determinar las longitudes de onda de los fotones emitidos por todas las transiciones desde el estado $n = 3$ o inferiores hasta el estado de más baja energía.

Solución. (a) La energía del estado fundamental viene dada por

$$E_1 = \frac{(hc)^2}{8mc^2L^2} = \frac{(1240 \text{ eV} \cdot \text{nm})^2}{8 \times (5.11 \times 10^5 \text{ eV}) \times (0.1 \text{ nm})^2} = 37.6 \text{ eV}.$$

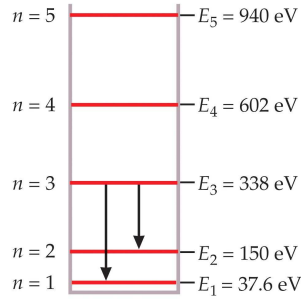


Fig. 4.5 Ejemplo 4.3.

(b) Los niveles de energía vienen dados por $E_n = n^2 E_1 = n^2 (37.6 \text{ eV})$. Este esquema de niveles está ilustrado en Fig. 4.5.

Los cambios de energía involucrados en las transiciones que buscamos y las correspondientes longitudes de onda de los fotones emitidos en dichas transiciones están dados por

$$\Delta E_{3 \rightarrow 2} = 338.4 \text{ eV} - 150.4 \text{ eV} = 188.0 \text{ eV} \Rightarrow \lambda_{3 \rightarrow 2} = \frac{hc}{\Delta E_{3 \rightarrow 2}} = 6.60 \text{ nm},$$

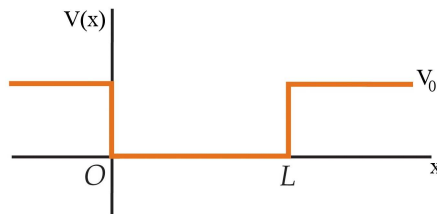
$$\Delta E_{3 \rightarrow 1} = 300.8 \text{ eV} \Rightarrow \lambda_{3 \rightarrow 1} = 4.12 \text{ nm},$$

$$\Delta E_{2 \rightarrow 1} = 112.8 \text{ eV} \Rightarrow \lambda_{2 \rightarrow 1} = 11.0 \text{ nm}.$$

□

4.3 Pozo de potencial finito

La cuantización de la energía que hemos determinado para una partícula en un pozo infinito puede deducirse de la solución general de la ecuación de Schrödinger para cualquier partícula confinada en una región del espacio. En efecto, consideraremos el comportamiento cualitativo de la función de onda para un función de energía potencial algo más realista, el pozo rectangular finito que se muestra en la Fig. 4.6.

Fig. 4.6 Energía potencial de un pozo rectangular finito de anchura L y altura V_0 .

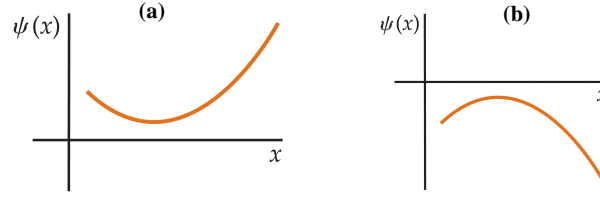


Fig. 4.7 (a) Una función de onda positiva con curvatura positiva. (b) Una función de onda negativa con curvatura negativa.

Estamos interesados en energías por debajo de la altura del pozo, es decir, $E < V_0$. Dentro del pozo ($0 < x < L$) la ecuación de Schrödinger se escribe como

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x), \quad (4.36)$$

o bien

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) = 0, \quad (4.37)$$

donde $k^2 = 2mE/\hbar^2$. La solución general de esta ecuación diferencial es de la forma

$$\psi(x) = A \operatorname{sen} kx + B \operatorname{cos} kx. \quad (4.38)$$

En este caso, $\psi(x)$ no es necesariamente cero para $x = 0$ y, por tanto, B no es cero. Fuera del pozo, la ecuación de Schrödinger es

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V_0\psi(x) = E\psi(x), \quad (4.39)$$

o bien

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \alpha^2\psi(x) = 0, \quad (4.40)$$

donde $\alpha^2 = 2m(V_0 - E)/\hbar^2 > 0$.

Las energías permitidas y las funciones de onda para la partícula pueden determinarse resolviendo la ec. (4.40) para $\psi(x)$ fuera del pozo e imponiendo la continuidad de $\psi(x)$ y $d\psi(x)/dx$ en $x = 0$ y $x = L$. La solución de la ec. (4.40) no es difícil (para valores positivos de x es de la forma $\psi(x) = Ce^{-\alpha x}$), pero la aplicación de las condiciones de contorno implica operaciones laboriosas de álgebra y no es importante para nuestro objetivo. La característica más importante de la ec. (4.40) es que la derivada segunda de $\psi(x)$, relacionada con la curvatura de la función de onda, posee el mismo signo que la función de onda. Si ψ es positiva, $d^2\psi/dx^2$ también es positiva y la función de onda se curva alejándose del eje como se indica en la Fig. 4.7(a). De igual modo, si ψ es negativa, $d^2\psi/dx^2$ es negativa y ψ se curva alejándose esta vez del eje como se indica en la Fig. 4.7(b). Este comportamiento es muy distinto del que tiene lugar dentro del pozo, donde ψ y $d^2\psi/dx^2$ tienen signos opuestos y ψ se curva siempre hacia el eje como una función seno o coseno. Debido a este comportamiento fuera del pozo, para la mayoría de los valores de la energía E

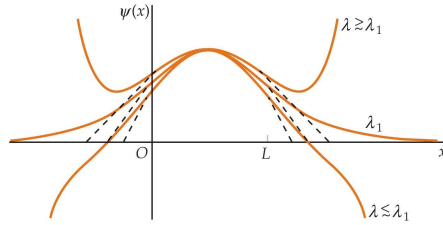


Fig. 4.8 Funciones que satisfacen la ecuación de Schrödinger con longitudes de onda próximas a λ_1 , que corresponde a la energía del estado fundamental E_1 del pozo finito. Si λ es ligeramente mayor que λ_1 , la función tiende a infinito. Si λ es ligeramente menor que λ_1 , la función cruza el eje x mientras la pendiente es todavía negativa. La pendiente se hace entonces más negativa porque $d^2\psi/dx^2$ es ahora negativa. Esta función tiende a un infinito negativo cuando x tiende a infinito.

en la ec. (4.40), $\psi(x)$ se hace infinito cuando x se aproxima a $\pm\infty$, es decir, la mayor parte de las funciones de onda $\psi(x)$ no se comportan bien fuera del pozo. Aunque satisfacen la ecuación de Schrödinger, no son funciones de onda genuinas, ya que no pueden normalizarse. Las soluciones de la ecuación de Schrödinger se comportan correctamente (es decir, se aproximan a 0 cuando $|x|$ se hace muy grande) sólo para ciertos valores de la energía. Estos valores de la energía se corresponden con las energías permitidas para el pozo rectangular finito.

La Fig. 4.8 muestra la función de onda correspondiente a la energía del estado fundamental que se comporta correctamente con una longitud de onda λ_1 dentro del pozo. El comportamiento de las funciones de onda correspondientes a longitudes de onda y energías próximas se muestra también en la figura. Las funciones de onda y las distribuciones de probabilidad para el estado fundamental y los dos primeros estados excitados se representan en Fig. 4.9. En esta figura podemos ver que las longitudes de onda dentro del pozo son ligeramente mayores a las correspondientes al pozo infinito de modo que las energías son ligeramente menores que las del pozo infinito. Otra característica del problema del pozo finito es que existe sólo un número finito de energías permitidas. Para valores muy pequeños de V_0 , existe sólo una energía permitida.

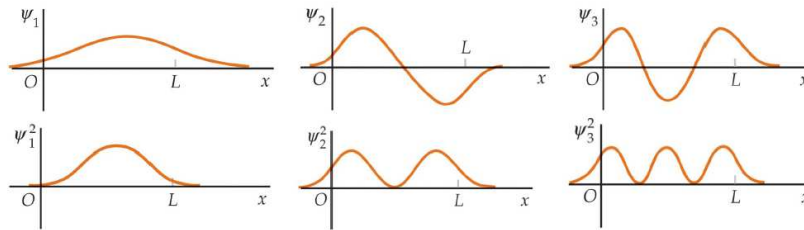


Fig. 4.9 Funciones de onda $\psi_n(x)$ y distribuciones de probabilidad $\psi^2(x)$ para $n = 1, 2, 3$ correspondientes a un pozo rectangular finito.

Obsérvese que la función de onda penetra más allá de los bordes del pozo $x = L$ y $x = 0$, indicando que existe una cierta probabilidad de encontrar a la partícula en la región en la cual su energía total E es inferior a su energía potencial V . Esta región se denomina *clásicamente prohibida*, puesto que su energía cinética, $E - V_0$, sería negativa para $V_0 > E$.

4.4 Valores esperados y operadores

Vamos a aparcar por el momento la resolución de la ecuación de Schrödinger en diversas situaciones para abordar un asunto de especial importancia en mecánica cuántica. Hasta ahora hemos visto cómo puede determinarse la función de onda asociada a una cierta partícula, pero una vez determinada dicha función, ¿cómo podemos calcular el valor de los diferentes observables (cantidades medibles) relacionados con dicha partícula? Esta sección está dedicada a contestar esta pregunta, para lo cual discutiremos los conceptos de valor esperado y operador en el contexto de la mecánica cuántica.

4.4.1 Valores esperados

A estas alturas debería ser evidente que en mecánica cuántica hay dos tipos de cantidades medibles asociadas a una función de onda dada $\Psi(x, t)$. Un tipo, como la energía E de los estados estacionarios, está fijada por el número cuántico que denota la función de onda. Por tanto, en toda medida de esta cantidad realizada sobre un sistema descrito por Ψ se obtiene el mismo valor. Otras cantidades, como puede ser la posición x , no poseen valores tan bien definidos y tan sólo tenemos acceso sobre ellas a una información de tipo probabilístico que viene determinada por la función de onda. El resto de esta subsección está dedicada a describir cómo se obtiene ese tipo de información.

Una partícula descrita por una función de onda Ψ puede ocupar varios lugares x con una probabilidad dada por la intensidad de la onda en ese punto, es decir, por $|\Psi(x)|^2$. Las predicciones hechas de este modo pueden ser comprobadas haciendo medidas sucesivas de la posición de la partícula. La Tabla 4.1 muestra los resultados que podrían haber sido obtenidos en un experimento hipotético de este tipo. La tabla posee 18 entradas, cada una representando la posición de la partícula obtenida en cada medida. Vemos que la entrada 5.4 es la que aparece más a menudo (en 3 de los 18 intentos) y, por tanto, representa el valor más probable si nos basamos en los datos disponibles. La probabilidad asociada con esta posición, de nuevo con los datos disponibles, es $3/18 = 0.167$. Estos números cambiarán cuando se realicen nuevas medidas, pero en algún momento alcanzarán ciertos valores límite. Las predicciones teóricas se refieren precisamente a esos valores límite que se obtienen cuando se realizan una gran cantidad de medidas.

La información de la Tabla 4.1 también se puede usar para encontrar el valor

Tabla 4.1 Hipotético conjunto de datos sobre la posición de una partícula obtenidos en medidas sucesivas.

Intento	Posición ^a	Intento	Posición	Intento	Posición
1	$x_1 = 2.5$	7	$x_7 = 8.0$	13	$x_{13} = 4.2$
2	$x_2 = 3.7$	8	$x_8 = 6.4$	14	$x_{14} = 8.8$
3	$x_3 = 1.4$	9	$x_9 = 4.1$	15	$x_{15} = 6.2$
4	$x_4 = 7.9$	10	$x_{10} = 5.4$	16	$x_{16} = 7.1$
5	$x_5 = 6.2$	11	$x_{11} = 7.0$	17	$x_{17} = 5.4$
6	$x_6 = 5.4$	12	$x_{12} = 3.3$	18	$x_{18} = 5.3$

^a La posición está medida en unidades arbitrarias.

promedio de la posición de la partícula:

$$\bar{x} = \frac{(2.5 + 3.7 + 1.4 + \dots + 5.4 + 5.3)}{18} = 5.46.$$

Este valor medio se puede calcular también de la siguiente forma. Primero ordenamos los valores de la tabla en orden creciente: 1.4, 2.5, 3.3, ..., 5.4, 6.2, ..., 8.0, 8.8. Ahora tomamos cada valor y lo multiplicamos por el número de veces que aparece dividido por el número total de medidas y sumamos los resultados:

$$1.4 \left(\frac{1}{18} \right) + 2.5 \left(\frac{1}{18} \right) + \dots + 5.4 \left(\frac{3}{18} \right) + 6.2 \left(\frac{2}{18} \right) + \dots + 8.8 \left(\frac{1}{18} \right) = 5.46.$$

Los dos procedimientos son equivalentes, pero el segundo involucra una suma sobre los valores ordenados, en lugar de sobre las entradas individuales de la tabla. Podemos generalizar esta última expresión para incluir otros valores de la posición de la partícula, siempre que pesemos cada uno por su frecuencia de aparición. Esto nos permite escribir una prescripción general para calcular el promedio de la posición de la partícula a partir de cualquier conjunto de datos:

$$\bar{x} = \sum x P_x. \quad (4.41)$$

La suma incluye ahora todos los valores de x , cada uno pesado por su frecuencia o probabilidad de aparición P_x . Como los valores posibles de x están distribuidos de forma continua sobre toda la recta real, la suma que aparece en la expresión anterior debería convertirse en una integral y P_x debería referirse a la probabilidad de encontrar la partícula en un intervalo infinitesimal dx alrededor de x . En otras palabras, P_x debería convertirse en $P(x)dx$, donde $P(x)$ es la densidad de probabilidad. En mecánica cuántica, $P(x) = |\Psi|^2$ y el valor promedio de x , que se escribe como $\langle x \rangle$, se llama **valor esperado**. De este modo,

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\Psi(x, t)|^2 dx \quad (4.42)$$

Nótese que $\langle x \rangle$ puede ser una función del tiempo. Para un estado estacionario, sin embargo, $|\Psi|^2$ no depende del tiempo y, por tanto, $\langle x \rangle$ también es independiente del tiempo.

De forma similar, el valor esperado de cualquier función de x se obtiene como

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) |\Psi(x, t)|^2 dx \quad (4.43)$$

Con $f(x) = V(x)$, ec. (4.43) se convierte en $\langle V \rangle$, el promedio de la energía potencial de la partícula. Con $f(x) = x^2$ se puede encontrar la incertidumbre cuántica en la posición de la partícula. Para entender esto, volvamos a la Tabla 4.1. Nótese que los entradas están distribuidas entorno al valor medio. La desviación sobre dicho valor promedio se mide con la llamada *desviación típica* o *desviación estándar*, σ , que se define como

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{N}}, \quad (4.44)$$

donde N es el número de entradas, es decir, 18 en este caso. Los factores que aparecen dentro de la raíz en la expresión anterior se pueden reescribir como

$$\frac{\sum (x_i)^2}{N} - 2(\bar{x}) \frac{\sum (x_i)}{N} + (\bar{x})^2 \sum \left(\frac{1}{N} \right) = \overline{(x^2)} - 2(\bar{x})(\bar{x}) + (\bar{x})^2 = \overline{(x^2)} - (\bar{x})^2$$

y de este modo,

$$\sigma = \sqrt{\overline{(x^2)} - (\bar{x})^2}. \quad (4.45)$$

De la ec. (4.44) vemos que si la desviación típica fuera cero, todos los datos de la tabla serían idénticos e iguales al valor medio. En mecánica cuántica, a la desviación estándar se la denota por Δx y recibe el nombre de **incertidumbre**. Esta es precisamente la cantidad que aparece en el principio de incertidumbre de Heisenberg. De nuestra discusión anterior se desprende pues que la incertidumbre cuántica en la posición se puede calcular a partir de valores esperados del siguiente modo:

$$\Delta x = \sqrt{\overline{(x^2)} - \langle x \rangle^2} \quad (4.46)$$

Ejemplo 4.4: Determinar (a) $\langle x \rangle$ y (b) Δx para una partícula en el estado fundamental de una caja de longitud L .

Solución. (a) El valor esperado de x en el estado fundamental viene dado por

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx = \left(\frac{2}{L} \right) \int_0^L x \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) dx.$$

Haciendo el cambio de variable $\theta = \pi x/L$, de modo que $d\theta = \pi dx/L$, tenemos que

$$\langle x \rangle = \left(\frac{2L}{\pi^2} \right) \int_0^{\pi} \theta \sin^2 \theta d\theta.$$

Esta integral se evalúa con la ayuda de la identidad trigonométrica $2\sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$, dando

$$\langle x \rangle = \left(\frac{L}{\pi^2} \right) \left(\int_0^{\pi} \theta d\theta - \int_0^{\pi} \theta \cos 2\theta d\theta \right).$$

Una integración por partes muestra que la segunda integral se anula, mientras que la primera es igual a $\pi^2/2$. De este modo, el valor esperado de la posición es $\langle x \rangle = L/2$, como era de esperar por la simetría del problema.

(b) Para determinar Δx necesitamos el valor esperado $\langle x^2 \rangle$ que se calcula como

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx = \left(\frac{2}{L}\right) \int_0^L x^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx.$$

Haciendo el cambio de variable $\theta = \pi x/L$ llegamos a que

$$\langle x^2 \rangle = \frac{L^2}{\pi^3} \left(\int_0^\pi \theta^2 d\theta - \int_0^\pi \theta^2 \cos 2\theta d\theta \right).$$

La primera integral es igual a $\pi^3/3$; la segunda se puede hacer por partes para obtener

$$\int_0^\pi \theta^2 \cos 2\theta d\theta = - \int_0^\pi \theta \sin 2\theta d\theta = \frac{1}{2} \theta \cos 2\theta \Big|_0^\pi = \pi/2.$$

Entonces,

$$\langle x^2 \rangle = \frac{L^2}{\pi^3} \left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2\pi^2}.$$

Finalmente, la incertidumbre en la posición para esta partícula es

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = L \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2} - \frac{1}{4}} \approx 0.181L. \quad \square$$

Hasta ahora hemos aprendido a predecir la posición media de una partícula $\langle x \rangle$, la incertidumbre en la posición Δx , el promedio de la energía potencial $\langle V \rangle$, etc. Pero, ¿qué sucede con el valor esperado del momento lineal $\langle p \rangle$ de la partícula o su energía cinética promedio $\langle K \rangle$? Estos valores esperados se podrían calcular si conociéramos la función $p(x)$. En mecánica clásica, $p(x)$ se puede obtener de la ecuación de movimiento de la partícula, $x(t)$. Derivando una vez esta función con respecto al tiempo obtenemos la velocidad $v(t)$. Entonces, invirtiendo $x(t)$ para obtener t en función de x y substituyendo el resultado en $v(t)$, se obtiene $v(x)$ y la deseada relación $p(x) = mv(x)$. Sin embargo, en mecánica cuántica x y t son variables independientes y no hay trayectoria o función que relacione p con x . Si existiera tal relación, eso violaría el principio de incertidumbre.

Para obtener $\langle p \rangle$ debemos intentar un método diferente. En concreto, vamos a identificar la derivada temporal del valor esperado de la posición con el promedio de la velocidad de la partícula, es decir,

$$\langle p \rangle = m \frac{d\langle x \rangle}{dt}. \quad (4.47)$$

La ec. (4.47) no se puede derivar a partir de nada de lo que hemos discutido anteriormente. Cuando se aplica a objetos macroscópicos, donde las incertidumbres cuánticas en la posición y en el momento son despreciables, los promedios $\langle x \rangle$ y $\langle p \rangle$

se hacen indistinguibles de la posición y momento clásicos del objeto y la ec. (4.47) se reduce a la definición clásica de momento.

Una expresión equivalente para $\langle p \rangle$ se obtiene de la ec. (4.47) usando la ec. (4.42) y derivando bajo la integral. Usando la ecuación de Schrödinger para eliminar las derivadas temporales de Ψ y su complejo conjugada Ψ^* se obtiene que¹

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) \left(\frac{\hbar}{i} \right) \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} dx \quad (4.48)$$

Ejemplo 4.5: Demostrar que $\langle p \rangle = 0$ para cualquier estado de una partícula en un pozo de potencial infinito.

Solución. Físicamente, este resultado es obvio y desde el punto de vista matemático lo que hay que demostrar es que

$$\langle p \rangle = \int_0^L \psi_n^*(x) \left(\frac{\hbar}{i} \right) \frac{\partial \psi_n(x)}{\partial x} dx = 0,$$

donde $\psi_n(x) = \sqrt{2/L} \sin(n\pi x/L)$. Esto se deja como ejercicio. \square

4.4.2 Operadores

Un observable es cualquier propiedad de una partícula que pueda ser medida. La posición y el momento son observables, así como las energías cinética y potencial.² En mecánica cuántica, se asocia un *operador* con cada observable. Un operador actúa sobre una función dando lugar a otra función. En este sentido, una constante c puede convertirse en un operador de modo que al actuar sobre una función $f(x)$ nos dé la función $cf(x)$. Un operador más complicado es d/dx , el cual al actuar sobre $f(x)$ nos da la derivada de esa función, es decir, $df(x)/dx$. Otro ejemplo de operador es $(d/dx)^2 = (d/dx)(d/dx)$, que actuando sobre $f(x)$ nos da $(d/dx)^2 f(x) = (d/dx)(df/dx) = d^2 f/dx^2$. Por tanto, $(d/dx)^2$ significa “toma la derivada segunda con respecto a x ”.

El concepto de operador es muy útil en mecánica cuántica porque todos los valores esperados que hemos encontrado hasta ahora se pueden escribir de la siguiente forma general:

$$\langle Q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) \hat{Q} \Psi(x, t) dx. \quad (4.49)$$

En esta expresión Q es un observable y \hat{Q} es su operador asociado. Es importante recalcar que el orden en ec. (4.49) es importante; indica que \hat{Q} opera sobre Ψ . Comparando la forma general con la expresión de $\langle p \rangle$ en la ec. (4.47), llegamos a la conclusión de que el operador asociado con el momento adopta la forma: $\hat{p} = (\hbar/i)(\partial/\partial x)$. De modo similar, escribiendo $x|\Psi|^2 = \Psi^* x \Psi$ en la ec. (4.42), implica

¹Este cálculo se deja como ejercicio.

²Por contra, la función de onda Ψ no se puede medir directamente y, por tanto, no es un observable.

Tabla 4.2 Observables comunes y sus operadores asociados en mecánica cuántica.

Observable	Símbolo	Operador asociado
posición	x	x
momento lineal	p	$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$
energía potencial	V	$V(x)$
energía cinética	K	$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$
hamiltoniano	H	$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$
energía total	E	$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$

que el operador posición es $\hat{x} = x$. A partir de los operadores \hat{x} y \hat{p} se puede construir el operador de cualquier observable. Por ejemplo, el operador para x^2 es simplemente x^2 . Esto implica que el operador de la energía potencial es simplemente $V(x)$, lo que significa que su promedio se calcula como

$$\langle V \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) \hat{V} \Psi(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) V(x) \Psi(x, t) dx. \quad (4.50)$$

Otro ejemplo es la energía cinética K . Clásicamente, K es una función de p : $K = p^2/2m$. Entonces, el operador energía cinética es $\hat{K} = \hat{p}^2/2m = (-\hbar/2m)\partial^2/\partial x^2$, y el valor esperado de la energía cinética se obtiene como

$$\langle K \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) \hat{K} \Psi(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} \right) dx. \quad (4.51)$$

Para encontrar la energía total de la partícula, sumamos la energía cinética y la potencial para obtener

$$\langle E \rangle = \langle K \rangle + \langle V \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right\} \Psi(x, t) dx. \quad (4.52)$$

La forma de este resultado sugiere que el término entre paréntesis es el operador energía total. Este operador recibe el nombre de **hamiltoniano** y se denota por \hat{H} :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x). \quad (4.53)$$

La designación \hat{E} se reserva para otro operador, que surge como sigue. Una inspección de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo muestra que ésta se puede escribir como $\hat{H}\Psi = i\hbar\partial\Psi/\partial t$. Usando esto en la ec. (4.52) llegamos a una expresión equivalente para $\langle E \rangle$ y nos conduce a la identificación del *operador energía*:

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}. \quad (4.54)$$

Nótese que \hat{H} es un operador que involucra sólo la coordenada espacial x , mientras que \hat{E} depende sólo del tiempo. Esto es, \hat{H} y \hat{E} son realmente dos operadores

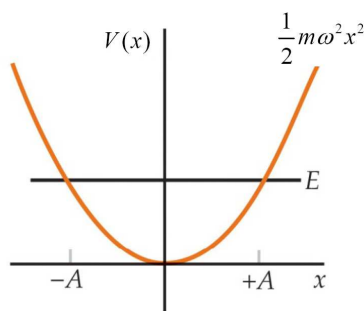


Fig. 4.10 Potencial del oscilador armónico simple.

diferentes, pero producen resultados idénticos cuando se aplican a cualquier solución de la ecuación de Schrödinger. Esto se debe a que el miembro de la izquierda de la ecuación de Schrödinger es simplemente $\hat{\Psi}$, mientras que el miembro de la derecha es \hat{E} . La Tabla 4.2 resume los observables que hemos discutido y sus operadores correspondientes.

4.5 El oscilador armónico cuántico

Uno de los primeros problemas que Schrödinger resolvió después de introducir su ecuación fue el de un oscilador armónico, donde el potencial viene dado por (ver Fig. 4.10)

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2, \quad (4.55)$$

donde k es la constante de fuerza y ω es la frecuencia angular definida como $\omega = \sqrt{k/m} = 2\pi f$. La solución de la ecuación de Schrödinger para este potencial es particularmente importante ya que se aplica a problemas como las vibraciones de moléculas en gases y sólidos.

En mecánica clásica una partícula en este potencial está en equilibrio en el origen $x = 0$, donde $V(x)$ es mínimo y la fuerza $F_x = -dV/dx = 0$. Si perturbamos la partícula, ésta oscilará entre las posiciones $x = -A$ y $x = +A$, donde la energía cinética se anula. A estos puntos se los conoce como puntos de retorno. La amplitud A está relacionada con la energía total E por

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2A^2. \quad (4.56)$$

Clásicamente, la probabilidad de encontrar una partícula en dx es proporcional al tiempo dx/v , donde v es la velocidad de la partícula. Esta velocidad se puede obtener de la conservación de la energía

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = E. \quad (4.57)$$

La probabilidad clásica es por tanto

$$P_C(x)dx \propto \frac{dx}{v} = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2)}}. \quad (4.58)$$

Cualquier valor de la energía E es posible. El más bajo es $E = 0$, que corresponde al caso en el que la partícula permanece en reposo en $x = 0$.

Para resolver el problema desde el punto de vista cuántico tenemos que resolver la correspondiente ecuación de Schrödinger que en este caso adopta la forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi(x) = E\psi(x). \quad (4.59)$$

Las técnicas matemáticas involucradas en la resolución de esta ecuación están fuera de nuestro alcance y sólo discutiremos la solución de forma cualitativa. En primer lugar, como el potencial es simétrico entorno a $x = 0$, esperamos que

$$|\psi(-x)|^2 = |\psi(x)|^2 \Rightarrow \psi(-x) = \pm\psi(x). \quad (4.60)$$

Se pueden distinguir dos regiones dependiendo de si estamos en la región clásicamente permitida o no. La primera región está definida por $|x| < A$, donde $E > V(x)$. La segunda viene definida por $|x| > A$, donde $V(x) > E$. Esta última región está prohibida clásicamente ya que una partícula en esta región tendría energía cinética negativa. Consideremos primero la ecuación de Schrödinger en la región $|x| < A$:

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = -k^2 \psi(x), \quad (4.61)$$

donde $k^2 = (2m/\hbar^2)[E - V(x)]$ con $V(x) = (1/2)m\omega^2 x^2$. Como k^2 es positivo, $\psi(x)$ se curva hacia el eje y oscila. Para $x > A$ la ecuación de Schrödinger adopta la forma siguiente:

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = \alpha^2 \psi(x), \quad (4.62)$$

donde $\alpha^2 = (2m/\hbar^2)[V(x) - E]$. Como α^2 es positivo, $\psi(x)$ se curva alejándose del eje.

Sólo para ciertos valores de E existen soluciones bien comportadas, es decir, que se aproximan a cero cuando $x \rightarrow \pm\infty$. Se puede demostrar que los valores permitidos de la energía vienen dados por

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.63)$$

De este modo, el estado fundamental tiene una energía $(1/2)\hbar\omega$ y los niveles de energía están equiespaciados y separados por una distancia $\hbar\omega$. Este esquema de niveles está ilustrado en la Fig. 4.11.

Las soluciones de la ecuación de Schrödinger (autofunciones) para el oscilador armónico simple se pueden escribir como

$$\psi_n(x) = A_n e^{-m\omega x^2/2\hbar} H_n(x), \quad (4.64)$$

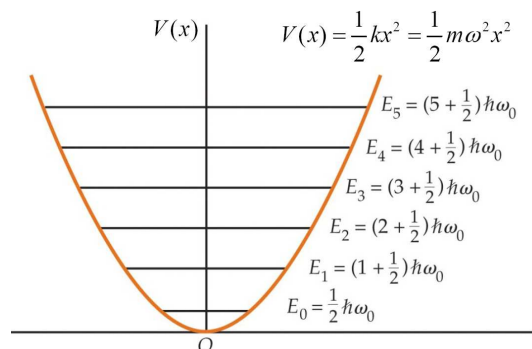


Fig. 4.11 Niveles energéticos del potencial del oscilador armónico.

donde la constante A_n se determina a través de la condición de normalización y las funciones $H_n(x)$ son polinomios de orden n llamados polinomios de Hermite. Las soluciones para $n = 0, 1, 2$ son

$$\psi_0(x) = A_0 e^{-m\omega x^2/2\hbar}, \tag{4.65}$$

$$\psi_1(x) = A_1 \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x e^{-m\omega x^2/2\hbar}, \tag{4.66}$$

$$\psi_2(x) = A_2 \left(1 - \frac{2m\omega x^2}{\hbar} \right) e^{-m\omega x^2/2\hbar}. \tag{4.67}$$

Nótese que para n par, las funciones de onda son simétricas y para n impar son antisimétricas. Las funciones de onda para el estado fundamental y el primer estado excitado ($n = 0$ y $n = 1$) están representadas en la Fig. 4.12.

Una propiedad de estas funciones de onda es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) x \psi_m(x) dx = 0 \text{ a no ser que } n = m \pm 1. \tag{4.68}$$

Esta propiedad proporciona una condición para las transiciones que pueden tener lugar entre los diversos estados. Esta condición, llamada **regla de selección**, limita la cantidad por la que n puede cambiar por la radiación emitida o absorbida por un oscilador armónico simple y se puede enunciar como

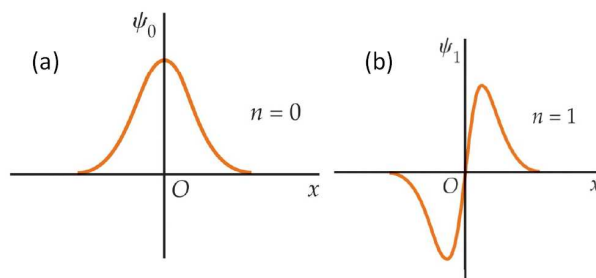


Fig. 4.12 (a) Función de onda correspondiente al estado fundamental del oscilador armónico. (b) La misma función para el primer estado excitado.

El número cuántico del estado final debe de ser 1 más pequeño o 1 más grande que el estado inicial:

$$\Delta n = \pm 1.$$

Ya que la diferencia en energías entre estados consecutivos es $\hbar\omega$, ésta es la energía del fotón emitido o absorbido en una transición (de dipolo eléctrico). La frecuencia del fotón es, por tanto, igual a la frecuencia del oscilador clásico, como Planck supuso en su derivación de la fórmula de la radiación del cuerpo negro.

4.6 Reflexión y transmisión de ondas: el efecto túnel

Hasta ahora no hemos centrado en problemas en los que las partículas estaban confinadas en una región finita del espacio. En esta sección, sin embargo, nos ocuparemos de problemas donde las partículas se puedan mover por todo el espacio y cualquier valor de la energía es permitido.

4.6.1 Escalón de potencial

Consideremos una región del espacio en la que el potencial viene descrito por una función escalón:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ V_0 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (4.69)$$

Este potencial está representado en la Fig. 4.13.

Estamos interesados en saber lo que le ocurre a una partícula de energía E , que se mueve de izquierda a derecha, cuando encuentra el escalón. Clásicamente, si la energía de la partícula es menor que la altura del escalón ($E < V_0$), la partícula rebota y continúa moviéndose hacia la región $x < 0$. Por contra, si la energía es mayor

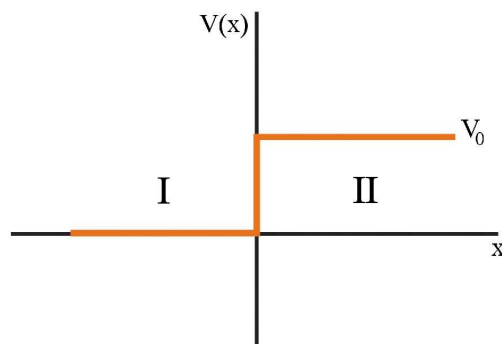


Fig. 4.13 Escalón de potencial de altura V_0 . Definimos dos regiones. La región I corresponde a $x < 0$ y la región II a $x > 0$.

que V_0 , la partícula continúa su viaje hacia la derecha. Veremos a continuación que en el caso cuántico el resultado es cualitativamente diferente.

Como siempre nuestro objetivo es resolver la ecuación de Schrödinger. Supongamos primero que $E > V_0$. La ecuación de Schrödinger en las dos regiones definidas en la Fig. 4.13 se escribe como:

$$\text{región I } (x < 0) : \quad \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k_1^2\psi(x), \quad (4.70)$$

$$\text{región II } (x > 0) : \quad \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k_2^2\psi(x), \quad (4.71)$$

donde $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$ y $k_2 = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar$. Las soluciones generales de estas ecuaciones adoptan la forma siguiente:

$$\text{región I } (x < 0) : \quad \psi_{\text{I}}(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}, \quad (4.72)$$

$$\text{región II } (x > 0) : \quad \psi_{\text{II}}(x) = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x}, \quad (4.73)$$

Como consideramos una partícula incidiendo desde la izquierda, el segundo término de ψ_{II} no tiene sentido y tomaremos $D = 0$. Para determinar las constantes restantes imponemos la continuidad de $\psi(x)$ y $d\psi(x)/dx$ en $x = 0$:

$$\psi_{\text{I}}(0) = A + B = \psi_{\text{II}}(0) = C \quad (4.74)$$

$$\left(\frac{d\psi_{\text{I}}(x)}{dx}\right)_{x=0} = ik_1A - ik_1B = \left(\frac{d\psi_{\text{II}}(x)}{dx}\right)_{x=0} = ik_2C. \quad (4.75)$$

Expresemos ahora B y C en términos de A :

$$B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}A = \frac{E^{1/2} - (E - V_0)^{1/2}}{E^{1/2} + (E - V_0)^{1/2}}A, \quad (4.76)$$

$$C = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}A = \frac{2E^{1/2}}{E^{1/2} + (E - V_0)^{1/2}}A. \quad (4.77)$$

Ahora definimos los coeficientes de reflexión R y de transmisión T del siguiente modo: $R = |B/A|^2$ y $T = (k_2/k_1)|C/A|^2$. Con estas definiciones tenemos que

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2, \quad (4.78)$$

$$T = \frac{k_2}{k_1}\left|\frac{C}{A}\right|^2 = \frac{4k_1k_2}{(k_1 + k_2)^2}. \quad (4.79)$$

Nótese que $R + T = 1$. Es importante señalar que este resultado nos dice que incluso si $E > V_0$, la probabilidad de que la partícula sea reflejada en el escalón de potencial no es cero, contrariamente a lo que ocurre en el caso clásico. Nótese también que el coeficiente de reflexión R depende de $(k_1 - k_2)^2$ y por tanto un pozo de potencial produciría el mismo efecto.

Consideremos ahora el caso de $E < V_0$. La principal diferencia está en la región II donde la solución adopta la forma

$$\psi_{\text{II}}(x) = Ce^{ik_2x} = Ce^{-\alpha x}, \quad (4.80)$$

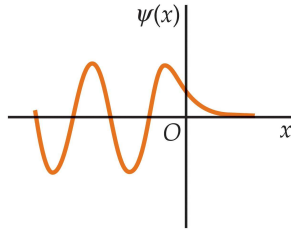


Fig. 4.14 Cuando la energía total E es menor que V_0 la función de onda penetra ligeramente en la región $x > 0$.

donde $\alpha = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$. Imponiendo la continuidad de $\psi(x)$ y $d\psi(x)/dx$ en $x = 0$, llegamos esta vez a que

$$|A|^2 = |B|^2 \Rightarrow R = 1 \text{ y } T = 0. \quad (4.81)$$

Un resultado interesante es el hecho de que a pesar de que $R = 1$, la función de onda penetra una cierta distancia dentro del escalón:

$$|\psi_{\text{II}}|^2 = |C|^2 e^{-2\alpha x}. \quad (4.82)$$

Esta situación es similar a la que tiene lugar en el fenómeno de reflexión interna total en óptica. La penetración parcial del escalón de potencial se ilustra en la Fig. 4.14.

4.6.2 Barrera de potencial

Consideremos ahora el caso de una barrera de potencial (ver Fig. 4.15(a)):

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ ó } x > a \end{cases} \quad (4.83)$$

Consideremos primero una partícula con energía $E < V_0$. La función de onda en las tres regiones definidas en la Fig. 4.15(a) adoptan la forma:

$$\text{región I } (x < 0) : \psi_{\text{I}}(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}, \quad (4.84)$$

$$\text{región II } (0 < x < a) : \psi_{\text{II}}(x) = Ce^{-\alpha x} + De^{\alpha x}, \quad (4.85)$$

$$\text{región III } (x > a) : \psi_{\text{III}}(x) = Fe^{ik_1x} + Ge^{-ik_1x}, \quad (4.86)$$

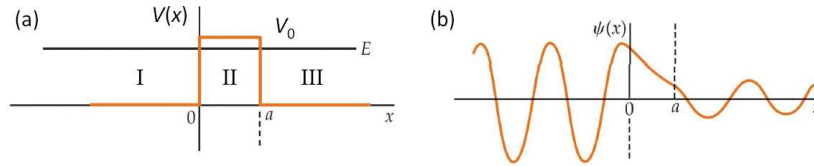


Fig. 4.15 (a) Barrera de potencial rectangular de anchura a y altura V_0 . (b) Penetración de la barrera por una onda de energía total inferior a la energía de la barrera. Una parte de la onda es transmitida a través de la barrera.

donde $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$ y $\alpha = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$. Nótese que ψ_{II} involucra exponenciales reales. Además, como consideramos partículas incidiendo desde la izquierda, tendremos que $G = 0$. Las constantes restantes se obtienen de las condiciones de continuidad de ψ y $d\psi/dx$ en $x = 0$ y $x = a$. Completando el cálculo (problema 31) se puede demostrar que existe una probabilidad finita de atravesar la barrera, incluso si $E < V_0$, lo cual se conoce como **efecto túnel**. Esto se ilustra en la Fig. 4.15(b).

El coeficiente de transmisión T de la región I a la región III viene dado por

$$T(E) = \left| \frac{F}{A} \right|^2 = \frac{4E(V_0 - E)}{4E(V_0 - E) + V_0^2 \sinh^2(\alpha a)}. \quad (4.87)$$

Si la energía de la partícula incidente es mucho menor que V_0 o si la anchura de la barrera es suficientemente grande, se tiene que $\alpha a \gg 1$. En este límite de especial interés la ecuación anterior se simplifica:

$$T(E) = 16 \frac{E}{V_0} \left(1 - \frac{E}{V_0} \right) e^{-2\alpha a}. \quad (4.88)$$

A menudo tan sólo queremos estimar el orden de magnitud de la probabilidad de atravesar la barrera. En ese caso podemos ignorar el prefactor de la exponencial en la expresión anterior. De este modo, si $\alpha a \gg 1$ tenemos que

$$\boxed{T(E) \approx e^{-2\alpha a}} \quad (4.89)$$

Esta expresión nos dice, entre otras cosas, que la probabilidad de transmisión decae exponencialmente con la anchura de la barrera. Esta aproximación será muy útil en la resolución de problemas relacionados con el efecto túnel.

Por completitud digamos que de forma similar el problema se puede resolver para energías $E > V_0$. En este caso la transmisión viene dada por

$$T = \frac{4E(E - V_0)}{4E(E - V_0) + V_0^2 \sin^2(k_2 a)}, \quad (4.90)$$

donde $k_2 = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar$. En la Fig. 4.16 se ilustran las características fundamentales de la dependencia con la energía y con la distancia de la transmisión a través de una barrera rectangular.

4.7 Ejemplos y aplicaciones del efecto túnel

El efecto túnel tiene lugar en multitud de situaciones físicas y en esta sección vamos a describir algunas de las más emblemáticas. Pero antes de hacerlo, tenemos que generalizar los cálculos de la sección anterior al caso de una barrera de potencial arbitraria, como la que se muestra en la Fig. 4.17. En general, determinar la probabilidad de transmisión a través de una barrera de potencial $V(x)$ puede ser muy complicado. Sin embargo, si consideramos el caso en el que la energía de la partícula E es mucho menor que la altura de barrera (en la mayor parte de su extensión),

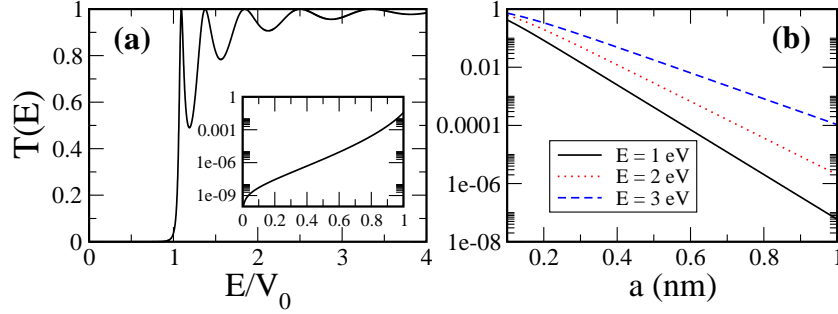


Fig. 4.16 (a) Probabilidad de transmisión como función de la energía en una barrera de potencial de altura $V_0 = 4$ eV y anchura $a = 1$ nm. La figura insertada muestra una ampliación de la región $E < V_0$. (b) Transmisión como función de la anchura de la barrera de potencial para $V_0 = 4$ eV y tres valores de la energía. En todos los casos se ha supuesto que la masa de la partícula es igual a la masa del electrón.

podremos hacer uso de la ec. (4.89) del siguiente modo. Podemos considerar que $V(x)$ representa un conjunto de barreras rectangulares adyacentes de altura $V(x)$ y ancho infinitesimal dx . En este caso, la probabilidad de atravesar la barrera será el producto de las probabilidades de atravesar las diferentes barreras, lo que nos conduce a la siguiente expresión para la probabilidad total:

$$T(E) \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{V(x) - E} dx\right) \quad (4.91)$$

donde la integral está extendida a lo largo de la región clásicamente prohibida donde $E < V(x)$ (ver Fig. 4.17). La ec. (4.91) nos será de gran ayuda para el análisis de los problemas físicos que abordaremos en las próximas subsecciones.

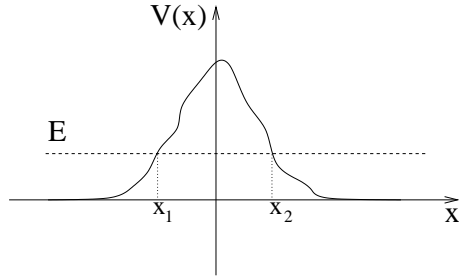


Fig. 4.17 Barrera de potencial arbitraria. Los puntos x_1 y x_2 corresponden a los puntos de retorno clásicos donde $E = V(x)$ y la energía cinética se hace cero.

4.7.1 Emisión de campo

En la *emisión de campo*, los electrones de un metal son literalmente expulsados a través de su superficie por medio de la aplicación de un fuerte campo eléctrico. De

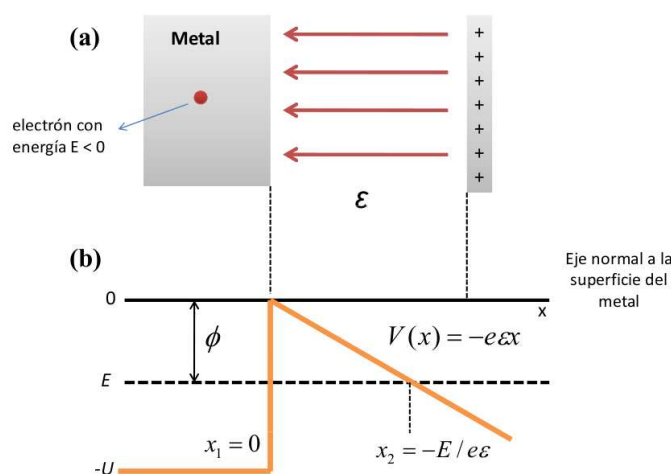


Fig. 4.18 (a) Emisión de campo desde una superficie metálica. (b) La energía potencial de un electrón del metal. El campo eléctrico produce la barrera de potencial triangular que se muestra, a través de la cual los electrones pueden “tunear” para escapar del metal. Los puntos de retorno en $x_1 = 0$ y $x_2 = -E/e\mathcal{E}$ marcan la región clásicamente prohibida. La probabilidad de atravesar la barrera es máxima para los electrones más energéticos, aquellos para los cuales $|E|$ es igual a la función de trabajo del metal ϕ .

esta manera, el metal se puede convertir en una fuente de electrones que se puede utilizar para diversas aplicaciones. Así por ejemplo, en el pasado se solía utilizar un cátodo (que no es más que un filamento metálico) para generar electrones en los tubos de vacío de los televisores. Entre las aplicaciones modernas de la emisión de campo se incluye el *microscopio de emisión de campo* que usa los electrones que se escapan del metal para formar una imagen de los detalles estructurales de la superficie emisora.

La emisión de campo es un fenómeno de túnel. La Fig. 4.18(a) muestra esquemáticamente cómo la emisión de campo se puede obtener colocando una placa cargada positivamente cerca de un metal para formar de manera efectiva un condensador de placas paralelas. En la región entre las “placas” existe un campo eléctrico \mathcal{E} , pero en el interior del metal el campo sigue siendo cero porque el efecto de apantallamiento. Nótese que un electrón dentro del metal es esencialmente libre y sólo permanece ligado al metal por la barrera de potencial en la superficie. La energía total E , que incluye la energía cinética, es negativa para indicar que el electrón está ligado. Realmente, $|E|$ representa la energía necesaria para que el electrón se escape del metal, un valor que es como mínimo igual a la función de trabajo del metal ϕ .

Fuera de la superficie ($x > 0$), el electrón es atraído por el campo eléctrico con una fuerza $F = e\mathcal{E}$, representada por el potencial $V(x) = -e\mathcal{E}x$. El diagrama de energía potencial se muestra en la Fig. 4.18(b) junto con las regiones clásicamente prohibida y permitida para un electrón de energía E . La intersección de E con $V(x)$

en $x_1 = 0$ y $x_2 = -E/e\mathcal{E}$ marcan los puntos clásicos de retorno. Clásicamente, un electrón confinado inicialmente en el metal no tendría energía suficiente como para sobrepasar la barrera. Esto sólo puede ocurrir por medio del efecto túnel, que es un fenómeno puramente cuántico. La probabilidad de que un electrón escape del metal viene dada por el coeficiente de transmisión correspondiente a la barrera triangular que se muestra en la Fig. 4.18(b).

Para calcular $T(E)$ debemos evaluar la integral en la ec. (4.91) a lo largo de la región clásicamente prohibida desde x_1 hasta x_2 . Como $V(x) = -e\mathcal{E}x$ en esta región y $E = -e\mathcal{E}x_2$, tenemos que

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{V(x) - E} dx = \sqrt{e\mathcal{E}} \int_0^{x_2} \sqrt{x_2 - x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{e\mathcal{E}} \left(\frac{|E|}{e\mathcal{E}} \right)^{3/2}. \quad (4.92)$$

Usando este resultado en la ec. (4.91), obtenemos la siguiente expresión para el coeficiente de transmisión para la emisión de campo:

$$T(E) \approx \exp \left(\left\{ -\frac{4\sqrt{2m}|E|^{3/2}}{3e\hbar} \right\} \frac{1}{\mathcal{E}} \right) \quad (4.93)$$

Nótese la fuerte dependencia de T con la energía. La cantidad entre paréntesis tiene dimensiones de campo eléctrico y proporciona una escala muy útil para determinar la intensidad relativa del campo externo:

$$\mathcal{E}_c = \frac{4\sqrt{2m}|E|^{3/2}}{3e\hbar}. \quad (4.94)$$

La probabilidad de escape es tanto mayor cuanto mayor sea la energía del electrón en el interior del metal. Los electrones menos ligados son aquellos que tienen una energía comparable a la función de trabajo ($|E| = \phi$). Para $|E| = \phi = 4.0$ eV, que es un valor típico para muchos metales, $\mathcal{E}_c = 5.5 \times 10^{10}$ V/m, que es un campo muy intenso. Sin embargo, para tener una emisión de campo apreciable no se necesitan campos tan intensos ya que el ritmo de emisión depende del producto del coeficiente de transmisión por el número de electrones por segundo que colisionan con la barrera. Esta frecuencia de colisión es bastante alta para una muestra que contenga del orden de 10^{22} electrones por centímetro cúbico, y valores del orden de 10^{30} colisiones por segundo por centímetro cúbico son bastante comunes. De este modo, se pueden obtener ritmos de emisión del orden de 10^{10} electrones por segundo (una corriente del orden de 1 nA) con campos aplicados tan pequeños como $\mathcal{E}_c/50$, es decir, del orden de 10^9 V/m.

4.7.2 El microscopio de efecto túnel

El microscopio de efecto túnel, conocido por el acrónimo STM que corresponde a *scanning tunneling microscope*, fue desarrollado a comienzos de los años 1980 por G. Binnig and H. Rohrer.³ Este instrumento consiste en una punta metálica que

³G. Binnig and H. Rohrer recibieron el premio Nobel de física en 1986 por la invención del STM.

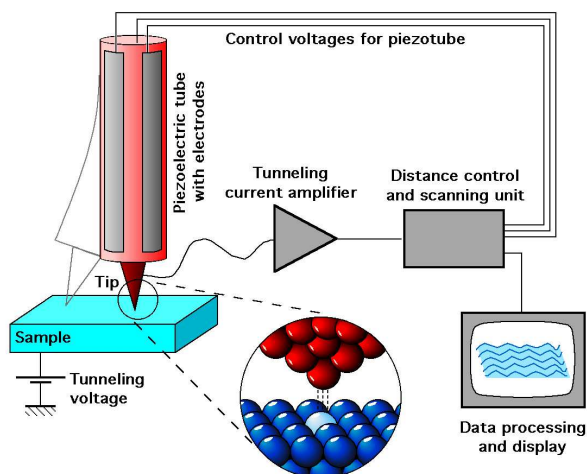


Fig. 4.19 Representación esquemática de un microscopio de efecto túnel.

se mantiene a unos pocos Å de la muestra (normalmente una superficie) que se desea investigar (ver Fig. 4.19). El vacío que existe entre punta y muestra actúa de forma efectiva como una barrera de potencial. Cuando se aplica un voltaje entre la punta metálica y la muestra, que ha de ser conductora, los electrones tienen una cierta probabilidad de atravesar la barrera de potencial dando lugar a una corriente eléctrica. Esta corriente túnel es extremadamente sensible a la distancia punta-muestra, es decir, a la anchura de la barrera de potencial. Un cambio de tan sólo 0.5 nm (del orden del diámetro de un átomo) en la anchura de la barrera puede causar un cambio de un factor del orden de 10^4 en la corriente. En uno de los modos de operación del STM, la punta explora la muestra manteniendo la corriente túnel constante mediante un sistema de feedback piezoeléctrico. De este modo, el movimiento vertical de la punta reproduce la topología de la superficie y las características de la misma se pueden medir con una resolución del tamaño de un átomo (ver ejemplos en la Fig. 4.20).

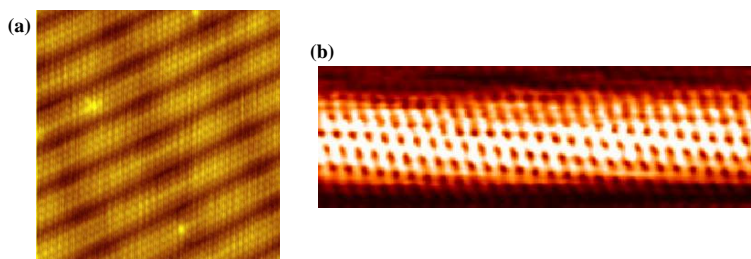


Fig. 4.20 Imágenes tomadas con el STM de una superficie de oro (a) y de un nanotubo de carbono (b).

4.7.3 Radiación alfa

Uno de los primeros fenómenos que fueron explicados por la mecánica cuántica fue el del decaimiento o desintegración de algunos elementos radiactivos por la emisión de partículas α (núcleos de helio compuestos por dos protones y dos neutrones). Las partículas α son un producto de desintegración de especies radiactivas como el radio, el torio o el uranio. Esto ya era conocido a comienzos del siglo XX, pero algunas de las características esenciales de la desintegración α permanecieron sin una explicación satisfactoria hasta bien entrada la década de los años 1920. Dos de esas características eran las siguientes:

- Todas las partículas α emitidas por los diversos núcleos radiactivos tienen energías similares y están comprendida entre 4 y 9 MeV.
- La vida media de un emisor α varía enormemente de un elemento a otro (hasta en más de 20 órdenes de magnitud).

Por ejemplo, las partículas α emergen del torio con una energía cinética de 4.05 MeV, sólo un poco menos de la mitad que las partículas α del polonio (8.95 MeV). Sin embargo, la vida media del torio es de 1.4×10^{10} años, frente a los 3.0×10^{-7} segundos del polonio.

En 1928 George Gamow, R.W. Gurney y E.U. Condon explicaron estas observaciones en términos del efecto túnel. La idea es la siguiente. Dentro de un núcleo se puede formar una partícula α y ésta puede escapar del mismo por efecto túnel a través de la barrera de potencial nuclear (ver Fig. 4.21(b)). Cuando está dentro del núcleo padre, la partícula α puede moverse libremente, pero permanece confinada dentro del pozo de potencial del núcleo por medio de la fuerza fuerte. Una vez fuera del núcleo, la partícula α experimenta sólo la repulsión coulombiana del núcleo emisor (o núcleo hijo). (La fuerza nuclear sobre la partícula α fuera del núcleo es insignificante debido a su corto alcance, $\approx 10^{-15}$ m.) La Fig. 4.21(b) muestra el diagrama de energía potencial de la partícula α como función de la distancia r desde el núcleo emisor. El radio nuclear es del orden de 10^{-14} m para núcleos pesados. Más allá de esta distancia, sólo se tiene la energía potencial asociada a la repulsión Coulomb, $V(r) = kq_1q_2/r$, entre la partícula α con carga $q_1 = +2e$ y el núcleo hijo con número atómico Z ($q_2 = +Ze$). Clásicamente, incluso una partícula α con 9 MeV que estuviera inicialmente ligada en el núcleo no tendría energía suficiente para superar la barrera coulombiana (de ≈ 30 MeV de altura) y escapar. Pero cuánticamente, la partícula α puede “tunelear” y abandonar el núcleo. La energía total E de la partícula α en el interior del núcleo se convierte en energía cinética cuando escapa de éste. *El origen del amplio rango de valores de la vida media de núcleos observado experimentalmente está en la enorme sensibilidad de la probabilidad de transmisión a pequeños cambios en la energía de las partículas α .*

La probabilidad de túnel y el correspondiente ritmo de decaimiento de los elementos radiactivos se pueden calcular de forma análoga al caso de la emisión de campo. Los detalles se describirán en el capítulo 8 y aquí sólo presentamos el

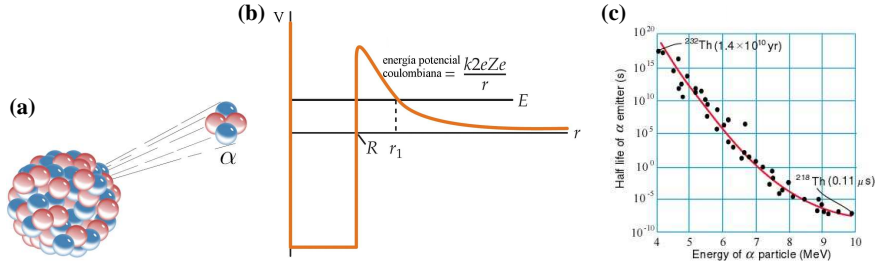


Fig. 4.21 (a) Emisión de radiación α (núcleos de helio). (b) Modelo de energía potencial para una partícula α y un núcleo. (c) Periodo de semidesintegración por decaimiento α como función de la energía cinética de las partículas α para diversos núcleos radiactivos.

resultado final:

$$T(E) \approx \exp \left\{ -4\pi Z \sqrt{\frac{E_0}{E}} + 8\sqrt{\frac{ZR}{r_0}} \right\} \quad (4.95)$$

En esta expresión, $r_0 = \hbar^2/m_\alpha k e^2$ es el radio de Bohr para la partícula α . La masa de la partícula α es $m_\alpha = 7295m_e$, de modo que $r_0 = 7.25 \times 10^{-5} \text{ \AA}$. Por otra parte, la longitud r_0 define una escala de energías definida como:

$$E_0 = \frac{ke^2}{2r_0} = 0.0993 \text{ MeV}. \quad (4.96)$$

Para obtener el ritmo de decaimiento, debemos multiplicar $T(E)$ por el número de colisiones por segundo que una partícula α sufre contra la barrera nuclear. Esta frecuencia de colisión f es el recíproco del tiempo de tránsito de la partícula α para cruzar el núcleo, es decir, $f = v/2R$, donde v es la velocidad de la partícula α dentro del núcleo. En muchos casos, f es del orden de 10^{21} colisiones por segundo, con lo cual el ritmo de decaimiento λ es

$$\lambda = fT(E) \approx 10^{21} \exp \left\{ -4\pi Z \sqrt{\frac{E_0}{E}} + 8\sqrt{\frac{ZR}{r_0}} \right\}. \quad (4.97)$$

El recíproco de λ tiene dimensiones de tiempo y está relacionado con el periodo de semidesintegración del emisor $t_{1/2}$:

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}. \quad (4.98)$$

Ejemplo 4.6: Usando el modelo que acabamos de explicar, estimar los periodos de semidesintegración de los elementos radiactivos torio ($Z = 90$) y plutonio ($Z = 84$). La energía de las partículas α que emergen de los núcleos son 4.05 MeV y 8.95 MeV, respectivamente, y el tamaño nuclear es de unos 9 fm ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$) en ambos casos. Nota: usar $f = 10^{21} \text{ Hz}$ para la frecuencia de colisión.

Solución. $t_{1/2} = 5.4 \times 10^{17} \text{ s} = 1.7 \times 10^{10}$ años para el torio y $t_{1/2} = 8.4 \times 10^{-10} \text{ s}$ para el polonio. \square

4.7.4 Radiación de un agujero negro

Una vez dentro del horizonte de sucesos de un agujero negro, nada puede escapar, ni siquiera la luz. Esta era la visión comúnmente aceptada hasta 1974, cuando Stephen Hawking propuso que los agujeros negros pueden emitir una serie de partículas por medio del efecto túnel a través de la barrera de potencial gravitatorio que rodea a un agujero negro. El grosor de esta barrera es proporcional al tamaño del agujero negro, de modo que la probabilidad de túnel en principio debería ser extremadamente pequeña. Sin embargo, como el agujero negro emite partículas, su masa y su tamaño decrece constantemente, haciendo más fácil que las partículas puedan escapar. De este modo, la emisión continúa a un ritmo cada vez más grande, hasta que eventualmente el agujero negro deja de existir después de producirse una explosión.

Los cálculos indican que un agujero negro con la masa del sol sobreviviría durante unos 10^{66} años. Por otra parte, un agujero negro con una masa de 10^9 toneladas y del tamaño de un protón (se cree que tales agujeros negros se formaron durante el Big Bang) debería haberse evaporado en los 10^{10} años que han transcurrido desde la creación de nuestro universo. Se supone que al desintegrarse, un agujero negro debería emitir gran parte de su energía en forma de rayos gamma. En realidad, emisiones de rayos gamma han sido observadas en el espacio interestelar, pero en cantidades y con propiedades que pueden ser explicadas de otras formas. Actualmente, no existe ninguna evidencia de la evaporación de ningún agujero negro.

4.8 Bibliografía recomendada

Este capítulo está basado en las siguientes tres referencias:

- Capítulo 35 de “Física para la ciencia y la tecnología, Vol. 2C” (5ª edición) de Tipler y Mosca, editorial Reverté.
- Capítulo 6 de “Modern Physics” (5th edition) de Tipler y Llewellyn, W.H. Freeman.
- Capítulos 6 y 7 de “Modern Physics” (3rd edition) de R.A. Serway, C.J. Moses and C.A. Moyer, Thomson/Brook Cole (2005).

En especial, se recomienda el capítulo 7 del libro de Serway, Moses y Moyer que está dedicado a los fenómenos relacionados con el efecto túnel.

Para aquellos que quieran profundizar un poco más en los diversos temas que hemos tratado en este capítulo, se recomienda:

- Capítulos 5 y 6 de “Física Cuántica” de Robert Eisberg y Robert Resnick, editorial Limusa (1988).

4.9 Ejercicios del Capítulo 4

Cuestiones

- (1) Una partícula está en un pozo infinito de anchura L . Calcular la energía del estado fundamental si (a) la partícula es un protón y $L = 0.1$ nm, el tamaño típico de una molécula; (b) la partícula es un protón y $L = 1$ fm, el tamaño típico de un núcleo.
- (2) Una partícula está en el estado fundamental de un pozo de potencial infinito. Determinar la probabilidad de encontrar la partícula en el intervalo $\Delta x = 0.002L$ si (a) $x = L/2$, (b) $x = 2L/3$, y (c) $x = L$. (Como Δx es muy pequeño, no se necesita hacer ninguna integración).
- (3) Considérese una partícula en el estado fundamental de un pozo de potencial infinito de anchura L . Calcular la probabilidad de encontrar la partícula en la región (a) $0 < x < L/2$, (b) $0 < x < L/3$ y (c) $0 < x < 3L/4$.
- (4) Representar esquemáticamente (a) la función de onda y (b) la densidad probabilidad del estado $n = 4$ para el pozo de potencial infinito.
- (5) Compruebe que si ψ_1 y ψ_2 son soluciones de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, su suma $\psi_1 + \psi_2$ es también una solución. Este principio de superposición se aplica a las soluciones de todas las ecuaciones diferenciales lineales.
- (6) Una partícula de masa m y energía total cero se encuentra en una región del espacio donde la función de onda es $\psi(x) = Ce^{-x^2/L^2}$. Determinar la energía potencial $V(x)$ y dibujarla esquemáticamente.

Problemas

- (7) (a) Determinar la energía del estado fundamental ($n = 1$) y de los dos primeros estados excitados de un protón en una caja unidimensional de longitud $L = 10^{-15}$ m = 1 fm. (Los valores son del orden de magnitud de las energías nucleares.) Calcular la longitud de onda de la radiación electromagnética emitida cuando el protón realiza una transición desde (b) $n = 2$ a $n = 1$, (c) $n = 3$ a $n = 2$ y (d) $n = 3$ a $n = 1$.
- (8) Las funciones de onda de una partícula de masa m en una caja unidimensional de longitud L centrada en el origen (de modo que los extremos coincidan con) vienen dadas por $\psi_n(x) = (2/L)^{1/2} \cos(n\pi x/L)$ para $n = 1, 3, 5, 7, \dots$ y $\psi_n(x) = (2/L)^{1/2} \sin(n\pi x/L)$ para $n = 2, 4, 6, 8, \dots$. Calcular el valor esperado de x y x^2 para el estado fundamental y para el primer nivel excitado.
- (9) Una partícula de masa m se sitúa en una caja unidimensional de longitud L . La caja es tan pequeña que el movimiento de la partícula es relativista, de modo que la relación $E = p^2/2m$ no es válida. (a) Derivar una expresión para los niveles de energía de la partícula usando la relación energía-momento relativista y la cuantización del momento que se deriva del confinamiento de la partícula.

- (b) Si la partícula es un electrón y la anchura de la caja es $L = 10^{-12}$ m, encontrar su energía cinética mínima. ¿Qué error se comete si se usa la fórmula no-relativista para la energía?
- (10) El principio de exclusión de Pauli afirma que no más de un electrón puede ocupar un estado cuántico determinado a la vez. Por lo tanto, si se hace un modelo atómico en el que n electrones están atrapados en una caja unidimensional, cada electrón debe de tener un valor distinto del número cuántico n . Calcular la energía que tendría el electrón más energético de un átomo de uranio (número atómico 92) suponiendo que la caja tiene 0.05 nm de anchura. Comparar esta energía con la del electrón en reposo.
- (11) Determinar el valor esperado de x y x^2 para el estado estacionario n de un pozo de potencial infinito de anchura L . Usar los resultados para calcular la incertidumbre $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ para este estado. ¿Qué valor debe tener n para que se recupere el resultado clásico?
- (12) Un electrón viene descrito por la función de onda

$$\psi(x) = Ce^{-|x|/x_0},$$

- donde C y x_0 son dos constantes. (a) Determinar C en términos de x_0 usando la condición de normalización. (b) Calcular el valor esperado de la posición $\langle x \rangle$ y su incertidumbre $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ en términos de x_0 . (c) Calcular la probabilidad de que el electrón sea encontrado dentro de una desviación estándar entorno al valor medio de la posición, es decir, en la región entre $\langle x \rangle - \Delta x$ y $\langle x \rangle + \Delta x$, y demostrar que es independiente de x_0 .
- (13) (a) Demostrar que para valores grandes de n , la diferencia relativa de energía entre el estado n y el estado $n + 1$ para una partícula en una caja viene dada aproximadamente por $(E_{n+1} - E_n)/E_n = 2/n$. Comentar como este resultado está relacionado con el principio de correspondencia de Bohr que nos dice que en el límite de números cuánticos muy grandes, los cálculos clásico y cuántico conducen a los mismos resultados.
- (14) Calcular el valor esperado del cuadrado de la componente x del momento lineal, $\langle p_x^2 \rangle$, de una partícula de masa m en el estado $n = 3$ de un pozo de potencial infinito de anchura L . Mostrar que el resultado está de acuerdo con el hecho de que la energía cinética de dicho estado viene dada por $9\pi^2\hbar^2/2mL^2$.
- (15) (a) Usando la ecuación de Schrödinger demostrar que $\langle p^2 \rangle = \langle 2m[E - V(x)] \rangle$ en general y que $\langle p^2 \rangle = \langle 2mE \rangle$ para el pozo de potencial infinito. (b) Usando el resultado anterior, calcular $\langle p^2 \rangle$ para el estado fundamental del pozo de potencial infinito. (c) Hallar el producto de las incertidumbres $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ y $\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$ para el estado fundamental del pozo de potencial infinito. Discutir el resultado a la luz del principio de incertidumbre posición-momento.
- (16) El problema del oscilador armónico puede usarse para describir moléculas. Por ejemplo, se ha visto que la molécula de hidrógeno H_2 tiene niveles de energía igualmente espaciados en 8.7×10^{-20} J. ¿Qué valor debería tener la constante recuperadora de un muelle para producir este espaciamiento de energías

suponiendo un modelo en el que un solo átomo de hidrógeno se ha fijado al muelle?

- (17) Demostrar que el valor esperado $\langle x \rangle = \int x|\psi|^2 dx$ es cero, tanto para el estado fundamental como para los primeros estados excitados del oscilador armónico.
- (18) Comprobar que para el estado fundamental del oscilador armónico $\langle x^2 \rangle = \int x^2|\psi|^2 dx = \hbar/(2m\omega) = 1/(4a)$. Usar este resultado para comprobar que el valor medio de la energía potencial es la mitad de la energía total. *Nota: usar las integrales del final de esta sección.*
- (19) La expresión $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ nos da la dispersión media de la posición de la partícula. (a) Considere un electrón atrapado en el potencial de un oscilador armónico. Su nivel energético más bajo es de 2.1×10^{-4} eV. Calcular Δx para este electrón. (b) Considere ahora un electrón atrapado en un potencial rectangular e infinito. Si la anchura del pozo es Δx , ¿cuál sería el nivel de energía mínima de este electrón?
- (20) Una partícula de masa m y número de ondas k_1 se desplaza hacia la derecha ocupando la parte negativa del eje x . En este semieje, la energía potencial de la partícula es nula, pero vale V_0 a lo largo de todo el semieje de x positivas, $V_0 > 0$. (a) Demostrar que si la energía total es $E = \alpha V_0$, donde $\alpha \geq 1$, el número de ondas k_2 en la región $x > 0$ viene dado por $k_2 = k_1 \sqrt{(\alpha - 1)/\alpha}$. Representar gráficamente el coeficiente de reflexión R y el de transmisión T para $1 \leq \alpha \leq 5$.
- (21) Una partícula que incide sobre un escalón de potencial de altura V_0 con una energía E está descrita por la función de onda

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \{ (1+i)e^{ikx} + (1-i)e^{-ikx} \} & \text{para } x < 0 \\ e^{-kx} & \text{para } x \geq 0. \end{cases}$$

- (a) Verificar que el coeficiente de reflexión es igual a uno en este caso. (b) ¿Cuál debe ser la relación entre k y E para que $\psi(x)$ sea una solución de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo en la región a la izquierda del escalón ($x < 0$)? ¿y para la región $x \geq 0$? ¿Qué podemos decir sobre el cociente E/V_0 ?
- (22) Una partícula de energía E se aproxima a una barrera rectangular de altura V_0 . ¿Cuál debe ser la relación entre E/V_0 para que el coeficiente de reflexión sea $1/2$?
- (23) Utilizar la expresión de la transmisión de una barrera rectangular para calcular el orden de magnitud de la probabilidad de que un protón salga de un núcleo por efecto túnel en una colisión con la barrera nuclear si su energía está 6 MeV por debajo del valor más alto de la barrera de potencial y la anchura de ésta es 10^{-15} m.
- (24) Para entender cómo un pequeño cambio en la energía de la barrera de una partícula alfa puede cambiar drásticamente su probabilidad de escaparse de un núcleo por efecto túnel, considere el caso del uranio ($Z = 92$). (a) Calcular clásicamente las distancias mínimas a las que podrían acercarse al núcleo de uranio partículas alfa de energías cinéticas 4 y 7 MeV. (b) Usar el resultado del

apartado anterior para calcular el coeficiente de transmisión relativo para estas partículas.

- (25) En un dispositivo semiconductor una capa de óxido forma una barrera de 0.6 nm de anchura y 9 eV entre dos electrodos metálicos. En este dispositivo los electrones son acelerados con una diferencia de potencial de 4 V, es decir, poseen una energía de 4 eV cuando se aproximan a la barrera. (a) ¿Cuál es la fracción de electrones que atravesará la barrera por efecto túnel? (b) ¿Cuál debería ser la diferencia de potencial que acelera a los electrones para que dicha fracción aumente en un factor 2?
- (26) Un haz de protones, cada uno con una energía cinética de 40 MeV, se aproxima a un escalón de potencial de 30 MeV de altura. (a) ¿Cuál es la fracción de protones que será reflejada y transmitida? (b) ¿Cambia la respuesta si las partículas fueran electrones?
- (27) Demostrar que la función de onda del estado fundamental y la función de onda del primer estado excitado del oscilador armónico son ortogonales, es decir, demostrar que $\int \psi_0(x)\psi_1(x)dx = 0$.
- (28) Para las funciones de onda correspondientes a una partícula en un pozo de potencial rectangular, demostrar que $\int \psi_n(x)\psi_m(x)dx = 0$, es decir que ψ_n y ψ_m son ortogonales.

Problemas avanzados

- (29) (a) Clásicamente, la energía cinética media del oscilador armónico es igual a la energía potencial media. Podemos suponer que esto también es cierto para el oscilador armónico cuántico. Utilizar esta condición para determinar el valor esperado de p^2 para el estado fundamental del oscilador armónico. (b) Sabemos que para el oscilador armónico clásico, el promedio de p es cero. Puede demostrarse que para el oscilador cuántico $\langle p \rangle = 0$. Utilizar los resultados de los problemas anteriores para determinar el producto de incertidumbres $\Delta x \Delta p$ correspondiente al estado fundamental del oscilador armónico. *Nota: usar las integrales del final de esta sección.*
- (30) El objetivo de este problema es deducir la energía del estado fundamental del oscilador armónico utilizando la forma precisa del principio de incertidumbre $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$, en donde Δx y Δp vienen definidos por las desviaciones típicas $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ y $\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$. Proceder del modo siguiente: (i) expresar la energía clásica total en función de la posición y la cantidad de movimiento p utilizando $V(x) = (1/2)m\omega^2 x^2$ y $K = p^2/2m$. (ii) Utilizar la simetría de la función energía potencial para obtener que $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle}$ y $\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle}$. (iii) Suponer que $\Delta p = \hbar/(2\Delta x)$ para obtener la energía media $\langle E \rangle = \hbar^2/(8mZ) + (1/2)m\omega^2 Z$, en donde $Z = \langle x^2 \rangle$. (iv) Hacer $dE/dZ = 0$ para determinar el valor de Z para el cual E es mínima. (v) Demostrar que la energía mínima viene dada por $\langle E \rangle_{\min} = (1/2)\hbar\omega$.

- (31) (a) Demostrar que el coeficiente de transmisión para una barrera rectangular de anchura a y altura V_0 para energías $E < V_0$ viene dado por

$$T(E) = \frac{4E(V_0 - E)}{4E(V_0 - E) + V_0^2 \sinh^2(\alpha a)},$$

donde $\alpha = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$. (b) Representar gráficamente esta transmisión como función de la anchura de la barrera a para el caso de un electrón que incide sobre una barrera de altura $V_0 = 4$ eV con energías de 1, 2 y 3 eV.

- (32) Una partícula de masa m próxima a la superficie de la tierra en $z = 0$ puede describirse por la energía potencial: $U = mgz$ para $z > 0$ y $U = \infty$ para $z < 0$. Para cierto valor positivo de la energía total E , indicar cuál es la región permitida clásicamente en un esquema $U(z)$ en función de z . Representar también la energía cinética clásica en función de z . La ecuación de Schrödinger es difícil de resolver en este caso. Utilizar argumentos cualitativos respecto a la curvatura de la función de onda dada por la ecuación de Schrödinger, y hacer un esquema de la forma que cabe esperar para la función de onda del estado fundamental y de los dos primeros estados excitados.

Integrales útiles:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}; \quad \int_0^\infty x e^{-ax^2} dx = \frac{2}{a}; \quad \int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}}.$$

Capítulo 5

Física atómica

En este capítulo vamos a emplear lo que hemos aprendido de mecánica cuántica hasta ahora para describir la estructura de los átomos. Además, discutiremos por primera vez conceptos esenciales en la mecánica cuántica como el espín de las partículas o el principio de exclusión de Pauli.

5.1 Espectros atómicos.

Antes de abordar los diversos modelos que describen la estructura de los átomos, es importante revisar el trabajo experimental sobre los espectros atómicos que sirvió como guía y como test a los modelos teóricos del átomo. Como ya explicamos en el Capítulo 3, los sólidos y los líquidos emiten radiación térmica con un espectro de longitudes de onda continuo (el espectro de cuerpo negro) que viene descrito por la ley de Planck. Este espectro tiene una forma común y la curva de intensidad como función de la longitud de onda presenta un máximo que se corre hacia longitudes de onda más cortas cuando se aumenta la temperatura, ver Fig. 3.3.

Contrariamente a este espectro continuo, el espectro de un gas a bajas presiones sometido a un campo eléctrico exhibe una serie de líneas discretas. Cuando la luz emitida por un gas se examina con un espectrómetro, se encuentra que consiste en unas pocas líneas de color puro sobre un fondo oscuro, ver Fig. 5.1. Además, como se puede ver en esta figura, las longitudes de onda de las líneas son características del elemento químico. El espectro de líneas más sencillo es el del hidrógeno y lo describiremos en detalle dado su importancia histórica. Otros átomos como el mercurio, helio y neón dan lugar a espectros completamente diferentes. Ya que no hay dos elementos que presenten el mismo espectro de líneas, este fenómeno representa una forma práctica y muy sensible de identificar los elementos presentes en una muestra desconocida. La espectroscopía atómica se desarrolló a lo largo del siglo XIX y gracias a sus avances fue posible incluso el descubrimiento de nuevos elementos químicos como el rubidio o el cesio.

Uno de los investigadores más importantes en el campo de la espectroscopía atómica fue sin duda Robert Kirchhoff. Entre sus grandes aportaciones se encuen-

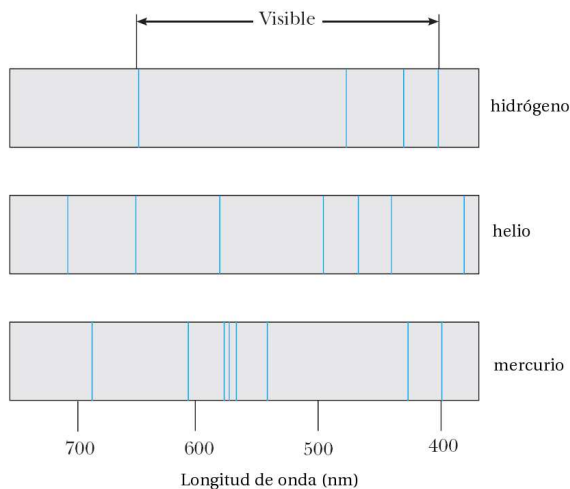


Fig. 5.1 Líneas de los espectros de emisión de algunos elementos.

tran las bases de la **espectroscopía de absorción** y la explicación de las líneas D de Fraunhofer del espectro solar. En 1814, Joseph Fraunhofer pasó un espectro continuo procedente del Sol a través de una rendija estrecha y después por un prisma. Fraunhofer observó el sorprendente resultado de cerca de 1000 finas líneas oscuras en el espectro supuestamente continuo del Sol, y asignó las letras A, B, C, D, ... a las más destacadas líneas oscuras. Kirchhoff dedujo correctamente que las misteriosas líneas negras se deben a una nube de átomos vaporizados en el exterior del Sol, en las capas más frías, que absorben frecuencias discretas de la radiación continua proveniente del centro del Sol. Además, demostró que las líneas D de Fraunhofer eran producidas por sodio vaporizado y que tenían las mismas longitudes de onda que las intensas líneas amarillas en el espectro de emisión del sodio. Kirchhoff también dedujo que todas las líneas oscuras de Fraunhofer debían atribuirse a la absorción por diversos elementos presentes en el Sol. De un solo golpe abrió el camino para determinar la composición de las estrellas que están a billones de kilómetros de la Tierra. Su método elegante pero sencillo para demostrar la presencia de vapor de sodio en la atmósfera solar se muestra de forma esquemática en la Fig. 5.2.

Hoy día, la espectroscopía de absorción es tan importante como la espectroscopía de emisión para realizar análisis cualitativos y cuantitativos de elementos y grupos moleculares. En general, un espectro de absorción se obtiene al hacer pasar luz proveniente de una fuente continua (ya sea en las regiones ultravioleta, visible o infrarroja) a través de un gas del elemento que se desea analizar. El espectro de absorción consta de una serie de líneas oscuras sobrepuestas en el espectro continuo emitido por una fuente. Cada línea en el espectro de absorción de un elemento coincide con una línea en el espectro de emisión del mismo elemento. Sin embargo,

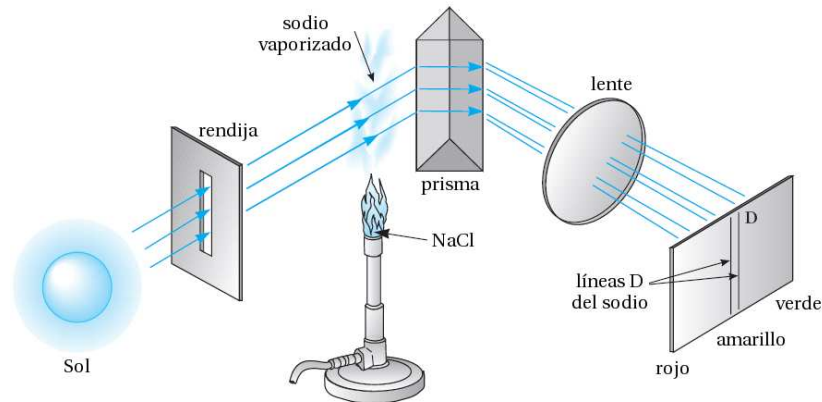


Fig. 5.2 Experimento de Kirchhoff explicando el origen de las líneas D de Fraunhofer del espectro solar. Las líneas D se oscurecen notablemente cuando se introduce el vapor de sodio entre la rendija y el prisma.

no todas las líneas de emisión están presentes en un espectro de absorción. Las diferencias entre los espectros de emisión y absorción son complicadas en general y dependen de la temperatura del vapor absorbente.

En el espectrómetro de absorción atómica se hace uso de la coincidencia de las líneas de absorción y de emisión. Este dispositivo se usa habitualmente para medir partes por millón (ppm) de metales en objetos desconocidos. Por ejemplo, si se desea medir el sodio, entonces se elige como fuente de luz una lámpara de sodio que emite un espectro de líneas. El objeto desconocido se calienta con una llama para vaporizar la muestra, romper los enlaces químicos del sodio con otros elementos y producir un gas de sodio elemental. Luego, el espectrómetro se sintoniza a una longitud de onda para la que existen líneas de absorción y de emisión (por ejemplo, una de las líneas D a 588.99 o 589.59 nm), y el oscurecimiento o disminución en la intensidad se mide con un fotomultiplicador sensible. La disminución en la intensidad es una medida de la concentración de sodio. Con esta técnica extremadamente selectiva y una calibración idónea es posible medir concentraciones de 0.1 ppm.

Desde 1860 hasta 1885 se acumularon muchas mediciones espectroscópicas. En 1885, al poco de ser realizadas mediciones precisas de cuatro líneas de emisión visibles del hidrógeno por Anders Ångström, un físico sueco, un maestro de escuela suizo, Johann Jakob Balmer, publicó un artículo donde proponía una fórmula que describía las cuatro líneas visibles: H_α (roja), H_β (verde), H_γ (azul) y H_δ (violeta). En la Fig. 5.3 se muestran estas y otras líneas del espectro de emisión del hidrógeno. Balmer escribió su fórmula como:

$$\lambda = 364.6 \left(\frac{m^2}{m^2 - 2^2} \right) \text{ nm} \quad m = 3, 4, 5, \dots \quad (5.1)$$

donde λ es la longitud de onda emitida en nm. Nótese que $m = 3, 4, 5, \dots$, donde H_α corresponde a $m = 3$, H_β corresponde a $m = 4$, etc. Balmer sugirió que esto

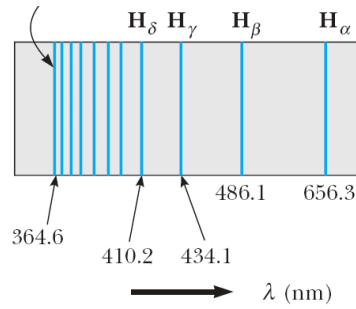


Fig. 5.3 La serie de Balmer para el hidrógeno (espectro de emisión).

podía ser un caso especial de una expresión más general aplicable a los espectros de otros elementos. Tal expresión, deducida por Johannes R. Rydberg y Walter Ritz, y llamada **fórmula de Rydberg-Ritz**, especifica el valor inverso de la longitud de onda de las líneas espectrales de átomos hidrogenoides (con un sólo electrón):

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \quad (5.2)$$

en donde n_1 y n_2 son números naturales con $n_1 > n_2$ y R es la **constante de Rydberg**, que es la misma para todas las series espectrales del mismo elemento y varía sólo ligeramente y de forma regular de elemento en elemento. Para el hidrógeno, R tiene el valor

$$R_H = 1.096776 \times 10^7 \text{ m}^{-1}. \quad (5.3)$$

La fórmula de Rydberg-Ritz expresa las longitudes de onda para todas las líneas del espectro del hidrógeno, así como (de forma aproximada) las de los elementos alcalinos, tales como el litio y el sodio. La serie de Balmer del hidrógeno que se da en la ec. (5.1) también viene dada por la ec. (5.2) con $R = R_H$, $n_2 = 2$ y $n_1 = m$. Existen otras series de líneas, además de la de Balmer, que vienen dadas por un valor constante de n_2 y un $n_1 > n_2$ variable. La Tabla 5.1 presenta una lista con algunas de estas series que reciben el nombre de su descubridor correspondiente.

Tabla 5.1 Algunas series espectrales del átomo de hidrógeno.

Serie de Lyman (ultravioleta)	$n_2 = 1$	$n_1 = 2, 3, 4, \dots$
Serie de Balmer (visible-ultravioleta)	$n_2 = 2$	$n_1 = 3, 4, 5, \dots$
Serie de Paschen (infrarrojo)	$n_2 = 3$	$n_1 = 4, 5, 6, \dots$
Serie de Brackett (infrarrojo)	$n_2 = 4$	$n_1 = 5, 6, 7, \dots$
Serie de Pfund (infrarrojo)	$n_2 = 5$	$n_1 = 6, 7, 8, \dots$

Las series poseen el nombre de su descubridor. Entre paréntesis se indica el rango del espectro electromagnético en el que aparecen estas líneas.

Ejemplo 5.1: Calcular las longitudes de onda de la primera línea de las series de Lyman y Paschen para el átomo de hidrógeno.

Solución. La serie de Lyman corresponde a $n_2 = 1$ y $n_1 > n_2$ en la fórmula de Rydberg-Ritz. La primera línea de esta serie (la de mayor longitud de onda) tiene un longitud de onda dada por:

$$\frac{1}{\lambda_{12}} = R_H \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3}{4} R_H = 8.22 \times 10^6 \text{ m}^{-1} \Rightarrow \lambda_{12} = 121.6 \text{ nm}$$

y se encuentra en el ultravioleta. Para la serie de Paschen ($n_2 = 3$), la primera línea corresponde a $n_1 = 4$ y su longitud de onda es

$$\frac{1}{\lambda_{34}} = R_H \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \right) = \frac{7}{144} R_H = 5.332 \times 10^5 \text{ m}^{-1} \Rightarrow \lambda_{34} = 1876 \text{ nm}$$

y se encuentra en el rango de los infrarrojos. \square

5.2 Modelo de Bohr del átomo de hidrógeno

Los primeros modelos atómicos con cierto fundamento fueron propuestos a finales del siglo XIX y comienzos del XX. A comienzos del siglo XX el modelo más popular, debido a J.J. Thomson, consideraba diversas distribuciones de electrones embebidos en algún tipo de fluido que contenía la mayor parte de la masa del átomo y la carga suficiente para que el átomo fuera eléctricamente neutro. Como la teoría electromagnética clásica predice que una carga oscilante de frecuencia f radia energía electromagnética de esta frecuencia, Thomson intentó determinar configuraciones estables con modos normales de vibración de frecuencias iguales a las del espectro del átomo. Una dificultad de este modelo y de todos los que se intentaron fue que de acuerdo con la física clásica, las fuerzas eléctricas solas no pueden producir un equilibrio estable. Thomson fue incapaz de desarrollar un modelo que predijera las frecuencias observadas de ningún átomo.

El modelo de Thomson fue refutado por una serie de experimentos realizados por H.W. Geiger y E. Marsden bajo la supervisión de E. Rutherford hacia 1911, en los cuales un haz de partículas alfa, emitidas por radio radiactivo, era dispersado por los átomos de una lámina de oro. Rutherford demostró que el número de partículas alfa dispersadas bajo ángulos grandes no podía explicarse mediante un átomo en el cual la carga positiva estuviera distribuida en toda su dimensión atómica (la cual se sabía que era de unos 0.1 nm de diámetro), sino que requería que la carga positiva y la mayor parte de la masa del átomo estuviera concentrada en una región muy pequeña, ahora llamada núcleo con un diámetro del orden de $10^{-6} \text{ nm} = 1 \text{ fm}$.

Niels Bohr, en 1912, cuando trabajaba en el laboratorio de Rutherford, propuso un modelo del átomo de hidrógeno que reproducía con éxito los espectros observados. De acuerdo con el modelo de Bohr, el electrón del átomo de hidrógeno se mueve bajo la influencia de la atracción de Coulomb hacia el núcleo positivo de acuerdo

con la mecánica clásica, la cual predice órbitas circulares o elípticas con el centro de fuerzas en un foco, como ocurre en el movimiento de los planetas alrededor del Sol. El resto de esta sección está dedicado a describir este modelo y sus predicciones en cierto detalle.

La energía en una órbita circular

Consideraremos un electrón con carga $-e$ que se mueve en una órbita circular de radio r alrededor de una carga positiva Ze , tal como el núcleo de un átomo de hidrógeno ($Z = 1$) o el de un átomo de helio simplemente ionizado ($Z = 2$). La energía total puede relacionarse con el radio de la órbita. La energía potencial del electrón a una distancia r es

$$U = \frac{kq_1q_2}{r} = \frac{k(Ze)(-e)}{r} = -\frac{kZe^2}{r}, \quad (5.4)$$

en donde k es la constante de Coulomb. La energía cinética E_c se puede obtener en función de r utilizando la segunda ley de Newton:

$$k\frac{Ze^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{kZe^2}{r}. \quad (5.5)$$

Nótese que $U = -2E_c$. La energía total es

$$E = E_c + U = -\frac{1}{2}\frac{kZe^2}{r}. \quad (5.6)$$

Aunque con este modelo se explica la estabilidad mecánica del átomo, la teoría electromagnética clásica exige que un átomo en estas condiciones debería ser eléctricamente inestable, ya que el electrón acelera cuando se mueve circularmente y, por tanto, radia energía electromagnética de frecuencia igual a la de su movimiento. De acuerdo con la teoría clásica, este átomo colapsaría rápidamente y el electrón se movería en espiral hasta chocar con el núcleo, radiando al exterior su energía.

Postulados de Bohr

Bohr resolvió la dificultad del colapso del átomo postulando que sólo están permitidas ciertas órbitas, llamados *estados estacionarios*, y que en estas órbitas el electrón no radia energía. La radiación sólo se emite cuando el electrón sufre una transición de una órbita a otra. De este modo, el **primer postulado de Bohr** se puede enunciar como:

El electrón del átomo de hidrógeno sólo se mueve en ciertas órbitas circulares, no radiantes, llamadas estados estacionarios.

El **segundo postulado de Bohr** relaciona la frecuencia de la radiación con las energías de los estados estacionarios. Si E_i y E_f son las energías inicial y final

del átomo, la frecuencia de la radiación emitida durante una transición viene dada por

$$f = \frac{E_i - E_f}{h} \quad (5.7)$$

donde h es la constante de Planck. Este postulado es equivalente a la hipótesis de conservación de la energía con la emisión de un fotón de energía hf . Combinando las ecs. (5.6) y (5.7) tenemos que

$$f = \frac{E_i - E_f}{h} = \frac{1}{2} \frac{kZe^2}{h} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right), \quad (5.8)$$

donde r_1 y r_2 son los radios de las órbitas inicial y final.

Para obtener las frecuencias requeridas por la fórmula de Rydberg-Ritz, $f = c/\lambda = cR(1/n_2^2 - 1/n_1^2)$, es evidente que los radios de las órbitas estables deben ser proporcionales a los cuadrados de números enteros. Bohr buscó una condición cuántica para los radios de los átomos estables que justificaran este resultado. Después de muchos ensayos, encontró una solución que se resume en el llamado **tercer postulado de Bohr**:

El momento angular del electrón en una órbita estable es igual a un número entero de \hbar .

Como el momento angular en una órbita circular es mvr , el postulado se puede escribir como

$$mvr = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.9)$$

donde $\hbar = h/(2\pi) = 1.055 \times 10^{-34}$ J·s = 6.582×10^{-16} eV·s.

Veamos cuáles son los radios permitidos según el tercer postulado de Bohr. Usando la segunda ley de Newton tenemos que

$$\frac{kZe^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{kZe^2}{mr}. \quad (5.10)$$

Por otro lado, el tercer postulado de Bohr nos dice que

$$v^2 = n^2 \frac{\hbar^2}{m^2 r^2}. \quad (5.11)$$

Igualando estos dos resultados:

$$n^2 \frac{\hbar^2}{m^2 r^2} = \frac{kZe^2}{mr} \Rightarrow r = n^2 \frac{\hbar^2}{mkZe^2} = n^2 \frac{a_0}{Z} \quad (5.12)$$

donde $a_0 = \hbar^2/(mke^2) = 0.0529$ nm es el **radio de Bohr**.

Ahora podemos determinar las frecuencias permitidas:

$$f = \frac{1}{2} \frac{kZe^2}{h} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = Z^2 \frac{mk^2 e^4}{4\pi\hbar^3} \left(\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1} \right) \quad (5.13)$$

Si comparamos esta expresión para $f = c/\lambda$ con $Z = 1$ con la fórmula empírica de Rydberg-Ritz, se obtiene la constante de Rydberg:

$$R_H = \frac{mk^2e^4}{4\pi c\hbar^3} \quad (5.14)$$

que está de acuerdo con el resultado experimental.

Ejemplo 5.2: Para ondas en una circunferencia, la condición de onda estacionaria es que quepan un número entero de longitudes de onda en la circunferencia. Esto es, $n\lambda = 2\pi r$, con $n = 1, 2, 3, \dots$. Demostrar que esta condición para las ondas electrónicas implica la cuantización del momento angular.

Solución. Usando la expresión del momento del electrón postulada por de Broglie, tenemos que

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{n\hbar}{2\pi r} = n\frac{\hbar}{r}.$$

Con lo cual el momento angular se puede expresar como:

$$L = mvr = pr = n\hbar$$

y, por tanto, está cuantizado como queríamos demostrar. \square

Niveles de energía

La energía mecánica total del electrón en el átomo de hidrógeno está relacionada con el radio de la órbita circular que está cuantizado. De este modo, la energía también está cuantizada y viene dada por:

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{kZe^2}{r} = -\frac{1}{2} \frac{kZ^2e^2}{n^2a_0} = -\frac{1}{2} \frac{mk^2Z^2e^4}{n^2\hbar^2}, \quad (5.15)$$

o de forma más compacta:

$$E_n = -Z^2 \frac{E_0}{n^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.16)$$

donde $E_0 = mk^2e^4/(2\hbar^2) = (1/2)ke^2/a_0 \approx 13.6$ eV.

Las transiciones entre estas energías permitidas dan lugar a la emisión o absorción de un fotón cuya frecuencia viene dada por $f = (E_i - E_f)/h$ y cuya longitud de onda es $\lambda = c/f = hc/(E_i - E_f)$.¹ Como las energías están cuantizadas, las frecuencias y longitudes de onda de la radiación emitida por el átomo de hidrógeno están también cuantizadas, lo que está de acuerdo con el espectro de rayas observado.

La Fig. 5.4 muestra el diagrama de niveles energéticos del hidrógeno. La energía del átomo de hidrógeno en el estado fundamental es $E_1 = -13.6$ eV. Cuando n tiende a infinito la energía se aproxima a cero. El proceso de extracción de un electrón de un átomo se denomina ionización y la energía necesaria para extraer el

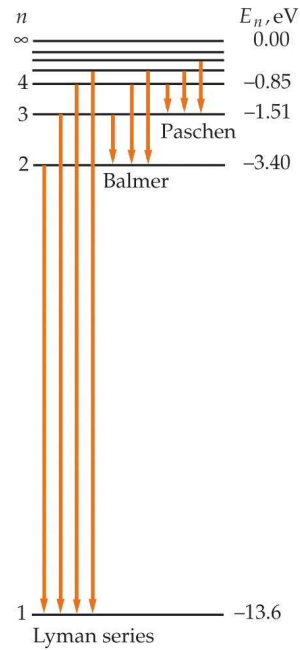


Fig. 5.4 Diagrama de niveles de energía del hidrógeno que muestra las primeras transiciones de las series de Lyman, Balmer y Paschen.

electrón se llama **energía de ionización**. Para el átomo de hidrógeno la energía de ionización es 13.6 eV.

Ejemplo 5.3: Determinar (a) la energía y (b) la longitud de onda más larga entre las rayas de la serie de Lyman.

Solución. Dicha raya corresponde a la transición entre los estados $n = 2$ y $n = 1$ del átomo de hidrógeno. Por tanto, la energía del fotón será:

$$E_{\text{fotón}} = \Delta E = E_i - E_f = E_2 - E_1 = \frac{-13.6 \text{ eV}}{2^2} - \frac{-13.6 \text{ eV}}{1^2} = 10.2 \text{ eV}$$

y la correspondiente longitud de onda será:

$$\lambda = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{10.2 \text{ eV}} = 121.6 \text{ nm.} \quad \square$$

Dos años después de publicarse el modelo de Bohr, Franck y Hertz, dos físicos alemanes, realizaron un famoso experimento que demostraba de forma directa la cuantización de los niveles de energía en los átomos, confirmando así las ideas básicas de Bohr. Este experimento, galardonado con el premio Nobel de física en 1925, se describe en el Apéndice B de estas notas. De todos modos, y a pesar de los éxitos del modelo de Bohr, dicho modelo posee muchas limitaciones. En primer lugar, no

¹Para evaluar numéricamente esta expresión es conveniente usar $hc = 1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}$.

justifica los postulados, salvo por el acuerdo con los datos espectroscópicos, y en segundo lugar, los intentos de aplicar el modelo a átomos más complicados tuvieron poco éxito.

5.3 La ecuación de Schrödinger en tres dimensiones.

Nuestro siguiente paso lógico ha de ser el de describir una teoría verdaderamente cuántica del átomo de hidrógeno, es decir, basada en la ecuación de Schrödinger. Pero antes de hacerlo, es conveniente discutir en esta sección las sutilezas que surgen cuando se utiliza la ecuación de Schrödinger para un problema tridimensional.

La ecuación de Schrödinger en tres dimensiones adopta la siguiente forma en coordenadas cartesianas

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + V(x, y, z)\psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z), \quad (5.17)$$

que es una generalización más o menos obvia de la correspondiente ecuación para el caso unidimensional. Nótese que en general la función de onda y el potencial son funciones de las tres coordenadas x, y, z .

Pozo infinito en tres dimensiones

Comenzamos por analizar la ec. (5.17) en el caso tridimensional más sencillo posible como es el de un pozo (cúbico) infinito. En este caso el potencial viene dado por

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x, y, z < L \\ \infty & \text{si } x, y, z < 0 \text{ ó } x, y, z > L \end{cases} \quad (5.18)$$

Este potencial describe simplemente la situación en la que una partícula está confinada a moverse en el interior de un cubo de lado L , donde lo hace de forma libre.

En este caso la función de onda es *separable*, es decir, se puede escribir como el producto de funciones que sólo dependen de una de las coordenadas:

$$\psi(x, y, z) = \psi_1(x)\psi_2(y)\psi_3(z). \quad (5.19)$$

Nuestro análisis del pozo infinito en una dimension sugiere que las funciones ψ_i son simplemente senos, es decir, podemos probar con la siguiente solución:

$$\psi(x, y, z) = A \text{sen}(k_1 x) \text{sen}(k_2 y) \text{sen}(k_3 z). \quad (5.20)$$

Substituyendo en la ec. (5.17), encontramos que la energía viene dada por

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2), \quad (5.21)$$

que es equivalente a $E = (1/2m)(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$, con $p_x = \hbar k_1$, etc. Los números de onda sólo pueden adoptar los valores $k_i = n_i \pi / L$ debido a las condiciones de contorno (anulación de la función de onda en las paredes del pozo). Por tanto,

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \quad (5.22)$$

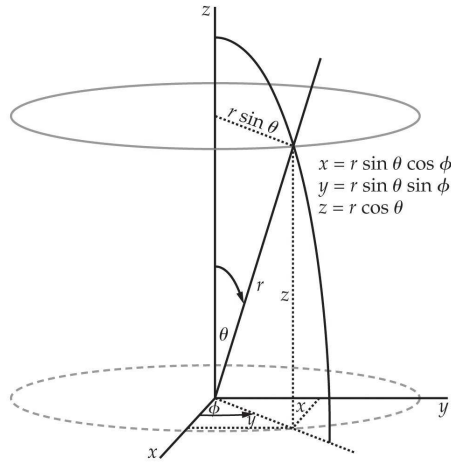


Fig. 5.5 Coordenadas esféricas.

donde n_i son números enteros mayores que cero.

El estado fundamental viene dado por $n_1 = n_2 = n_3 = 1$. El primer estado excitado se puede obtener de tres formas diferentes: $n_1 = 2, n_2 = n_3 = 1$; $n_2 = 2, n_1 = n_3 = 1$; y $n_3 = 2, n_1 = n_2 = 1$.

Con respecto a las funciones de onda, por ejemplo para $n_1 = 2$ y $n_2 = n_3 = 1$ tenemos

$$\psi_{211} = A \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi y}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi z}{L} \right). \quad (5.23)$$

Un nivel de energía que tiene más de una función de onda asociada con él se dice que está **degenerado**.

La ecuación de Schrödinger en coordenadas esféricas

En la próxima sección vamos a considerar el potencial correspondiente a un átomo (potencial coulombiano):

$$V(r) = -\frac{kZe^2}{r}. \quad (5.24)$$

Se puede tener en cuenta el movimiento nuclear reemplazando la masa del electrón por la masa reducida $\mu = m_e M_N / (m_e + M_N)$, donde M_N es la masa del núcleo. La ecuación de Schrödinger para una partícula de masa μ moviéndose en tres dimensiones se expresa como

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + V(x, y, z) \psi(x, y, z) = E \psi(x, y, z). \quad (5.25)$$

Ya que el potencial $V(r)$ sólo depende de $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, el problema se describe forma más conveniente en coordenadas esféricas (véase Fig. 5.5),

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi; \quad y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi; \quad z = r \cos \theta. \quad (5.26)$$

En estas coordenadas la ecuación de Schrödinger se escribe como:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] + V(r) \psi(r, \theta, \phi) = E \psi(r, \theta, \phi). \quad (5.27)$$

5.4 Teoría cuántica del átomo de hidrógeno

El objetivo de esta sección es resolver la ec. (5.27) para describir la estructura electrónica del átomo de hidrógeno. La resolución de este problema es un poco técnica y, aunque la detallaremos brevemente, nos centraremos en la discusión del resultado final.

Empezaremos por proponer una solución separable del tipo

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r) f(\theta) g(\phi). \quad (5.28)$$

Substituyendo en la ec. (5.27) tenemos

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} f g \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{\hbar^2}{2\mu r^2} R g \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{df}{d\theta} \right) - \frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \frac{R f}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 g}{d\phi^2} + V R f g = E R f g. \quad (5.29)$$

Multiplicando por $-2\mu r^2 / (\hbar^2 R f g)$:

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2\mu r^2}{\hbar^2} [E - V(r)] = - \left[\frac{1}{f(\theta) \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{df(\theta)}{d\theta} \right) + \frac{1}{g(\phi) \sin^2 \theta} \frac{d^2 g(\phi)}{d\phi^2} \right]. \quad (5.30)$$

La única forma de satisfacer esta ecuación es que ambos miembros sean iguales a una constante que llamaremos $l(l+1)$. Nótese además que la solución de la ecuación que surge del miembro de la derecha es independiente de la forma de $V(r)$.

La ecuación para las funciones $f(\theta)$ y $g(\phi)$ queda:

$$\frac{1}{g(\phi)} \frac{d^2 g(\phi)}{d\phi^2} = -l(l+1) \sin^2 \theta - \frac{\sin \theta}{f(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{df(\theta)}{d\theta} \right). \quad (5.31)$$

De nuevo, esta ecuación admite una solución separable donde ambos miembros son iguales a una constante que llamaremos $-m^2$. La ecuación para la función $g(\phi)$ es

$$\frac{d^2 g(\phi)}{d\phi^2} + m^2 g(\phi) = 0, \quad (5.32)$$

cuya solución es $g_m(\phi) = e^{im\phi}$.

La condición de que ψ sea una función univaluada implica que $g(\phi + 2\pi) = g(\phi)$, lo que requiere que m sea un número entero positivo, negativo o cero.

La solución para la ecuación de $f(\theta)$ es

$$f_{lm}(\theta) = \frac{(\sin \theta)^{|m|}}{2^{|l|} |l|!} \left[\frac{d}{d(\cos \theta)} \right]^{l+|m|} (\cos^2 \theta - 1)^l. \quad (5.33)$$

La condición de que ψ sea finita requiere que $f(\theta)$ sea finita en $\theta = 0$ y en $\theta = \pi$, lo que restringe los valores de l que debe ser un entero mayor o igual que cero y además $m \leq l$. La notación usada refleja el vínculo entre l y m , donde a cada valor de l le corresponden $2l + 1$ valores de m , desde $-l$ hasta $+l$ pasando por cero. Las funciones $f_{lm}(\theta)$ reciben el nombre de polinomios de Legendre.

El producto de $f_{lm}(\theta)$ por $g_m(\phi)$, que describe la dependencia angular de $\psi(r, \theta, \phi)$ para cualquier potencial con simetría esférica, forma un conjunto de funciones $Y_{lm}(\theta, \phi)$ conocidas como **armónicos esféricos**:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = f_{lm}(\theta) g_m(\phi) \quad (5.34)$$

$l = 0$	$m = 0$	$Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$
$l = 1$	$m = 1$	$Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \text{sen } \theta e^{i\phi}$
$l = 1$	$m = 0$	$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$
$l = 1$	$m = -1$	$Y_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \text{sen } \theta e^{-i\phi}$
\vdots	\vdots	\vdots

A continuación vamos a analizar el significado físico de l y m , y veremos que están íntimamente ligados con el momento angular del electrón.

Cuantización del momento angular

La definición del momento angular \vec{L} de una masa moviéndose con velocidad \vec{v} , y por tanto con momento lineal \vec{p} , en un punto \vec{r} viene dada por

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}; \quad \vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (5.35)$$

En los casos en los que el potencial sólo depende de r (módulo del vector de posición), como en el caso de fuerzas centrales, \vec{L} se conserva y el movimiento clásico de la masa m reside en un plano fijo perpendicular a \vec{L} , que contiene al origen. El momento \vec{p} tiene componentes (en el plano) \vec{p}_r a lo largo de \vec{r} y \vec{p}_t perpendicular a \vec{r} , cuyas magnitudes están dadas por

$$p_r = \mu \left(\frac{dr}{dt} \right) \quad \text{y} \quad p_t = \mu r \left(\frac{dA}{dt} \right), \quad (5.36)$$

donde A es el ángulo entre \vec{p} y \vec{r} . El módulo constante de \vec{L} viene dado por

$$L = r p_t \text{sen } A = r p_t. \quad (5.37)$$

Por otra parte, la energía cinética se puede escribir como

$$E_c = \frac{p^2}{2\mu} = \frac{p_r^2 + p_t^2}{2\mu} = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{L^2}{2\mu r^2} \quad (5.38)$$

y la energía total será

$$E = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r). \quad (5.39)$$

Definiendo el potencial efectivo $V_{ef}(r) = L^2/(2\mu r^2) + V(r)$, podemos escribir

$$E = \frac{p_r^2}{2\mu} + V_{ef}(r). \quad (5.40)$$

La ec. (5.39) o la (5.40) se puede utilizar para escribir la ecuación de Schrödinger. Para ello necesitamos los operadores de p_r^2 y L^2 en coordenadas esféricas. Se puede demostrar que

$$\hat{p}_r^2 = -\hbar^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad (5.41)$$

que dividido por 2μ y operando en ψ da lugar al primer término de la ec. (5.27) que corresponde a la energía cinética. De modo similar, el operador \hat{L}^2 se puede expresar como

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right], \quad (5.42)$$

que dividido por $2\mu r^2$ y operando sobre ψ nos da el segundo término de la ec. (5.27). Con estas expresiones podemos ver que la ecuación que verifican los armónicos esféricos $Y_{lm}(\theta, \phi) = f_{lm}(\theta)g(\phi)$, que recordemos que es

$$-\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] Y_{lm}(\theta, \phi) = l(l+1)\hbar^2 Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (5.43)$$

se puede escribir como

$$\hat{L}^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = l(l+1)\hbar^2 Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (5.44)$$

o de otro modo, ya que $\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$,

$$\hat{L}^2 \psi(r, \theta, \phi) = l(l+1)\hbar^2 \psi(r, \theta, \phi). \quad (5.45)$$

De este modo, llegamos a un resultado muy importante que nos dice que para cualquier potencial central $V = V(r)$, el momento angular está cuantizado y sus valores permitidos son

$$|\vec{L}| = L = \sqrt{l(l+1)}\hbar \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.46)$$

donde l se conoce como el número cuántico de momento angular o simplemente **número cuántico orbital**.

Del mismo modo, podemos demostrar que L_z , la componente z de \vec{L} , está también cuantizada y sus valores son

$$L_z = m\hbar \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l. \quad (5.47)$$

El significado físico de la ec. (5.47) es que el momento angular \vec{L} , cuyo módulo está cuantizado con valores $\sqrt{l(l+1)}\hbar$, sólo puede apuntar en aquellas direcciones

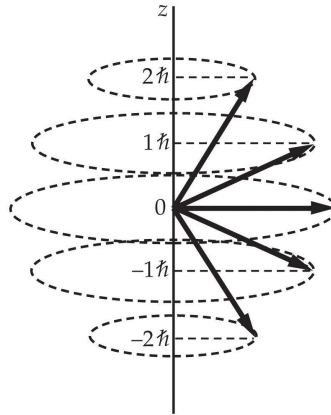


Fig. 5.6 Diagrama que ilustra los posibles valores de la componente z del momento angular para el caso $l = 2$.

en las que la proyección de \vec{L} a lo largo del eje z esté dada por uno de los valores $m\hbar$. Este hecho se ilustra en la Fig. 5.6 para el caso $l = 2$. De este modo, \vec{L} está también cuantizado. Al número cuántico m se le conoce como **número cuántico magnético**.

Ejemplo 5.4: Si un sistema tiene un momento angular caracterizado por $l = 2$, (a) ¿cuáles son los valores posibles de L_z ?, (b) ¿cuál es el módulo de \vec{L} ? y (c) ¿cuál es el ángulo más pequeño entre \vec{L} y el eje z ?

Solución. (a) L_z viene dado por $L_z = m\hbar$ con $m = 0, \pm 1, \pm 2$. Por tanto, L_z puede tomar los valores: $-2\hbar, -\hbar, 0, \hbar, 2\hbar$.

(b) El módulo de \vec{L} viene dado por

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar = \sqrt{6}\hbar = 2.45\hbar.$$

(c) El ángulo más pequeño se alcanzará cuando $|L_z|$ sea máximo, es decir, cuando $m = l$. Por tanto,

$$\cos \theta = \frac{L_z}{L} = \frac{l\hbar}{\sqrt{l(l+1)}\hbar} = \frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow \theta = 35.5^\circ.$$

□

Cuantización de la energía

Los resultados discutidos hasta ahora son válidos para cualquier potencial con simetría esférica. Ahora vamos a particularizar para el caso del átomo de hidrógeno y vamos a determinar las funciones radiales $R(r)$. Estamos interesados en soluciones correspondientes a valores negativos de la energía, es decir, nos centraremos en el estudio de estados ligados. Veremos que sólo hay algunos valores permitidos de la energía y tendremos un nuevo número cuántico n , conocido como **número**

cuántico principal. La ecuación que debemos resolver es

$$-\frac{\hbar}{2\mu r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \left[-\frac{kZe^2}{r} + \frac{\hbar l(l+1)}{2\mu r^2} \right] R(r) = ER(r). \quad (5.48)$$

De la solución de esta ecuación se obtienen los siguientes valores para la energía:

$$E_n = - \left(\frac{kZe^2}{\hbar} \right)^2 \frac{\mu}{2n^2} = -\frac{Z^2 E_1}{n^2}, \quad (5.49)$$

donde $E_1 = (1/2)(ke^2/\hbar)^2 \mu \approx 13.6$ eV y $n = 1, 2, 3, \dots$ con la restricción adicional de que $l < n$. Esto son los valores encontrados en el modelo de Bohr. Las funciones radiales para el hidrógeno ($Z = 1$) están dadas por

$$R_{nl}(r) = A_{nl} e^{-r/a_0} r^l \mathcal{L}_{nl}(r/a_0), \quad (5.50)$$

donde $a_0 = \hbar^2/(ke^2\mu)$ es el radio de Bohr y $\mathcal{L}_{nl}(r/a_0)$ son los llamados polinomios de Laguerre. Las funciones radiales $R_{nl}(r/a_0)$ para $n = 1$ y $n = 2$ adoptan la siguiente forma:

$$\begin{aligned} n = 1, \quad l = 0; \quad R_{10} &= \frac{2}{\sqrt{a_0^3}} e^{-r/a_0} \\ n = 2, \quad l = 0; \quad R_{20} &= \frac{1}{\sqrt{2a_0^3}} \left(1 - \frac{r}{2a_0} \right) e^{-r/2a_0} \\ n = 2, \quad l = 1; \quad R_{21} &= \frac{2}{2\sqrt{6a_0^3}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0}. \end{aligned}$$

Resumen de los números cuánticos

Los valores permitidos y las restricciones sobre los números cuánticos n , l y m asociados con las variables r , θ y ϕ se resumen como sigue:

$$\begin{aligned} n &= 1, 2, 3, \dots \\ l &= 0, 1, 2, \dots, (n-1) \\ m &= -l, (-l+1), \dots, 0, 1, 2, \dots, +l. \end{aligned} \quad (5.51)$$

La Fig. 5.7 muestra un diagrama con los niveles de energía del átomo de hidrógeno. Los estados se numeran con el siguiente código: s para $l = 0$, p para $l = 1$, d para $l = 2$, f para $l = 3$, etc. Las transiciones permitidas (en la aproximación dipolar) entre los niveles de energía obedecen las **reglas de selección** siguientes:

$$\begin{aligned} \Delta m &= 0 \text{ ó } \pm 1, \\ \Delta l &= \pm 1. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Esto quiere decir que para que una transición entre dos estados energéticos tenga lugar, en particular, el número cuántico orbital l ha de cambiar en ± 1 . Esta regla de selección está íntimamente relacionada con el hecho de que el fotón es una partícula con momento angular igual a $1\hbar$ y cuando un fotón es emitido o absorbido por un

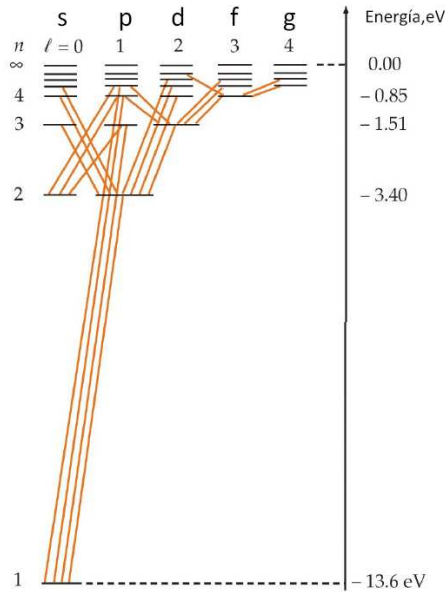


Fig. 5.7 Diagrama de niveles energéticos para el hidrógeno. Las líneas diagonales corresponden a transiciones que implican la emisión o absorción de radiación y obedecen la regla de selección $\Delta l = \pm 1$. Los estados con el mismo valor de n , pero distintos valores de l , poseen la misma energía.

átomo de hidrógeno, la conservación del momento angular implica que el momento angular del átomo ha de cambiar en $\pm\hbar$, es decir, l ha de cambiar en ± 1 . Por otra parte, es importante remarcar que para el número cuántico principal no hay ninguna restricción en una transición electrónica.

Las funciones de onda del átomo de hidrógeno

Las funciones de onda completas correspondientes a los estados ligados del átomo de hidrógeno adoptan la siguiente forma:

$$\psi_{n,l,m}(r, \theta, \phi) = C_{nlm} R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (5.53)$$

donde C_{nlm} es una constante determinada por la condición de normalización.

Recuérdese que la energía sólo depende del número cuántico principal n . Para cada valor de n , hay n posibles valores de l ($l = 0, 1, \dots, n-1$), y para cada valor de l , hay $2l+1$ posibles valores de m ($m = -l, \dots, +l$). De este modo, excepto para el nivel de más baja energía o estado fundamental ($n = 1, l = m = 0$), hay en general muchas funciones de onda correspondientes a un mismo valor de la energía.

La función de onda para el estado fundamental ($n = 1, l = 0$ y $m = 0$) viene dada por

$$\psi_{100} = C_{100} e^{-Zr/a_0}, \quad (5.54)$$

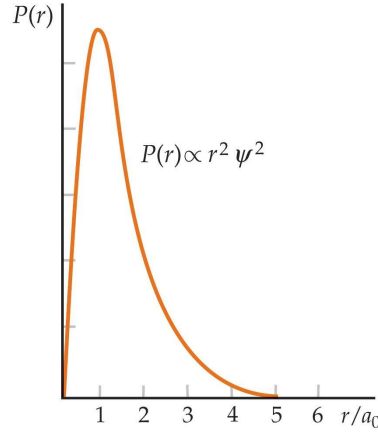


Fig. 5.8 Densidad de probabilidad radial para el estado fundamental del átomo de hidrógeno como función de r/a_0 . Nótese que esta función alcanza un máximo en $r = a_0$.

donde C_{100} se determina a través de la condición de normalización:

$$\int |\psi_{100}|^2 dV = \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin\theta |\psi_{100}|^2 = 1 \Rightarrow C_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}. \quad (5.55)$$

La probabilidad de encontrar el electrón en el elemento de volumen dV es $\psi^* \psi dV$. Es más interesante determinar la probabilidad de encontrar el electrón en una cortezza esférica comprendida entre r y $r + dr$. Esta probabilidad, $P(r)dr$, es $\psi^* \psi$ veces el volumen de la cortezza:

$$P(r)dr = \psi^* \psi 4\pi r^2 dr = 4\pi r^2 C_{100}^2 e^{-2Zr/a_0} dr. \quad (5.56)$$

La Fig. 5.8 muestra esta probabilidad radial como función de r/a_0 para el estado fundamental. Como se puede ver, $P(r)$ tiene un máximo en $r = a_0/Z$. Contrariamente al modelo de Bohr, es posible que el electrón esté a cualquier distancia del núcleo, siendo a_0/Z la más probable. Nótese que el momento angular en el estado fundamental es cero, mientras que en el modelo de Bohr vale $1\hbar$.

Vamos ahora con los estados excitados. Por ejemplo, en el primer estado excitado $n = 2$ y l puede ser 0 ó 1. Para $l = 0$ y $m = 0$, tenemos:

$$\psi_{200} = C_{200} \left(2 - \frac{Zr}{a_0}\right) e^{-Zr/2a_0}. \quad (5.57)$$

Para $l = 1$, m puede ser +1, 0 ó -1. Las correspondientes funciones de onda son

$$\psi_{210} = C_{210} \frac{Zr}{a_0} e^{-Zr/2a_0} \cos\theta, \quad (5.58)$$

$$\psi_{21\pm 1} = C_{21\pm 1} \frac{Zr}{a_0} e^{-Zr/2a_0} \sin\theta e^{\pm i\phi}. \quad (5.59)$$

La Fig. 5.9 muestra la densidad de probabilidad radial $P(r)$ para estos estados excitados. La distribución para $n = 2$, $l = 1$ presenta un máximo en el radio de

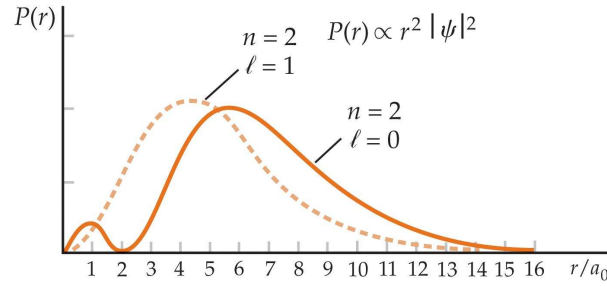


Fig. 5.9 Densidad de probabilidad radial $P(r)$ para los estados $n = 2$ del hidrógeno. Para $l = 1$ el máximo se encuentra en $r = 4a_0$, mientras que para $l = 0$ hay un máximo cerca de este valor y otro cerca del origen.

la segunda órbita de Bohr: $r_{\max} = 2^2 a_0$, mientras que para $n = 2$ y $l = 0$, $P(r)$ tiene dos máximos, el más grande de los cuales está cerca de este radio r_{\max} . Un análisis de los diversos estados excitados muestra que el comportamiento de $P(r)$ está dominado por el factor e^{-Zr/na_0} , excepto en el origen. Se puede demostrar que cuando $r \rightarrow 0$, las funciones de onda de los estados excitados se comportan como $\psi \rightarrow r^l$. De este modo, para un n dado, ψ_{nlm} es mayor cerca del origen cuando l es pequeño. Como veremos más adelante, esto tiene gran importancia para la estructura de los átomos multielectrónicos.

5.5 El espín del electrón

Cuando se observa atentamente una línea espectral del hidrógeno o de otros átomos, aparece un *estructura fina*, que consiste en dos o más rayas cercanas. Para explicar esta estructura fina y aclarar algunos problemas con la tabla periódica, Wolfgang Pauli sugirió en 1925 que además de los números cuánticos n , l y m , el electrón tiene un cuarto número cuántico que sólo puede tomar dos valores. Ese mismo año, S. Goudsmit y G. Uhlenbeck sugirieron que el cuarto número cuántico era la componente z , m_s , de un momento angular intrínseco del electrón, que llamaron **espín**. Ellos representaron el vector de espín como:

$$|\vec{S}| = S = \sqrt{s(s+1)}\hbar. \quad (5.60)$$

Ya que el momento angular de espín se describe por un número cuántico s como el número cuántico l , esperamos $2s + 1$ valores posibles de la componente z . Si m_s tiene sólo dos valores, como Pauli sugirió, entonces s sólo puede ser $1/2$ y m_s toma los valores $\pm 1/2$. Además de explicar la estructura fina y la tabla periódica, esta propuesta también explicaba los resultados inesperados de un experimento realizado por O. Stern y W. Gerlach en 1922, que describimos en el Apéndice C. Para explicar por qué el espín es el origen del desdoblamiento de los niveles de energía observado en la estructura fina, debemos considerar la conexión entre el momento angular y

el momento magnético de cualquier sistema de partículas cargadas.

Momento magnético

Si un sistema de partículas cargadas está rotando, posee un momento magnético proporcional a su momento angular. Este resultado se conoce a veces como el **teorema de Larmor**. Consideremos una partícula de masa M y carga q moviéndose en un círculo de radio r con velocidad v y frecuencia $f = v/2\pi r$. El momento angular de la partícula es $L = Mvr$. El momento magnético asociado a esta corriente eléctrica, $i = qf = qv/2\pi r$, es

$$\mu = iA = q \left(\frac{v}{2\pi r} \right) (\pi r^2) = \frac{1}{2} q \left(\frac{L}{M} \right), \quad (5.61)$$

o vectorialmente

$$\boxed{\vec{\mu} = \frac{q}{2M} \vec{L}} \quad (5.62)$$

Aplicando este resultado al movimiento orbital del electrón en el átomo de hidrógeno:

$$\mu = \frac{e}{2m_e} L = \frac{e\hbar}{2m_e} \sqrt{l(l+1)} = \sqrt{l(l+1)} \mu_B \quad (5.63)$$

y

$$\mu_z = -\frac{e\hbar}{2m_e} m = -m \mu_B, \quad (5.64)$$

donde m_e es la masa del electrón, $m\hbar$ es la componente z del momento angular y μ_B es una unidad natural de momento magnético llamada **magnetón de Bohr** y que tiene el valor

$$\boxed{\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9.27 \times 10^{-24} \text{ J/T} = 5.79 \times 10^{-9} \text{ eV/G} = 5.79 \times 10^{-5} \text{ eV/T}} \quad (5.65)$$

La proporcionalidad entre $\vec{\mu}$ y \vec{L} es una propiedad general de cualquier distribución de carga en rotación. Para usar la misma expresión matemática en otras situaciones más complejas, es costumbre expresar el momento magnético en términos de μ_B y una cantidad adimensional g llamada factor giromagnético (o simplemente factor g), donde el valor de g se determina a partir de los detalles de la distribución de carga. En el caso del momento angular orbital \vec{L} del electrón, $g_L = 1$ y la ec. (5.62) se escribiría como

$$\vec{\mu} = -\frac{g_L \mu_B}{\hbar} \vec{L} \quad (5.66)$$

y

$$\mu = \sqrt{l(l+1)} g_L \mu_B, \quad \mu_z = -m g_L \mu_B. \quad (5.67)$$

El signo menos se debe a la carga negativa del electrón. El momento magnético y el momento angular asociado con el movimiento orbital están dirigidos en sentidos

opuestos. Además, vemos que la cuantización del momento angular implica la cuantización del momento magnético.

El comportamiento de un sistema con momento magnético en un campo magnético puede comprenderse considerando un pequeño imán. Cuando se coloca en un campo magnético \vec{B} , hay un torque (o momento de una fuerza) igual a $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ que tiende a alinear el imán con el campo \vec{B} . Si el imán está rotando alrededor del eje, el efecto del torque es hacer preceder al eje de giro alrededor de la dirección del campo externo.

Para cambiar la orientación del imán relativa a la dirección del campo aplicado, se debe realizar trabajo. Si se mueve un ángulo $d\theta$, el trabajo requerido es

$$dW = \tau d\theta = \mu B \sin \theta d\theta = d(-\mu B \cos \theta) = d(-\vec{\mu} \cdot \vec{B}). \quad (5.68)$$

La energía potencial del momento magnético $\vec{\mu}$ en el campo magnético \vec{B} se puede escribir como

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}. \quad (5.69)$$

Si \vec{B} está dirigido en la dirección z , la energía potencial es

$$U = -\mu_z B. \quad (5.70)$$

Aplicando estos argumentos al espín del electrón, podemos esperar (con $s = 1/2$) que el momento magnético (y su componente z) debido al momento angular intrínseco del electrón (o espín) vengan dados por

$$\mu = \sqrt{s(s+1)}\mu_B = \sqrt{\frac{3}{4}}\mu_B \quad \text{y} \quad \mu_z = m_s \mu = \pm \frac{1}{2}\mu_B. \quad (5.71)$$

Veremos en un momento que este resultado no es completamente correcto.

Como el electrón atómico está en el campo magnético generado por el movimiento aparente de la carga nuclear alrededor del electrón, los dos valores de m_s corresponden a dos energías diferentes. Este desdoblamiento de los niveles de energía es el origen de la estructura fina observada en las rayas espectrales.

La magnitud (o módulo) del momento magnético debido al momento angular de espín se puede determinar midiendo la deflexión de un haz de electrones en un experimento tipo Stern-Gerlach (ver Apéndice C). El resultado no es $(1/2)\mu_B$, como predice la ec. (5.64) con $m = m_s = 1/2$, sino dos veces ese valor. El factor g para el electrón, g_s , ha sido medido de forma muy precisa y el resultado es $g_s = 2.002319$, con lo cual el correspondiente momento magnético del electrón debido a su espín viene dado por

$$\boxed{\mu_z = -m_s g_s \mu_B} \quad (5.72)$$

Este resultado y el hecho de que s sea semientero, hace que el modelo clásico del electrón como una bola que gira no deba ser tomado literalmente. El fenómeno del espín está incluido de manera natural en la formulación relativista de la mecánica cuántica de Dirac. En su límite no-relativista, la ecuación de Dirac predice $g_s = 2$, que es aproximadamente correcto. El valor exacto de g_s se predice correctamente en la teoría conocida como electrodinámica cuántica.

Las funciones de onda completas del átomo de hidrógeno

Nuestra descripción de las funciones de onda del átomo de hidrógeno en la sección anterior no fue completa ya que no consideramos el espín del electrón. Estas funciones de onda también están caracterizadas por un número cuántico de espín m_s , que puede tomar los valores $+1/2$ y $-1/2$. Una función de onda general se escribe entonces como $\psi_{nlm_l m_s}$, donde hemos incluido el subíndice l en m_l para distinguirlo de m_s . Ahora, hay dos funciones de onda para el estado fundamental del átomo de hidrógeno, $\psi_{100+1/2}$ y $\psi_{100-1/2}$, correspondientes a un átomo con su espín electrónico “paralelo” o “antiparalelo” a eje z . En general, el estado fundamental es una combinación lineal de estas funciones de onda:

$$\psi = C_1\psi_{100+1/2} + C_2\psi_{100-1/2}. \quad (5.73)$$

La probabilidad de medir $m_s = 1/2$ es $|C_1|^2$ y $|C_2|^2$ es la correspondiente probabilidad de medir $m_s = -1/2$.

5.6 El momento angular y el efecto espín-órbita

En general, un electrón en un átomo tiene un momento angular orbital y un momento angular de espín. Clásicamente, el momento angular total sería

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}. \quad (5.74)$$

Esta es una cantidad importante porque el torque resultante en un sistema es igual al ritmo de cambio del momento angular total. En el caso de fuerzas centrales, el momento angular se conserva. Para un sistema clásico, el módulo de \vec{J} puede tomar cualquier valor entre $L + S$ y $|L - S|$. La situación es diferente en el caso cuántico. Las reglas de adición de momentos angulares son difíciles de derivar, pero no de entender. Para el caso del momento angular de espín y orbital, el módulo de \vec{J} está dado por

$$|\vec{J}| = \sqrt{j(j+1)}\hbar, \quad (5.75)$$

donde el **número cuántico de momento angular total** j puede ser

$$j = l + s \quad \text{ó} \quad j = |l - s| \quad (5.76)$$

y la componente z de \vec{J} viene dada por

$$J_z = m_j\hbar \quad m_j = -j, -j+1, \dots, j-1, j. \quad (5.77)$$

La ec. (5.76) es un caso particular de una regla más general para la combinación de dos momentos angulares que es importante cuando se tiene más de una partícula. La regla general es:

Si \vec{J}_1 es un momento angular y \vec{J}_2 otro, el momento angular total $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ tiene el valor $\sqrt{j(j+1)}\hbar$ para su módulo, donde j puede tomar cualquiera de los valores: $j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \dots, |j_1 - j_2|$.

Acoplamiento espín-órbita

Los estados atómicos con el mismo n y l pero diferente j tienen energías ligeramente distintas debido a la interacción del espín del electrón con su movimiento orbital. A esto se le llama **efecto espín-órbita**. El correspondiente desdoblamiento de las líneas espectrales, como el que resulta del desdoblamiento del nivel $2p$ en la transición $2p \rightarrow 1s$ en el hidrógeno, se llama desdoblamiento de estructura fina. Podemos entender el efecto espín-órbita de forma cualitativa con el siguiente modelo representado en la Fig. 5.10.

El electrón se mueve en una órbita circular con velocidad v alrededor del protón (ver Fig. 5.10(a)). En este caso \vec{L} está dirigido hacia arriba. En el sistema de referencia del electrón el protón se mueve en un círculo a su alrededor y, de este modo, constituye una corriente circular que genera un campo magnético \vec{B} en la posición del electrón. La dirección de \vec{B} es paralela a \vec{L} (hacia arriba). Recordemos que la energía potencial de un momento magnético en un campo magnético depende de su orientación relativa:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu_z B. \quad (5.78)$$

La energía potencial alcanza su menor valor cuando el momento magnético es paralelo a \vec{B} y alcanza su máximo valor cuando es antiparalelo. Como el momento magnético intrínseco del electrón está dirigido en sentido contrario a su espín, la energía espín-órbita es máxima cuando el espín es paralelo a \vec{B} y de este modo a \vec{L} . La energía del estado $2p_{3/2}$ (donde $3/2$ es el valor de j) en el átomo de hidrógeno, en el cual \vec{L} es paralelo a \vec{S} , es un poco superior a la del estado $2p_{1/2}$, en el cual \vec{L} y \vec{S} son antiparalelos (ver Fig. 5.11). Este desdoblamiento es del orden de 4.5×10^{-5} eV para los estados $2p_{1/2}$ y $2p_{3/2}$ del átomo de hidrógeno.

Ejemplo 5.5: El desdoblamiento de los estados $2p_{1/2}$ y $2p_{3/2}$ en el átomo de hidrógeno es de 4.5×10^{-5} eV. Con este valor, estimar el campo magnético que el electrón $2p$ experimenta. Suponer que \vec{B} es paralelo al eje z .

Solución. Podemos usar el hecho de que la energía de desdoblamiento está rela-

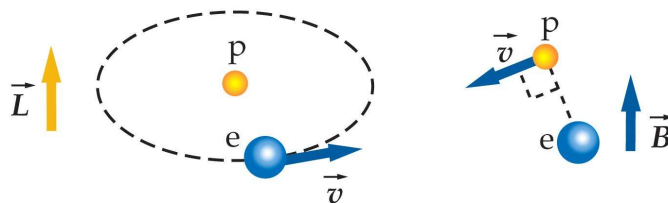


Fig. 5.10 (a) Un electrón se mueve alrededor de un protón en una órbita circular en el plano horizontal con un momento angular \vec{L} dirigido hacia arriba. (b) En un sistema de referencia en el que el electrón está momentáneamente en reposo existe en la posición del electrón un campo magnético \vec{B} debido al protón que también está dirigido hacia arriba. Cuando el espín electrónico \vec{S} es paralelo a \vec{L} , el momento magnético $\vec{\mu}_s$ es antiparalelo a \vec{L} y \vec{B} , de modo que la energía espín-órbita alcanza su valor máximo.

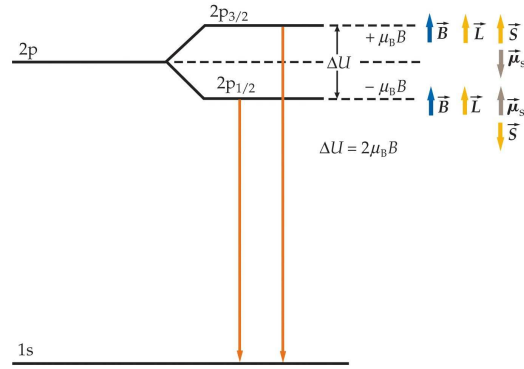


Fig. 5.11 Diagrama de los niveles energéticos de estructura fina. A la izquierda se muestran los niveles en ausencia de campo magnético. A la derecha se muestra el efecto de un campo magnético. Debido a la interacción espín-órbita, el campo magnético desdobla el nivel $2p$ en dos niveles de energía, con el nivel $j = 3/2$ ligeramente mayor que el $j = 1/2$. La línea espectral debida a la transición $2p \rightarrow 1s$ está, por tanto, dividida en dos líneas de longitudes de onda ligeramente distintas.

cionada con la energía potencial del momento magnético del electrón en presencia del campo magnético:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu_z B.$$

La diferencia de energías de los dos niveles es simplemente

$$\Delta E = 2|U| = 2\mu_z B \approx 2\mu_B B,$$

donde hemos usado que μ_z es del orden de μ_B . Finalmente, despejando el campo magnético en esta expresión tenemos que

$$B = \frac{\Delta E}{2\mu_B} = \frac{4.5 \times 10^{-5} \text{ eV}}{2 \times 5.79 \times 10^{-5} \text{ eV/T}} = 0.39 \text{ T.} \quad \square$$

Cuando un átomo se sitúa en un campo magnético externo \vec{B} , la energía de los $2j + 1$ estados atómicos con la misma energía se desdoblan en $2j + 1$ estados con energías diferentes. El desdoblamiento de los niveles de energía en el átomo da lugar al desdoblamiento de las líneas espectrales emitidas por el átomo. Este desdoblamiento de las rayas espectrales en un campo magnético fue descubierto por P. Zeeman y es conocido como el **efecto Zeeman**. Zeeman y Lorentz compartieron el premio Nobel de física en 1902 por el descubrimiento y la explicación de este efecto.

5.7 La ecuación de Schrödinger para dos o más partículas

Hasta ahora hemos considerado exclusivamente el átomo de hidrógeno que contiene tan sólo un electrón. Cuando se consideran átomos más complicados uno tiene

que abordar el problema de aplicar la mecánica cuántica a dos o más electrones moviéndose en un potencial externo. Tales problemas son complicados por la interacción entre los electrones y por el hecho de que los electrones son partículas idénticas.

La interacción entre los electrones es de carácter electromagnético y esencialmente la misma que en el caso clásico para dos partículas cargadas. La ecuación de Schrödinger para un átomo con dos o más electrones no se puede resolver exactamente y en la práctica se usan métodos aproximados.

La indistinguibilidad de partículas idénticas tiene importantes consecuencias relacionadas con el principio de exclusión de Pauli. Ilustraremos el origen de este importante principio en esta sección considerando el caso sencillo de dos partículas idénticas no interactuantes en un pozo de potencial unidimensional.

La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para dos partículas de masa m se escribe como

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + V\psi(x_1, x_2) = E\psi(x_1, x_2), \quad (5.79)$$

donde x_1 y x_2 son las coordenadas de las dos partículas. Dentro del pozo de potencial $V = 0$ y la función de onda se anula en las paredes del pozo. Las soluciones de esta ecuación se pueden escribir como productos de soluciones para el caso de una sola partícula y combinaciones lineales de ellas. El producto de soluciones de un sola partícula adopta la forma:

$$\psi_{nm}(x_1, x_2) = \psi_n(x_1) \psi_m(x_2). \quad (5.80)$$

Para $n = 1$ y $m = 2$, por ejemplo, tenemos:

$$\psi_{12}(x_1, x_2) = C \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x_1}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi x_2}{L} \right). \quad (5.81)$$

La probabilidad de encontrar la partícula 1 en dx_1 y la 2 en dx_2 es $|\psi(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2$, que es justamente el producto de las probabilidades individuales $|\psi(x_1)|^2 dx_1$ y $|\psi(x_2)|^2 dx_2$. Sin embargo, como estas partículas son idénticas, no sabemos cuál está en dx_1 y cuál es dx_2 . Al ser idénticas, debemos construir una función de onda que satisfaga:

$$|\psi(x_1, x_2)|^2 = |\psi(x_2, x_1)|^2. \quad (5.82)$$

Esta ecuación se cumple si:

$$\psi(x_1, x_2) = +\psi(x_2, x_1) \quad (\text{simétrica})$$

$$\psi(x_1, x_2) = -\psi(x_2, x_1) \quad (\text{antisimétrica}).$$

Nótese que una función de onda como la de la ec. (5.80) no satisface la condición (5.82) y, por tanto, no es una función de onda admisible. Sin embargo, se pueden construir funciones válidas combinando productos de funciones de una sola partícula del siguiente modo:

$$\psi_S = C [\psi_n(x_1)\psi_m(x_2) + \psi_n(x_2)\psi_m(x_1)] \quad (\text{simétrica})$$

$$\psi_A = C [\psi_n(x_1)\psi_m(x_2) - \psi_n(x_2)\psi_m(x_1)] \quad (\text{antisimétrica}).$$

Principio de exclusión de Pauli

Hay una diferencia importante entre las combinaciones antisimétricas y las simétricas. Si $n = m$, la función de onda antisimétrica es cero para todo x_1 y x_2 , mientras que no se anula para el caso simétrico. De forma más general, se encuentra que los electrones (y muchas otras partículas, incluyendo protones y neutrones) sólo pueden tener funciones de onda antisimétricas, es decir,

$$\psi_{nlm_l m_s} = R_{nl} Y_{lm_l} X_{m_s}, \quad (5.83)$$

donde R_{nl} es la función de onda radial, Y_{lm} es el armónico esférico y X_{m_s} es la función de onda de espín. De este modo, las funciones de onda de una partícula, tales como $\psi_n(x_1)$ y $\psi_m(x_1)$, no pueden tener exactamente los mismos números cuánticos.

Esto es un ejemplo del **principio de exclusión de Pauli**. Para el caso de los electrones en átomos y moléculas, cuatro números cuánticos describen el estado de cada electrón. El principio de exclusión de Pauli para los electrones nos dice que:

Un estado especificado por un conjunto de números cuánticos n , l , m_l y m_s no puede estar ocupado por más de un electrón.

El efecto del principio de exclusión de Pauli es excluir algunos estados en el sistema de muchos electrones. Este principio proporciona una condición adicional impuesta en las soluciones de la ecuación de Schrödinger. Lo aplicaremos para comprender la tabla periódica en la próxima sección. Para acabar digamos que a las partículas como los electrones, los protones o los neutrones que obedecen el principio de exclusión, y por tanto son descritas por funciones de onda antisimétricas, se las conoce con el nombre de **fermiones**. Partículas como las partículas α , deuterones, fotones y mesones son descritos por funciones de onda simétricas y no obedecen el principio de exclusión. Estas partículas reciben el nombre de **bosones**.

5.8 La tabla periódica

La ecuación de Schrödinger no se puede resolver exactamente para los átomos que poseen más de un electrón. No obstante, existen métodos aproximados capaces de determinar los niveles energéticos de los átomos y las funciones de onda de los electrones con gran exactitud. En una primera aproximación, se supone que los Z electrones de un átomo no interactúan entre sí. Se resuelve entonces la ecuación de Schrödinger y las funciones de onda resultantes se utilizan para calcular la interacción de los electrones, la cual se utiliza a su vez para obtener una mejor aproximación para las funciones de onda. El estado de cada electrón viene descrito por cuatro números cuánticos n , l , m_l y m_s . La energía del electrón está determinada fundamentalmente por el número cuántico principal n y por el número cuántico de momento angular orbital l . En general, cuanto más bajo es el valor de n , menor es la energía; y dado un valor de n , cuanto más bajo es l , menor es la energía. La

dependencia de la energía con l es debida a la interacción de los electrones del átomo entre sí. La especificación de n y l para cada electrón en un átomo se denomina **configuración electrónica**. Por costumbre, l se especifica de acuerdo al mismo código utilizado para designar los estados del átomo de hidrógeno en lugar de su valor numérico. El código es:

$$\begin{array}{c} s \ p \ d \ f \ g \ h \\ \text{valor de } l : 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5. \end{array}$$

A veces nos referimos a los distintos valores de n como a distintas capas electrónicas, que se identifican por otro código de letras: $n = 1$ denota la capa K ; $n = 2$, la capa L ; y así sucesivamente.

La configuración electrónica de los átomos se rige por el principio de exclusión de Pauli, según el cual dos electrones de un átomo no pueden encontrarse en el mismo estado cuántico, es decir, dos electrones no pueden tener la misma serie de valores para los números cuánticos n , l , m_l y m_s . Mediante el principio de exclusión y las restricciones de los números cuánticos, podemos entender la estructura de la tabla periódica.

Hemos estudiado el elemento más ligero, el hidrógeno, que posee un sólo electrón. En el estado fundamental, el electrón posee $n = 1$ y $l = 0$, con $m_l = 0$ y $m_s = +1/2$ ó $-1/2$. El electrón se designa por $1s$. El 1 significa que $n = 1$ y la s indica que $l = 0$.

Como en la formación de los átomos más pesados van agregándose nuevos electrones, éstos se disponen en aquellos estados que poseen la energía total más baja compatible con el principio de exclusión de Pauli. A continuación vamos a describir la estructura electrónica de los primeros átomos de la tabla periódica (ver Fig. 5.12).

Helio ($Z = 2$)

El siguiente elemento después del hidrógeno es el helio ($Z = 2$), que tiene dos electrones. En el estado fundamental, ambos electrones se encuentran en la capa K con $n = 1$, $l = 0$ y $m_l = 0$; para un electrón $m_s = +1/2$ y para el otro $m_s = -1/2$. El espín resultante de los dos electrones es cero. Como el momento angular orbital es también cero, el momento angular total es cero. La configuración electrónica del helio se escribe $1s^2$. El 1 significa que $n = 1$, la s que $l = 0$ y el superíndice 2 indica que hay dos electrones en este estado. Como l puede ser sólo 0 para $n = 1$, estos dos electrones completan la capa K ($n = 1$). La energía requerida para extraer el electrón más débilmente ligado en el estado fundamental de un átomo se llama **energía de ionización**. Ésta es la energía de enlace del último electrón situado en el átomo. Para el helio, la energía de ionización es 24.6 eV, que es un valor relativamente grande. El helio es, por tanto, básicamente inerte.

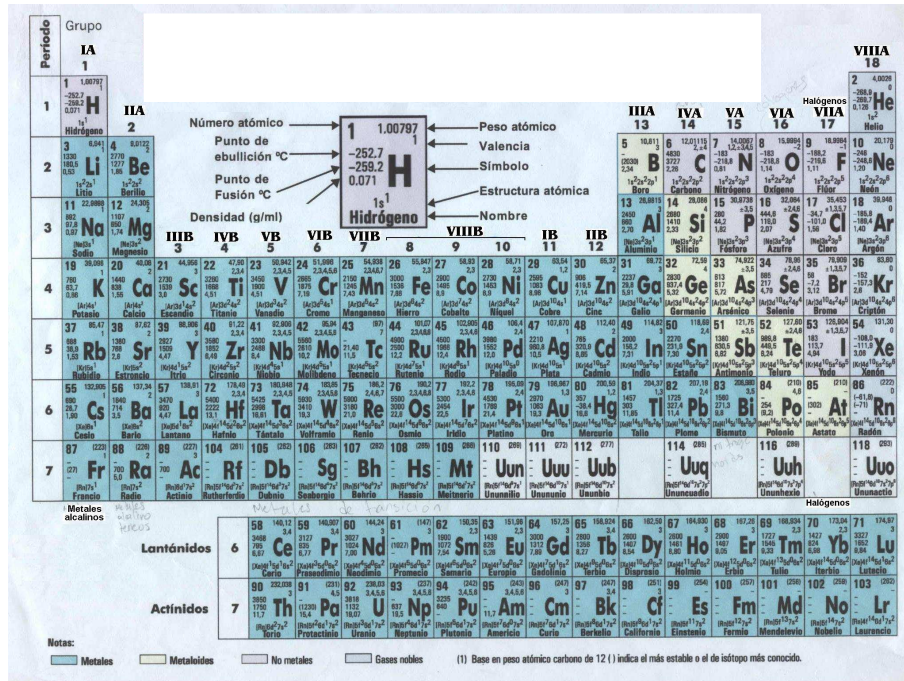


Fig. 5.12 Tabla periódica de los elementos.

Litio ($Z = 3$)

El siguiente elemento, litio, tiene tres electrones. Como la capa K ($n = 1$) está totalmente llena con dos electrones, el tercer electrón debe pasar a una capa de energía superior: $n = 2$ o capa L . El electrón externo está mucho más lejos del núcleo que los dos más internos correspondientes a $n = 1$. Este tercer electrón tiene la máxima probabilidad de ser encontrado en la segunda órbita de Bohr, cuyo radio es cuatro veces el radio de la primera órbita.

Para el electrón externo la carga nuclear está parcialmente apantallada por los dos electrones más internos. Uno podría pensar que dicho electrón ve una carga efectiva $Z'e = +1e$. Sin embargo, Z' es algo mayor que 1 porque la distribución de carga del electrón externo solapa parcialmente con la de los dos electrones internos. La energía del electrón externo a una distancia r de un carga puntual $+Z'e$ viene dada por

$$E = -\frac{1}{2} \frac{kZ'e^2}{r}. \tag{5.84}$$

Cuanto mayor es la penetración en la nube de los electrones más internos, mayor es la carga efectiva $Z'e$ y más baja es la energía. Como la penetración es mayor para los valores más bajos de l , la energía del electrón más externo del litio es menor para el estado s ($l = 0$) que para el estado p ($l = 1$). La configuración

electrónica en el litio es, por tanto, $1s^22s$. La energía de ionización del litio es sólo 5.39 eV. Como su electrón más externo está muy débilmente ligado al átomo, el litio es químicamente muy activo. Se comporta como un átomo de un solo electrón, semejante al hidrógeno.

Berilio ($Z = 4$)

La energía del átomo de berilio es mínima si los dos electrones externos están en el estado $2s$. Existen dos electrones con $n = 2$, $l = 0$ y $m_l = 0$ gracias a los dos valores posibles del número cuántico de espín, m_s . La configuración del berilio es, por tanto, $1s^22s^2$.

Del boro al neón ($Z = 5$ a $Z = 10$)

Como la subcapa $2s$ está completa, el quinto electrón debe situarse en la siguiente subcapa (de menor energía), que es la $2p$ ($n = 2$, $l = 1$). Como existen tres valores de m_l (+1, 0 y 1) y dos valores de m_s para cada valor de m_l , pueden existir 6 electrones en esta subcapa. La configuración electrónica del boro es $1s^22s^22p$. Las configuraciones electrónicas del carbono ($Z = 6$) al neón ($Z = 10$) difieren de la correspondiente del boro sólo en el número de electrones en la subcapa $2p$. La energía de ionización crece con Z para estos elementos alcanzando el valor de 21.6 eV para el neón. Éste último tiene la subcapa $2p$ llena y por tanto la capa $n = 2$. Su configuración electrónica es $1s^22s^22p^6$. Debido a su altísima energía de ionización, el neón, como el helio es básicamente inerte desde el punto de vista químico. El elemento inmediatamente anterior al neón, el flúor, tiene un vacante en la subcapa $2p$ y por ello, se combina fácilmente con elementos tales como el litio que poseen un electrón externo. El litio, por ejemplo, cedería su electrón más externo y aislado al flúor para formar un ión F^- y un ión Li^+ . Estos iones se unirían entre sí para formar una molécula de fluoruro de litio.

Del sodio al argón ($Z = 11$ a $Z = 18$)

El electrón decimoprimeros debe situarse en la capa $n = 3$. Como este electrón está muy alejado del núcleo y de los electrones más internos, se encuentra débilmente ligado al átomo de sodio ($Z = 11$). La energía de ionización del sodio es sólo 5.14 eV. El sodio, por lo tanto, se combina fácilmente con átomos tales como el flúor. Con $n = 3$, l puede valer 0, 1 y 2. Debido a la disminución de energía que se produce por la penetración al apantallamiento electrónico producido por los otros diez electrones, el estado $3s$ tiene menor energía que el $3p$ o el $3d$. La configuración electrónica del sodio es $1s^22s^22p^63s^1$. A medida que vamos avanzando hacia valores más altos de Z , la subcapa $3s$, y después la $3p$, se van llenando. Estas dos subcapas pueden acomodar $2 + 6 = 8$ electrones. La configuración del argón ($Z = 18$) es $1s^22s^22p^63s^23p^6$. Parece lógico que el decimonoveno electrón se coloque en la

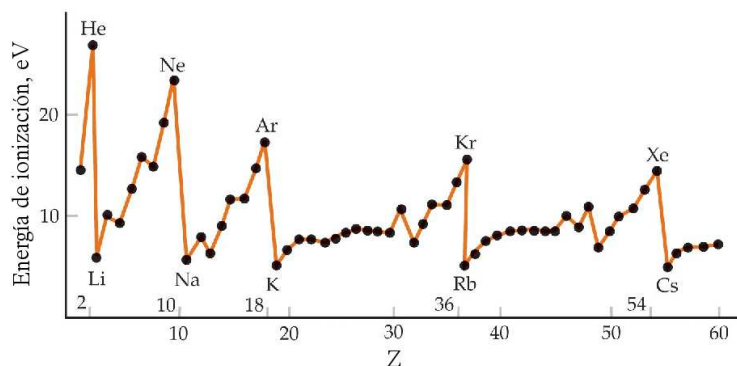


Fig. 5.13 Energía de ionización en función de Z desde $Z = 1$ hasta $Z = 60$. Es la energía de enlace del último electrón del átomo. La energía de enlace crece con Z hasta que una capa se cierra para $Z = 2, 10, 18, 36$ y 54 . Los elementos con una capa cerrada, más un electrón externo, tal como el sodio ($Z = 11$), poseen energías de enlace muy bajas, pues el electrón externo está muy lejos del núcleo y está apantallado por los electrones más internos.

tercera subcapa (subcapa d con $l = 2$), pero el efecto de penetración es ahora tan intenso que la energía del siguiente electrón es menor en la subcapa $4s$ que en la capa $3d$. Existe, por lo tanto, otra gran diferencia de energía entre los electrones 18 y 19 y por ello, el argón con su subcapa $3p$ completa es básicamente estable e inerte.

Elementos con $Z > 18$

El decimonoveno electrón del potasio ($Z = 19$) y el vigésimo del calcio ($Z = 20$) pasan a la subcapa $4s$ en lugar de la $3d$. Las configuraciones electrónicas de los siguientes diez elementos, del escandio ($Z = 21$) al zinc ($Z = 30$), difieren sólo en el número de electrones en la capa $3d$, excepto el cromo ($Z = 24$) y el cobre ($Z = 29$), en los cuales existe solamente un electrón $4s$. Estos diez elementos forman parte de los llamados **elementos de transición**.

La Fig. 5.13 muestra un gráfico de la energía de ionización en función de Z desde $Z = 1$ hasta $Z = 60$. Los picos de energía de ionización para $Z = 2, 10, 18, 36$ y 54 indican el cierre de una capa o subcapa.

5.9 Espectro óptico y de rayos X

Cuando un átomo se encuentra en un estado excitado, sufre transiciones a estados de menor energía emitiendo radiación electromagnética. La longitud de onda de esta radiación emitida está relacionada con los estados inicial y final por la fórmula de Bohr: $\lambda = hc/(E_i - E_f)$, donde E_i y E_f son las energías inicial y final. El átomo puede ser excitado a un nivel energético más elevado bombardeándolo con un haz

de electrones, por ejemplo, en un tubo espectral sometido a un alto voltaje entre sus extremos. Como los estados energéticos de un átomo forman una serie discreta, sólo se emiten ciertas longitudes de onda. Estas longitudes de onda de la radiación emitida constituyen el espectro de emisión del átomo.

Espectros ópticos

Para entender la formación de los espectros ópticos, es necesario comprender la naturaleza de los estados excitados. La situación para un átomo con múltiples electrones es, en general, mucho más complicada que en el caso del hidrógeno con un solo electrón. Un estado excitado puede implicar un cambio en el estado de cualquiera de los electrones, o incluso de dos o más electrones. Afortunadamente, en la mayor parte de los casos, un estado excitado de un átomo procede de la excitación de solamente uno de los electrones del átomo. Las energías de excitación de los electrones externos o de valencia de un átomo son del orden de unos pocos electrón-voltios. Las transiciones que proceden de estos electrones dan lugar a fotones que corresponden o están próximos al espectro visible u óptico (1.5-3 eV). Las energías de excitación pueden calcularse frecuentemente a partir de un modelo simple, en el cual el átomo se representa como un solo electrón más un sistema central y estable formado por el núcleo y los otros electrones más internos. Este modelo funciona bien para los metales alcalinos: Li, Na, K, Rb y Cs. Estos elementos se encuentran en la primera columna de la tabla periódica y sus espectros ópticos son semejantes a los del hidrógeno.

La Fig. 5.14 muestra un diagrama de niveles para las transiciones ópticas del sodio, cuyos electrones se disponen como si se tratara de un núcleo de neón más un electrón externo. Como el momento angular de espín del conjunto de electrones internos es globalmente cero, el espín de cada estado del sodio es $1/2$. Debido al efecto espín-órbita, los estados con $j = l - 1/2$ poseen una energía ligeramente más baja que los correspondientes a $j = l + 1/2$. Cada estado (excepto los estados con $L = 0$) se divide, por lo tanto, en dos estados, lo que constituye un doblete. El desdoblamiento del doblete es muy pequeño y no se aprecia en el diagrama de la figura. La notación espectroscópica usual consiste en especificar estos estados mediante un superíndice dado por $2S + 1$, seguido de una letra que indique el momento angular orbital, seguida de un subíndice que denote el momento angular total J . Para estados con momento angular total $S = 1/2$ el superíndice es 2, indicando que se trata de un doblete. Así ${}^2P_{3/2}$ denota un estado en el cual $L = 1$ y $J = 3/2$. En el primer estado excitado, el electrón más externo está excitado desde el nivel $3s$ al nivel $3p$, el cual se encuentra a 2.1 eV por encima del estado fundamental. La diferencia de energía entre los estados $P_{3/2}$ y $P_{1/2}$ debido al efecto espín-órbita es aproximadamente 0.002 eV. Las transiciones de estos estados al estado fundamental corresponden al familiar doblete amarillo del sodio:

$$3p({}^2P_{1/2}) \longrightarrow 3s({}^2S_{1/2}), \quad \lambda = 598.6 \text{ nm},$$

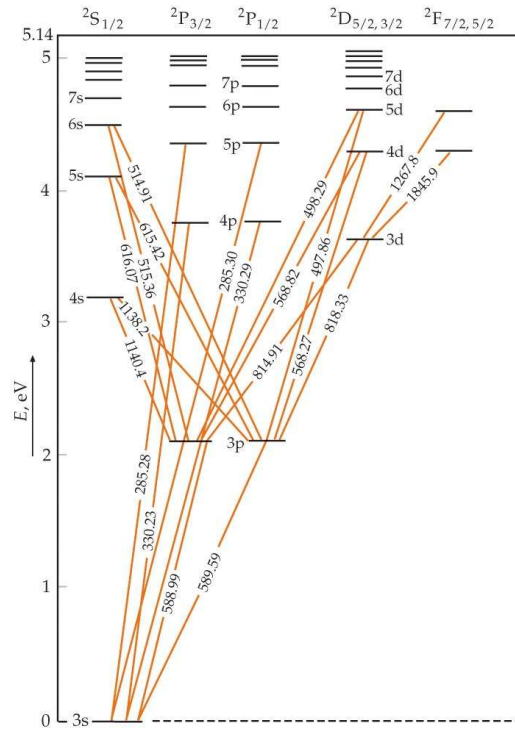
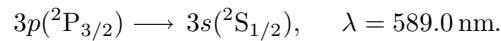


Fig. 5.14 Esquema de niveles energéticos del sodio. Las líneas diagonales muestran las transiciones ópticas observadas con las longitudes de onda expresadas en nanómetros. La energía del estado fundamental ha sido elegida como origen de la escala vertical izquierda.



Los niveles de energía y los espectros de otros metales alcalinos son semejantes a los del sodio. El espectro óptico de átomos como el helio, berilio y magnesio que poseen dos electrones externos es considerablemente más complejo debido a la intervención de ambos electrones.

Espectros de rayos X

Los rayos X se producen bombardeando un elemento diana o blanco con un haz de electrones de alta energía en un tubo de rayos X. El resultado es un espectro continuo que depende sólo de la energía de los electrones bombardeantes y un espectro de líneas característico del elemento diana. El espectro característico resulta de la excitación de los electrones más internos del elemento que constituye la diana bombardeada, como vamos a explicar a continuación.

La energía necesaria para excitar un electrón interno, por ejemplo un electrón del estado $n = 1$ (capa K), es mucho mayor que la requerida para excitar un

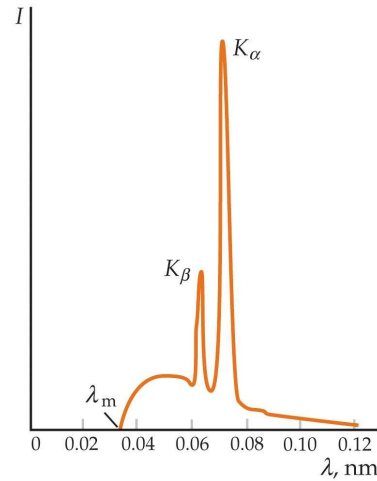


Fig. 5.15 Espectro de rayos X de molibdeno. Los picos designado por K_α y K_β son característicos del elemento. La longitud de onda de corte λ_m es independiente del elemento diana y está relacionada con el voltaje V del tubo de rayos X por $\lambda_m = hc/eV$.

electrón de valencia externo. Un electrón interno no puede excitarse a ninguno de los estados completos debido al principio de exclusión. La energía requerida para excitar uno de estos electrones a un estado desocupado es del orden de keV. Si un electrón es extraído del estado $n = 1$ (capa K), deja una vacante en esta capa. Esta vacante puede ocuparse si un electrón de la capa $n = 2$ (capa L) (o de una capa superior) efectúa una transición a la capa K . Los fotones emitidos por electrones que realizan estas transiciones poseen también energías del orden de keV y producen picos en el espectro de rayos X como se ve en Fig. 5.15. La línea K_α procede de transiciones de la capa $n = 2$ (capa L) a la capa $n = 1$ (capa K). La línea K_β procede de transiciones de la capa $n = 3$ a la $n = 1$. Éstas y otras líneas procedentes de transiciones que finalizan en la capa $n = 1$ constituyen la serie K del espectro característico de rayos X del elemento que forma la diana bombardeada. De igual modo, una segunda serie, la serie L , se produce por transiciones de estados energéticos elevados a una vacante en la capa $n = 2$ (capa L). Las letras K , L , M , etc. designan la capa final del electrón que hace la transición y la serie α , β , etc. indica el número de capas por encima de la capa final del estado inicial del electrón.

En 1913 el físico inglés Henry Moseley midió las longitudes de onda de las líneas K_α de los espectros de rayos X de unos 40 elementos. Con estos datos Moseley demostró que la representación gráfica $\lambda^{-1/2}$ en función del orden en que los elementos aparecían en la tabla periódica resultaba ser una línea recta (con algunos huecos y algunas excepciones). A partir de estos datos, Moseley fue capaz de determinar con precisión el número atómico Z de cada elemento conocido y predecir la existencia de otros elementos descubiertos más tarde. La relación empírica encontrada por

Moseley se puede expresar como:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{K_\alpha}}} = a(Z - 1). \quad (5.85)$$

De acuerdo con el modelo de Bohr de un átomo monoeléctrico, la longitud de onda del fotón emitido cuando un electrón efectúa la transición del estado $n = 2$ al $n = 1$ viene dada por

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 \frac{E_0}{hc} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right), \quad (5.86)$$

donde $E_0 = 13.6$ eV. Esto implica que

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{K_\alpha}}} = \left[\frac{E_0}{hc} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \right]^{1/2} Z. \quad (5.87)$$

Esta ecuación está de acuerdo con el resultado experimental de Moseley si se sustituye $Z - 1$ por Z en la ecuación de Moseley y si $a^2 = 3E_0/(4hc)$. Esto plantea una pregunta: ¿por qué aparece el factor $Z - 1$ y no simplemente Z ? Esto se explica en parte porque el modelo de Bohr ignora el apantallamiento del núcleo. En un átomo multielectrónico, los electrones de los estados $n = 2$ están eléctricamente apantallados de la carga nuclear por los dos electrones de los estados $n = 1$, así que los electrones del estado $n = 2$ son atraídos por una carga nuclear de alrededor de $(Z - 2)e$. Sin embargo, cuando hay un solo electrón en la capa K , los electrones $n = 2$ son atraídos por una carga nuclear efectiva de unos $(Z - 1)e$. Al decaer el electrón desde un estado n hasta un estado desocupado de la capa $n = 1$, se emite un fotón de energía $E_2 - E_1$. La longitud de onda de dicho fotón es

$$\lambda_{K_\alpha} = \frac{hc}{(Z - 1)^2 E_0 \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)} \quad (5.88)$$

lo que está de acuerdo con el resultado experimental.

Ejemplo 5.8: La longitud de onda de la línea K_α del espectro de rayos X de cierto elemento es $\lambda = 0.0721$ nm. ¿De qué elemento se trata?

Solución. Podemos usar la ec. (5.88) para obtener el número atómico del elemento en cuestión:

$$(Z - 1)^2 = \frac{4hc}{3\lambda_{K_\alpha} E_0}.$$

Usando $E_0 = 13.6$ eV y $\lambda_{K_\alpha} = 0.0721$ nm, obtenemos que $Z = 42.06 \approx 42$, lo que corresponde al molibdeno. \square

5.10 Bibliografía recomendada

Este capítulo está basado en las siguientes tres referencias:

- Capítulo 36 de “Física para la ciencia y la tecnología, Vol. 2C” (5ª edición) de Tipler y Mosca, editorial Reverté.
- Capítulos 4 y 7 de “Modern Physics” (5th edition) de Tipler y Llewellyn, W.H. Freeman.
- Capítulos 4, 8 y 9 de “Modern Physics” (3rd edition) de R.A. Serway, C.J. Moses and C.A. Moyer, Thomson/Brook Cole (2005).

Para aquellos que deseen profundizar en la física atómica, como siempre, el libro de Eisberg y Resnick es una referencia muy recomendable:

- Capítulos 7-10 de “Física Cuántica” de Robert Eisberg y Robert Resnick, editorial Limusa (1988).

5.11 Ejercicios del Capítulo 5

Cuestiones

- (1) ¿Cuál es la energía del estado fundamental de un átomo litio doblemente ionizado ($Z = 3$)?
- (2) El radio de la órbita $n = 1$ en el átomo de hidrógeno es $a_0 = 0.053$ nm. ¿Cuál es el radio de la órbita $n = 5$?
- (3) Para el número cuántico principal $n = 4$, ¿cuántos valores distintos puede tener el número cuántico magnético m ?
- (4) Determinar la energía del fotón para las tres longitudes de onda más largas de la serie de Balmer en el átomo de hidrógeno y calcular dichas longitudes de onda.
- (5) ¿Por qué la energía del estado $3s$ es considerablemente inferior que la del estado $3p$ para el sodio, mientras que en el hidrógeno estos estados poseen esencialmente la misma energía?
- (6) Analizar la necesidad de introducir un cuarto número cuántico para explicar la estructura de la tabla periódica. ¿Cómo se modificarían las propiedades del átomo de He si existieran sólo los tres números cuánticos n , l y m ?
- (7) ¿Qué elemento posee la configuración electrónica (a) $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2$ y (b) $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2$?
- (8) Usando los tres números cuánticos (n, l, m_l) para representar un electrón con un número cuántico principal n , número cuántico orbital l y número cuántico magnético m_l , ¿cuáles de las siguientes transiciones están permitidas? (a) $(5, 2, 2) \rightarrow (3, 1, 2)$; (b) $(2, 0, 0) \rightarrow (3, 0, 1)$; (c) $(4, 3, -2) \rightarrow (3, 2, 0)$; (d) $(1, 0, 0) \rightarrow (2, -1, -1)$; (e) $(2, 1, 0) \rightarrow (3, 0, 0)$.
- (9) (a) Calcular las dos siguientes longitudes de onda de la serie K , después de la K_α , del molibdeno. (b) ¿Cuál es la longitud de onda más corta de esta serie?
- (10) La longitud de onda de la línea K_α para un cierto elemento es 0.3368 nm. ¿Cuál es el elemento?

Problemas

- (11) (a) Comprobar que los niveles de energía y las funciones de onda de una partícula que se mueve en el plano xy dentro de una caja de potencial bidimensional de lados a y b vienen dados por

$$E = \left(\frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \right) \left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} \right) \quad \text{y} \quad \psi(x, y) = C \operatorname{sen} \left(\frac{n_1 \pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n_2 \pi y}{b} \right),$$

donde n_1 y n_2 son números enteros mayores o iguales que uno y C es una constante. (b) Considerar el caso simétrico $a = b$ y escribir la energía de los tres primeros niveles e indicar su degeneración.

- (12) Una partícula de masa m se mueve en el interior de una caja tridimensional con lados L_1 , L_2 y L_3 . Encontrar las energías de los seis estados de más baja energía si $L_1 = L$, $L_2 = 2L$ y $L_3 = 2L$. ¿Cuál de estos estados está degenerado?
- (13) ¿Qué transiciones electrónicas en el átomo de Li^{2+} (doblemente ionizado) dan lugar a líneas de emisión cuyas longitudes de onda son casi iguales a las dos primeras líneas de la serie de Lyman en el átomo de hidrógeno? ¿Sabrías decir por qué no son exactamente iguales? *Nota:* recordar que la serie de Lyman del átomo de hidrógeno surge de las diversas transiciones electrónicas que acaban en el estado fundamental.
- (14) En 1896 el astrónomo americano Edward Charles Pickering observó unas misteriosas líneas en el espectro de la estrella ζ -Puppis que podían describirse por la fórmula empírica

$$\frac{1}{\lambda} = R_{\text{H}} \left(\frac{1}{(n_2/2)^2} - \frac{1}{(n_1/2)^2} \right),$$

donde R_{H} es la constante de Rydberg y n_1 y n_2 son números enteros positivos con $n_1 > n_2$. Usando el modelo de Bohr, determinar qué elemento químico da origen a esas líneas.

- (15) Un átomo de hidrógeno está en el estado $6g$. (a) ¿Cuál es el número cuántico principal? (b) ¿Cuál es la energía del átomo? (c) ¿Cuál es el valor del número cuántico orbital y del módulo del momento angular orbital? (d) ¿Cuáles son los valores posibles para el número cuántico magnético? Para cada valor, determinar la correspondiente componente z del momento angular orbital del electrón y el ángulo que el momento angular orbital forma con el eje z .
- (16) Demostrar que el número de estados en el átomo de hidrógeno para un valor determinado de n es $2n^2$.
- (17) (a) El momento angular total de un átomo de hidrógeno en cierto estado excitado tiene el número cuántico $j = 1/2$. ¿Qué puede decirse respecto al número cuántico de momento angular orbital l ? (b) Un átomo de hidrógeno se encuentra en el estado $n = 3$, $l = 2$. ¿Cuáles son los valores posibles de j ?
- (18) En la técnica conocida como resonancia de espín electrónico (REE) o resonancia paramagnética electrónica (RPE), una muestra de átomos con electrones

desapareados se sitúan en un campo magnético. En esta técnica el momento magnético asociado al espín del electrón se invierte por la absorción de un fotón que provoca una transición del estado de más baja energía al estado de más alta energía. (El estado de más baja energía corresponde al caso en el que el momento magnético μ_s está alineado con el campo magnético, y el estado de mayor energía corresponde al caso donde μ_s apunta en la dirección opuesta al campo.) ¿Cuál es la frecuencia que se requiere para excitar una transición REE en un campo magnético de 0.35 T?

- (19) Las longitudes de onda de los fotones emitidos por el potasio correspondientes a transiciones desde los estados $4P_{3/2}$ y $4P_{1/2}$ al estado fundamental son 766,41 y 769,90 nm. (a) Calcular las energías de estos fotones en electrón-voltios. (b) La diferencia en las energías de estos fotones es igual a la diferencia energética ΔE entre los estados $4P_{3/2}$ y $4P_{1/2}$ del potasio. Calcular ΔE . (c) Estimar el campo magnético que experimenta el electrón $4p$ del potasio.
- (20) (a) Ignorando el espín electrónico, ¿en cuántos niveles divide un campo magnético el nivel de energía $n = 3$ del átomo de hidrógeno? (b) ¿Cuál es la diferencia de energía entre estos niveles si el campo es de 0.4 T? (c) Comparar el resultado con la diferencia de energía entre los niveles $n = 2$ y $n = 3$.
- (21) La interacción espín-órbita da lugar al desdoblamiento de algunos de los niveles del átomo de hidrógeno. (a) Considérese el estado $n = 4$ y, teniendo en cuenta la interacción espín-órbita, escribir en notación espectroscópica todos los niveles posibles de energía para este valor de n en orden creciente de energía. (b) Si se aplica un campo magnético a los átomos, ¿en cuántos niveles se desdobra cada uno de los niveles del apartado (a)?
- (22) Para observar las líneas características K del espectro de rayos X, uno de los electrones $n = 1$ debe ser expulsado del átomo. Esto se consigue generalmente bombardeando el material con electrones de energía suficiente. ¿Cuál es la energía mínima requerida para observar las líneas K del (a) tungsteno, (b) molibdeno y (c) cobre?
- (23) La combinación de las constantes físicas $\alpha = e^2k/\hbar c$, donde k es la constante de Coulomb, se denomina constante de estructura fina. Aparece en numerosas expresiones de física atómica. (a) Demostrar que α es una cantidad adimensional y calcular su valor numérico. (b) Demostrar que en el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno $v_n = \alpha c/n$, donde v_n es la velocidad del electrón en el estado estacionario de número cuántico n . (c) En vista de los resultados de los apartados anteriores, ¿está justificado el tratar el átomo de hidrógeno como un sistema no relativista?
- (24) En el sistema de referencia en que está en reposo el centro de masas de un tomo de hidrógeno, el electrón y el núcleo poseen cantidades de movimiento iguales y opuestas de módulo p . (a) Demostrar que la energía cinética total del electrón y el núcleo puede escribirse en la forma $K = p^2/2m_r$, en donde $m_r = m_e M/(m_e + M)$ se llama masa reducida, m_e es la masa del electrón y M

la masa del núcleo. (b) En las ecuaciones del modelo de Bohr para el átomo, el movimiento del núcleo puede tenerse en cuenta reemplazando la masa del electrón por la masa reducida. En este sentido, hallar la corrección porcentual a la energía del estado fundamental del átomo de hidrógeno utilizando la expresión de la masa reducida. **Nota:** en general, la masa reducida del problema de dos cuerpos con masa m_1 y m_2 viene dada por $m_r = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$.

- (25) El positrón es una partícula idéntica al electrón, excepto que posee una carga positiva e . El positronio es el estado ligado de un electrón y un positrón. (a) Calcular las energías de los cinco estados energéticos más bajos del positronio utilizando la masa reducida dada por la expresión del problema anterior. (b) Las transiciones entre cualesquiera de los niveles deducidos en (a), ¿corresponden al intervalo visible de las longitudes de onda? Si es así, ¿de qué transiciones se trata?
- (26) Un átomo muónico es un átomo de hidrógeno en donde el electrón se ha substituido por una partícula μ^- . El muón μ^- es idéntico al electrón pero su masa es 207 veces mayor. (a) Calcular las energías de los cinco niveles energéticos del átomo muónico utilizando la correspondiente masa reducida (ver problema 24). (b) Las transiciones entre cualesquiera de los niveles deducidos en (a), ¿corresponden al intervalo visible de longitudes de onda? Si es así, ¿de qué transiciones se trata?
- (27) Ocho partículas idénticas y no-interactuantes están en el interior de una caja cúbica de lado $L = 0.2$ nm. Calcular la energía del estado fundamental (en eV) y determinar los números cuánticos de todos los estados ocupados si (a) las partículas son electrones y (b) las partículas tienen la misma masa que los electrones, pero no obedecen el principio de exclusión.
- (28) (a) Derivar una expresión para la longitud de onda de la línea L_α del espectro de rayos X en función del número atómico Z . Usar para ello el modelo de Bohr y suponer, como en el caso de la línea K_α , que los electrones en la capa de origen (en este caso M) no producen apantallamiento y que todo el apantallamiento se debe a los electrones en las capas internas (en este caso L y K). (b) Usar el resultado para determinar λ_{L_α} para el caso del molibdeno.

Problemas avanzados

- (29) La función de onda normalizada del estado fundamental del átomo de hidrógeno es

$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a_0} \right)^{3/2} e^{-r/a_0},$$

donde r es la coordenada radial del electrón y a_0 es el radio de Bohr. (a) Demostrar que la función de onda está realmente normalizada. (b) Representar gráficamente la función de onda como función de r . (c) Representar gráficamente la densidad de probabilidad radial y encontrar el radio en que

- es más probable encontrar al electrón. (d) Determinar la probabilidad de encontrar el electrón entre $r_1 = a_0/2$ y $r_2 = 3a_0/2$.
- (30) (a) Demostrar que la densidad de probabilidad radial del estado $n = 2$, $l = 1$, $m = 0$ de un átomo de un solo electrón puede escribirse en la forma $P(r) = Ar^4 e^{-Zr/a_0} \cos^2 \theta$, en donde A es una constante. (b) Calcular la probabilidad de que el electrón en el estado fundamental de un átomo de hidrógeno se encuentre en la región $0 < r < a_0$.
- (31) Supongamos que el electrón es una esfera de radio 10^{-15} m y de densidad de masa uniforme. Usar el módulo del momento angular de espín $|S| = \sqrt{s(s+1)}\hbar = \sqrt{3/4}\hbar$ para calcular la velocidad de rotación en el ecuador del electrón. Comparar esta velocidad con la de la luz.
- (32) Considérese un hipotético átomo de hidrógeno en el cual el electrón se reemplaza por una partícula K^- , que es un mesón con espín igual a cero. De este modo, el único momento magnético se debe al movimiento orbital de la partícula K^- . Supongamos que el átomo se encuentra en presencia de un campo magnético $B_z = 0.1$ T, (a) ¿cuál es su efecto sobre los niveles $1s$ y $2s$ del átomo? (b) ¿En cuántas rayas se divide la raya espectral $2p \rightarrow 1s$? (c) ¿Cuál es la separación en longitudes de onda entre las líneas adyacentes? **Nota:** la masa de la partícula K^- es 493.7 MeV/ c^2 y su carga es la del electrón.

Capítulo 6

Moléculas

En este capítulo haremos una breve incursión en la física molecular para discutir dos temas fundamentales. Primero, describiremos los principales tipos de enlaces que mantienen unidos a los átomos en una molécula. Finalmente, discutiremos los nuevos grados de libertad que existen en una molécula (en comparación con un átomo) que son las rotaciones y las vibraciones y describiremos las características fundamentales de los espectros moleculares de emisión y absorción asociados con estos nuevos grados de libertad.

6.1 El enlace molecular

Existen dos puntos de vista que podemos adoptar cuando consideramos la estructura electrónica de una molécula. Sea, por ejemplo, el H_2 . Podemos pensar que se trata de dos átomos de H unidos entre sí o que es un sistema mecano-cuántico de dos protones y dos electrones. El segundo punto de vista es más adecuado en este caso, pues ninguno de los dos electrones de la molécula puede identificarse como perteneciente a uno u otro protón. En su lugar, la función de onda de cada electrón está dispersa en el espacio a lo largo de toda la molécula. Sin embargo, para moléculas más complejas es útil una imagen intermedia. Por ejemplo, la molécula de nitrógeno N_2 está formada por 14 protones y 14 electrones, pero sólo dos de los electrones toman parte en el enlace. Por lo tanto, esta molécula puede considerarse como dos iones N^+ y dos electrones que pertenecen conjuntamente a la molécula. Las funciones de onda moleculares para estos electrones de enlace se denominan **orbitales moleculares**. En muchos casos estas funciones de onda moleculares pueden construirse a partir de combinaciones de las funciones de onda atómicas con las cuales estamos ya familiarizados.

Los dos tipos principales de enlace responsables de la formación de moléculas son el enlace iónico y el enlace covalente. Otros tipos de enlace importante son los enlaces de van der Waals y los enlaces de hidrógeno. El resto de esta sección está dedicado a la descripción de estos tipos de enlaces.

6.1.1 Enlace iónico

El tipo de enlace más simple es el enlace iónico, el cual tiene lugar por ejemplo en sales como el NaCl. El átomo de sodio posee un electrón $3s$ y la energía de ionización es de 5.14 eV. Por otra parte, el cloro necesita un electrón para tener una capa completa. La energía liberada en la adquisición de un electrón por un átomo se denomina **afinidad electrónica**, que en el caso del cloro es 3.6 eV. Así pues, la formación de un ión de Na^+ y un ión Cl^- por donación de un electrón del sodio al cloro requiere sólo $5.14\text{ eV} - 3.62\text{ eV} = 1.52\text{ eV}$ si los dos iones están a una distancia infinita. La energía potencial electrostática de los dos iones separados una distancia r es $-ke^2/r$. Cuando la separación de los iones es menor que unos 0.95 nm, la energía potencial negativa de atracción es superior a los 1.52 eV necesarios para crear los iones. Por tanto, a distancias menores que 0.95 nm es favorable energéticamente la formación de una molécula de NaCl.

Como la atracción electrostática se incrementa cuando los iones se aproximan, podríamos pensar que el equilibrio es imposible. Sin embargo, cuando la separación entre iones es muy pequeña, se produce una fuerte repulsión de naturaleza mecano-cuántica que está relacionada con el principio de exclusión. Cuando los iones están muy separados, la función de onda de un electrón cortical de uno de los iones no se solapa con la de cualquier electrón del otro ion. En estas condiciones es posible distinguir los electrones por el ion al que pertenecen. Esto significa que los electrones de dos iones pueden tener los mismos números cuánticos porque ocupan regiones distintas del espacio. Sin embargo, cuando la distancia entre los iones decrece, las funciones de onda de los electrones corticales comienzan a solaparse, es decir, los electrones de ambos iones comienzan a ocupar la misma región del espacio. Debido al principio de exclusión, algunos de estos electrones deben pasar a estados cuánticos de energía superior. Sin embargo, para desplazar los electrones a estados cuánticos de mayor energía se requiere energía. Este incremento de energía cuando los iones son impulsados a reunirse es equivalente a una repulsión de los mismos. No es un proceso súbito. Los estados energéticos cambian gradualmente cuando los iones se aproximan entre sí. En la Fig. 6.1 puede verse un esquema de la energía potencial $U(r)$ de los iones Na^+ y Cl^- en función de su separación r . La energía es mínima para una separación de equilibrio r_0 de 0.236 nm. Para separaciones menores, la energía crece rápidamente como consecuencia del principio de exclusión. La energía necesaria para separar los iones y formar átomos de cloro y sodio neutros se denomina **energía de disociación**, E_d , la cual en este caso es del orden de 4.27 eV.

Ejemplo 6.1: La afinidad electrónica del flúor es 3.40 eV y la separación de equilibrio del NaF es 0.193 nm. (a) ¿Cuánta energía se necesita para formar iones Na^+ y F^- a partir de los átomos neutros de sodio y flúor? (b) ¿Cuál es la energía potencial electrostática de los iones de Na^+ y F^- en su separación de equilibrio? (c) La energía de disociación del NaF es 5.38 eV. ¿Cuál es la energía debida a la repulsión de los iones en la separación de equilibrio?

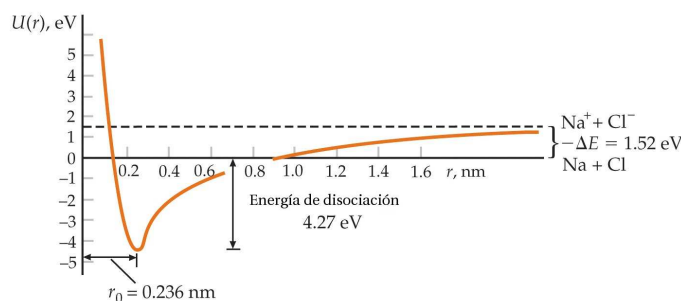


Fig. 6.1 Energía potencial de los iones Na^+ y Cl^- en función de la distancia. La energía cuando la separación es infinita es 1.52 eV, que es la energía necesaria para formar los iones a partir de los átomos neutros. La energía mínima corresponde a la separación de equilibrio $r_0 = 0.236$ nm para los iones de la molécula.

Solución. (a) La energía ΔE necesaria para formar iones Na^+ y F^- a partir de los átomos neutros de sodio y flúor es la diferencia entre la energía de ionización del sodio (5.14 eV) y la afinidad electrónica del flúor. Por tanto,

$$\Delta E = 5.14 \text{ eV} - 3.40 \text{ eV} = 1.74 \text{ eV}.$$

(b) La energía potencial electrostática, con $U_e = 0$ en el infinito es

$$U_e = -\frac{ke^2}{r} = -\frac{(8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{1.93 \times 10^{-10} \text{ m}} = 1.19 \times 10^{-18} \text{ J}$$

$$\Rightarrow U_e = -7.45 \text{ eV}.$$

(c) Si la energía potencial en el infinito es ΔE , la energía potencial total será $U_{\text{tot}} = U_e + \Delta E + U_{\text{rep}}$, en donde U_{rep} es la energía de repulsión que se obtiene igualando la energía de disociación con la energía potencial total cambiada de signo ($-U_{\text{tot}}$). La energía de disociación es igual al valor negativo de la energía potencial total:

$$E_d = -U_{\text{tot}} = -(U_e + \Delta E + U_{\text{rep}}) = -(5.38 \text{ eV} + 1.74 \text{ eV} + 7.45 \text{ eV}) = 0.33 \text{ eV}. \square$$

6.1.2 Enlace covalente

Este enlace es responsable de la formación y estructura de moléculas diatómicas como H_2 , N_2 o CO . Este enlace tiene su origen en la compartición de electrones por parte de los átomos que forman la molécula. Este proceso está íntimamente asociado a las propiedades de simetría de las funciones de onda de los electrones.

Podemos hacernos una idea del enlace covalente considerando el problema unidimensional de dos pozos rectangulares finitos. Consideremos en primer lugar un solo electrón que posee la misma probabilidad de estar en uno cualquiera de los dos pozos. Como los pozos son idénticos, la distribución de probabilidad, que es proporcional a $|\psi|^2$, debe ser simétrica respecto al punto medio entre los pozos. Por

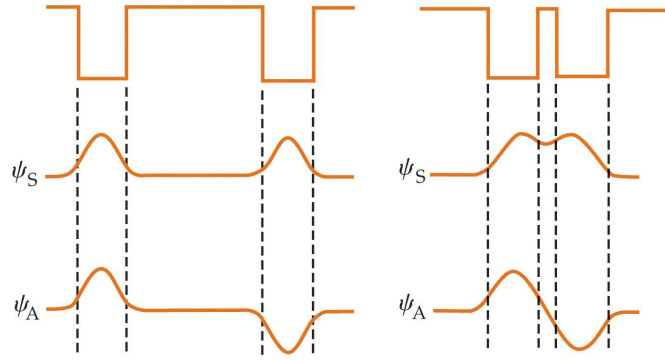


Fig. 6.2 (a) Dos pozos simétricos alejados. La función de onda electrónica puede ser simétrica (ψ_S) o antisimétrica (ψ_A) en el espacio. Las distribuciones de probabilidad y las energías son iguales para las dos funciones de onda cuando los pozos están alejados entre sí. (b) Dos pozos rectangulares próximos. Entre los pozos la función de onda espacial antisimétrica es aproximadamente cero, mientras que la simétrica es bastante grande.

lo tanto, ψ debe ser simétrica o antisimétrica respecto a los dos pozos. Las dos posibilidades correspondientes al estado fundamental se indican en la Fig. 6.2(a) para el caso en el que los pozos estén alejados, y en la Fig. 6.2(b) para el caso en que los pozos estén próximos entre sí. Una característica importante de la Fig. 6.2(b) es que en la región comprendida entre los pozos, la función de onda simétrica es grande y la antisimétrica es pequeña.

Consideremos ahora la adición de un segundo electrón a los dos pozos. El principio de exclusión de Pauli nos dice que las funciones de onda para los dos electrones deben ser antisimétricas respecto al intercambio de electrones. Nótese que en este caso, el intercambio de los electrones en los pozos es lo mismo que el intercambio de los pozos. La función de onda total de los dos electrones puede expresarse como el producto de un factor espacial y un factor de espín. Por lo tanto, una función de onda antisimétrica puede ser el producto de un factor espacial simétrico y un factor de espín antisimétrico o bien, de un factor de espín simétrico y un factor espacial antisimétrico.

Para comprender la simetría de la función de onda total, debemos entender, por lo tanto, la simetría del factor de espín de la función de onda. El espín de un solo electrón puede tener dos valores posibles de su número cuántico m_s : $m_s = +1/2$, hacia arriba, y $m_s = -1/2$, hacia abajo. Utilizaremos flechas para designar la función de onda de espín de un solo electrón: \uparrow_1 o \uparrow_2 para el electrón 1 o el 2 con espín hacia arriba y \downarrow_1 o \downarrow_2 para el electrón 1 o el 2 con espín hacia abajo. El número cuántico de espín total para los dos electrones puede ser $S = 1$, con $m_S = +1, 0, -1$; o $S = 0$, con $m_S = 0$. Utilizaremos ϕ_{S, m_S} para denotar la función de onda de espín de los dos electrones. El estado de espín $\phi_{1, +1}$, corresponde a $S = 1$ y $m_S = +1$ y puede expresarse en la forma

$$\phi_{1, +1} = \uparrow_1 \uparrow_2 \quad S = 1, m_S = +1. \quad (6.1)$$

De igual modo, el estado de espín para $S = 1$, $m_S = -1$ es

$$\phi_{1,-1} = \downarrow_1 \downarrow_2 \quad S = 1, m_S = -1. \quad (6.2)$$

Nótese que ambos estados son simétricos respecto al intercambio de los electrones. El estado de espín correspondiente a $S = 1$ y $m_S = 0$ no es tan obvio. Resulta ser proporcional a

$$\phi_{1,0} = \uparrow_1 \downarrow_2 + \uparrow_2 \downarrow_1 \quad S = 1, m_S = 0. \quad (6.3)$$

Este estado de espín es también simétrico respecto al intercambio de los electrones. El estado de espín para dos electrones con espines antiparalelos ($S = 0$) es

$$\phi_{0,0} = \uparrow_1 \downarrow_2 - \uparrow_2 \downarrow_1 \quad S = 0, m_S = 0. \quad (6.4)$$

Este estado de espín es antisimétrico respecto al intercambio de electrones.

Llegamos así al importante resultado de que el factor de espín de la función de onda es simétrico para los espines paralelos ($S = 1$) y antisimétrico para los espines antiparalelos ($S = 0$). Como la función de onda total es el producto de las funciones espacial y de espín, resulta que:

Para que la función de onda total de dos electrones sea antisimétrica, el factor espacial de la función de onda debe ser antisimétrico para los espines paralelos ($S = 1$) y simétrico para los espines antiparalelos ($S = 0$).

Consideremos ahora el problema de los dos átomos de hidrógeno. La Fig. 6.3(a) muestra la función de onda ψ_S espacialmente simétrica y otra función de onda ψ_A espacialmente antisimétrica para dos átomos de hidrógeno que están alejados entre sí. La Fig. 6.3(b) muestra las mismas dos funciones de onda para dos átomos de hidrógeno próximos entre sí. Los cuadrados de estas dos funciones de onda se muestran en la Fig. 6.3(c). Nótese que la distribución de probabilidad $|\psi|^2$ en la región comprendida entre los protones es grande para la función de onda simétrica y pequeña para la antisimétrica. Así, cuando el factor espacial de la función de onda es simétrico ($S = 0$) los electrones se encuentran frecuentemente en la región comprendida entre los protones. La nube electrónica cargada negativamente que representa a estos electrones se concentra en el espacio comprendido entre los protones, como se indica en la parte superior de la Fig. 6.3(c), y los protones están enlazados entre sí por esta nube cargada negativamente. Al contrario, cuando el factor espacial de la función de onda es antisimétrico ($S = 1$), los electrones raramente se encuentran entre los electrones, y los átomos no se asocian entre sí para formar una molécula. En este caso, la nube electrónica no está concentrada en el espacio entre los protones, como se muestra en la parte inferior de la Fig. 6.3(c).

La energía potencial electrostática total de la molécula de H_2 consta de la energía positiva de repulsión de los dos electrones y la energía potencial negativa de atracción de cada electrón y cada protón. La Fig. 6.4 muestra la energía potencial correspondiente a dos átomos de hidrógeno en función de la separación para el caso en que el factor espacial de la función de onda electrónica sea simétrico (U_S) y para el caso en que éste sea antisimétrico (U_A). Puede verse que la energía potencial

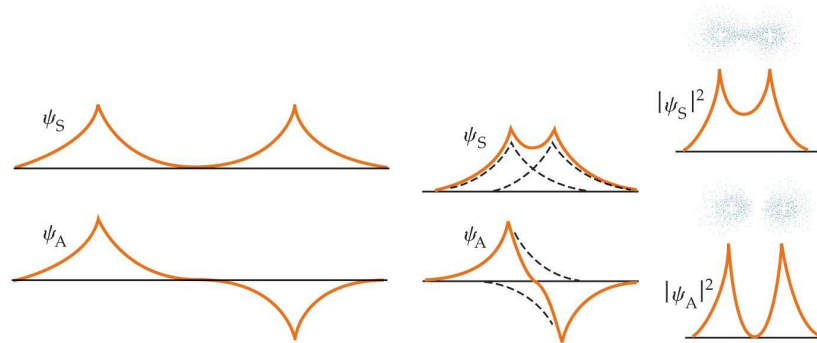


Fig. 6.3 Funciones de onda simétrica y antisimétrica para dos átomos de hidrógeno (a) alejados y (b) próximos entre sí. (c) Distribuciones de probabilidad para las funciones de onda de (b). Para la función de onda simétrica, la densidad de carga electrónica es grande entre los protones. Esta densidad de carga negativa mantiene los protones unidos en la molécula de hidrógeno. Para la función de onda antisimétrica la densidad de carga electrónica es más reducida entre los protones.

del estado simétrico es inferior a la del estado antisimétrico y es semejante a la del enlace iónico. La separación de equilibrio del H_2 es $r_0 = 0.074$ nm y la energía de enlace es 4.52 eV. Para el estado antisimétrico, la energía potencial nunca es negativa y no hay enlace.

Veamos a continuación por qué tres átomos de hidrógeno no se enlazan para formar H_3 . Si un tercer átomo de hidrógeno se aproxima a una molécula de H_2 , el tercer electrón no puede encontrarse en el estado $1s$ y tener su espín antiparalelo al de los otros dos electrones. Si este electrón está en un estado espacial antisimétrico respecto al intercambio con uno de los otros electrones, la repulsión de este átomo es mayor que atracción del otro. Cuando los tres átomos se empujan mutuamente,

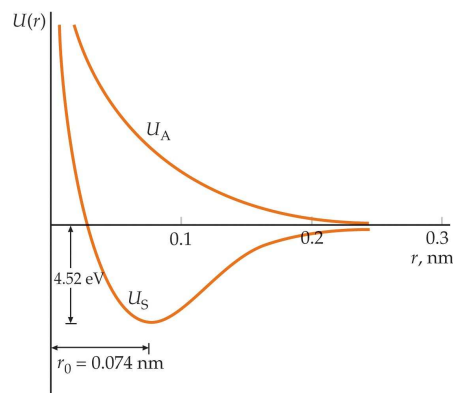


Fig. 6.4 Energía potencial en función de la separación para dos átomos de hidrógeno. La curva U_S corresponde a una función de onda con un factor espacial simétrico y la curva U_A corresponde a una función de onda con un factor espacial antisimétrico.

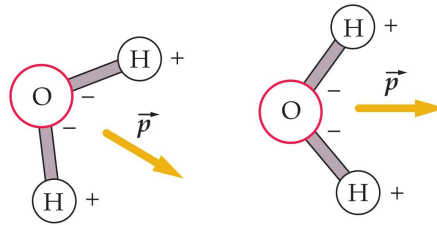


Fig. 6.5 Enlace entre moléculas de agua debido a la atracción de los dipolos eléctricos. El momento dipolar de cada molécula viene indicado por \vec{p} . El campo de un dipolo orienta a otro dipolo, de modo que los momentos tienden a estar paralelos. Cuando los momentos dipolares son aproximadamente paralelos, el centro de carga negativa de una molécula está próximo al centro de carga positiva de la otra molécula y las moléculas se atraen.

el tercer electrón es forzado hacia un estado energético superior por el principio de exclusión. El enlace entre dos átomos de hidrógeno se dice que está *saturado* ya que no hay lugar para otro electrón. Los dos electrones compartidos completan los estados $1s$ de ambos átomos.

Cuando dos átomos idénticos se enlazan, como en el caso del O_2 y el N_2 , el enlace es puramente covalente. Sin embargo, el enlace entre dos átomos distintos normalmente es una mezcla de enlaces covalente e iónico. Una medida del grado con que un enlace es iónico o covalente puede obtenerse a partir del momento dipolar eléctrico de la molécula. Por ejemplo, si el enlace del $NaCl$ fuera puramente iónico, el centro de la carga positiva estaría en el ión Na^+ y el centro de la carga negativa en el ión Cl^- . El momento dipolar sería: $p_{ionico} = er_0$, done $r_0 = 2.36 \times 10^{-10}$ m es la separación de equilibrio de los iones. Así, el momento dipolar del $NaCl$ sería: $p_{ionico} = er_0 = (1.6 \times 10^{-19} C)(2.36 \times 10^{-10} m) = 3.78 \times 10^{-29}$ C·m. Realmente, el momento dipolar eléctrico del $NaCl$ es 3.0×10^{-29} C·m. El cociente p_{medido}/p_{ionico} puede definirse como el porcentaje de enlace iónico.

6.1.3 El enlace van der Waals

Dos moléculas separadas se atraen una a otra por fuerzas electrostáticas llamadas *fuerzas de van der Waals*. Los enlaces de van der Waals debidos a estas fuerzas son mucho más débiles que los enlaces tratados anteriormente. A temperaturas suficientemente altas, estas fuerzas no son lo bastante intensas como para vencer la agitación térmica de átomos y moléculas, pero a temperaturas suficientemente bajas, la agitación térmica se hace despreciable y las fuerzas de van der Waals son la causa de que virtualmente todas la sustancias se condensen en forma líquida o sólida. Las fuerzas de van der Waals surgen de la interacción de los momentos dipolares eléctricos instantáneos (es decir, no permanentes) de las moléculas.

En el caso de moléculas polares (como el agua) con momentos dipolares permanentes, el campo eléctrico producido por una molécula tiende a orientar a otra molécula de tal forma que los momentos dipolares tienden a atraerse (ver Fig. 6.5).

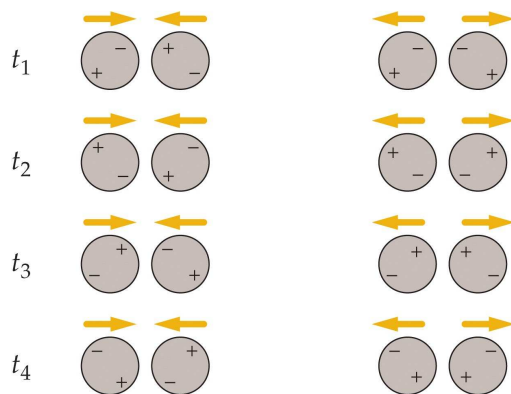


Fig. 6.6 Atracción de van der Waals entre moléculas no polares. (a) Orientaciones de momentos dipolares instantáneos posibles en instantes distintos que conducen a la atracción. (b) Orientaciones posibles que favorecen la repulsión.

Las moléculas no polares también atraen a otras moléculas no polares por medio de las fuerzas de van der Waals. Aunque en promedio las moléculas polares tienen momentos dipolares eléctricos nulos, debido a las fluctuaciones en las posiciones de las cargas. Cuando dos moléculas no polares están próximas, las fluctuaciones de los momentos dipolares instantáneos tienden a correlacionarse de modo que se produce una atracción. Este fenómeno se ilustra en la Fig. 6.6.

6.1.4 El enlace de hidrógeno

Este enlace se debe a la coposesión de un protón entre dos átomos frecuentemente dos átomos de oxígeno. Esta coposesión es semejante a la coposesión de electrones responsable del enlace covalente ya estudiado. Este enlace viene facilitado por la pequeña masa del protón y por la ausencia de electrones internos en el hidrógeno. El enlace de hidrógeno mantiene unidos grupos de moléculas con frecuencia y es el responsable de las conexiones cruzadas, características de moléculas biológicas gigantes y polímeros, manteniendo fijas sus formas. La estructura helicoidal bien conocida del ADN se mantiene gracias a las conexiones de los enlaces de hidrógeno a través de las múltiples vueltas de la hélice.

6.2 Niveles energéticos y espectros de moléculas diatómicas

Como en el caso de un átomo, una molécula emite radiación electromagnética cuando realiza una transición de un estado energético excitado a otro estado de menor energía. Inversamente, una molécula puede absorber radiación y sufrir una transición de un estado de menor energía a otro estado de mayor energía. El estudio de los espectros de emisión y de absorción nos proporciona, por lo tanto,

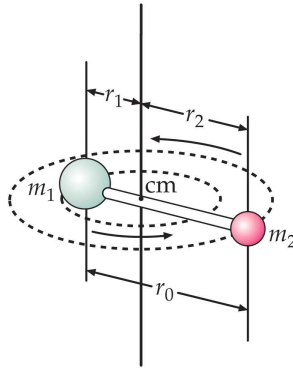


Fig. 6.7 Molécula diatómica girando alrededor de un eje que pasa por su centro de masas.

información respecto a los estados energéticos de las moléculas. Por simplicidad, aquí sólo consideraremos el caso de moléculas diatómicas.

La energía de una molécula puede separarse convenientemente en tres partes: electrónica, debida al movimiento de los electrones en la molécula; vibratoria, debida a las oscilaciones de los átomos de la molécula; y rotacional, debida a la rotación de la molécula alrededor de su centro de masas. Los valores de estas energías son suficientemente distintas, de modo que pueden tratarse por separado. Las energías debidas a las excitaciones electrónicas de una molécula son del orden de 1 eV, lo mismo que en el caso atómico. Las energías de vibración y rotación son muy inferiores, como veremos en esta sección.

6.2.1 Niveles energéticos de rotación

En la Fig. 6.7 se muestra un modelo simple para una molécula diatómica formada por las masas m_1 y m_2 , separadas por una distancia r_0 y girando alrededor del centro de masas. Clásicamente, la energía de rotación es

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad (6.5)$$

donde I es el momento de inercia y ω es la frecuencia angular. En términos del momento angular $L = I\omega$, resulta

$$E = \frac{(I\omega)^2}{2I} = \frac{L^2}{2I}. \quad (6.6)$$

La solución de la ecuación de Schrödinger para la rotación conduce a la cuantización del momento angular

$$L^2 = l(l+1)\hbar^2 \quad \text{con } l = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.7)$$

en donde l es el número cuántico orbital. Esta es la misma condición cuántica del momento angular orbital de un electrón en un átomo. Sin embargo, en este caso L corresponde al momento angular de la molécula entera girando alrededor de su

centro de masas. Los niveles energéticos de una molécula en rotación vienen, por lo tanto, dados por

$$E_l = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2I} = l(l+1)E_{0r} \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (6.8)$$

donde E_{0r} es la energía rotacional característica de una molécula y viene dada por

$$E_{0r} = \frac{\hbar^2}{2I}. \quad (6.9)$$

El momento de inercia alrededor de un eje que pasa por el centro de masas de una molécula diatómica es

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2. \quad (6.10)$$

Utilizando $m_1 r_1 = m_2 r_2$, donde $r_{1,2}$ es la distancia del átomo 1 o 2 al centro de masas, y $r_0 = r_1 + r_2$, podemos escribir

$$I = \mu r_0^2, \quad (6.11)$$

donde $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ es la masa reducida.

Si las masas son iguales, como en las moléculas H_2 y O_2 , la masa reducida es $\mu = m/2$ y el momento de inercia viene dado por

$$I = \frac{1}{2} m r_0^2. \quad (6.12)$$

Una unidad conveniente para hablar de masas atómicas y moleculares es la **unidad de masa unificada**, u, que se define como un doceavo de la masa del átomo de carbono 12 neutro. La masa del ^{12}C es 12 u. En general,

$$1 \text{ u} = \frac{1 \text{ g}}{N_A} = \frac{10^{-3} \text{ kg}}{6.0221 \times 10^{23}} = 1.6606 \times 10^{-27} \text{ kg} \quad (6.13)$$

donde N_A es el número de Avogadro.

Ejemplo 6.2: Determinar la masa reducida de la molécula de HCl. *Nota:* usar que la masa del H es 1.01 u y la del átomo de cloro 35.5 u.

Solución.

$$\mu = \frac{m_H m_{Cl}}{m_H + m_{Cl}} = \frac{1.01 \times 35.5}{1.01 + 35.5} \text{ u} = 0.982 \text{ u}. \quad \square$$

Ejemplo 6.3: Estimar la energía rotacional característica de una molécula de O_2 , suponiendo que la separación de los átomos es de 0.1 nm.

Solución. La energía rotacional característica viene dada por

$$E_{0r} = \frac{\hbar^2}{2I} \quad \text{con} \quad I = \mu r_0^2 = \frac{1}{2} m r_0^2.$$

Con lo cual,

$$E_{0r} = \frac{\hbar^2}{m r_0^2} = \frac{(1.055 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{(16 \text{ u})(10^{-10} \text{ m})^2} \times \frac{1 \text{ u}}{1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}} \\ \Rightarrow E_{0r} = 2.62 \times 10^{-4} \text{ eV}. \quad \square$$

6.2.2 Niveles energéticos de vibración

Los átomos de las moléculas vibran en torno a sus posiciones de equilibrio. Estas vibraciones se pueden describir por un oscilador armónico cuántico cuyos niveles energéticos vienen dados por

$$E_\nu = (\nu + 1/2)hf, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (6.14)$$

donde f es la frecuencia del oscilador y ν es el **número cuántico de vibración**. Nótese que los niveles de energía están equiespacados con intervalos de hf . La frecuencia de vibración de una molécula diatómica está relacionada con la fuerza ejercida por un átomo sobre el otro. Consideremos dos cuerpos de masas m_1 y m_2 conectados por un muelle de constante de fuerza K . Se puede demostrar que la frecuencia de oscilación de este sistema es:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{\mu}}, \quad (6.15)$$

siendo μ la masa reducida. La constante de fuerza efectiva K de una molécula diatómica puede, por lo tanto, determinarse a partir de la medida de la frecuencia de oscilación de la molécula.

Una regla de selección sobre las transiciones entre estados vibracionales (del mismo estado electrónico) requiere que ν sólo puede variar en ± 1 , de modo que la energía del fotón emitido en una transición de este tipo es hf y la frecuencia es f , la misma que la frecuencia de vibración. Hay una regla similar para los estados rotacionales que nos dice que el número cuántico l debe variar en ± 1 para transiciones entre estados rotacionales.

Una frecuencia típica correspondiente a una transición medida entre dos estados vibracionales es de 5×10^{13} Hz (en el rango del infrarrojo), es decir,

$$E = hf = (4.14 \times 10^{-15} \text{ eV})(5 \times 10^{13} \text{ Hz}) = 0.2 \text{ eV}. \quad (6.16)$$

Esta energía es unas 1000 veces mayor que la energía rotacional típica $E_{0,r}$ de la molécula de O_2 y aproximadamente 8 veces mayor que la energía térmica $k_B T = 0.026 \text{ eV}$ a $T = 300 \text{ K}$. Por ello, los niveles de vibración no pueden excitarse por colisiones moleculares a temperaturas ordinarias.

Ejemplo 6.4: La frecuencia de vibración de la molécula de CO es 6.42×10^{13} Hz. ¿Cuál es la constante de fuerza efectiva de esta molécula?

Solución. La frecuencia de vibración viene dada por

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{\mu}} \Rightarrow K = (2\pi f)^2 \mu,$$

donde $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2) = 6.86 \text{ u}$ ya que $m_1 = 6 \text{ u}$ y $m_2 = 16 \text{ u}$. Con lo cual, $K = 1.85 \times 10^3 \text{ N/m}$. \square

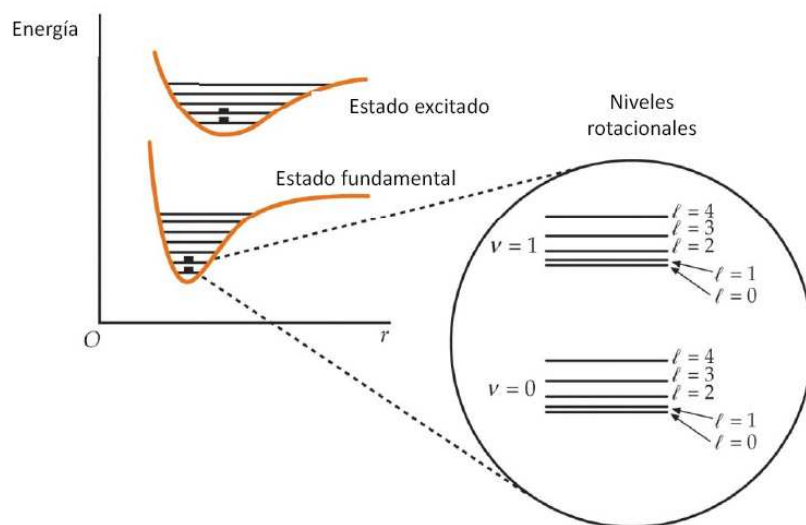


Fig. 6.8 Niveles energéticos electrónicos, vibracionales y rotacionales de una molécula diatómica. Los niveles rotacionales se muestran en una ampliación de los niveles de vibración $\nu = 0$ y $\nu = 1$ del estado fundamental electrónico.

6.2.3 Espectros de emisión y de absorción

Espectros de emisión

La Fig. 6.8 muestra esquemáticamente algunos niveles energéticos electrónicos, vibracionales y rotacionales de una molécula diatómica. Los niveles vibracionales se especifican con el número cuántico ν y los rotacionales con la letra l . Los niveles de vibración más bajos están uniformemente espaciados, con $\Delta E = hf$. Obsérvese que las curvas de energía potencial que determinan la fuerza entre los dos átomos de la molécula no son exactamente iguales para los estados electrónicos fundamental y excitado. Esto implica que la frecuencia fundamental de vibración f es diferente para distintos estados electrónicos. Para transiciones entre estados vibracionales de diferentes estados electrónicos, la regla de selección $\Delta\nu = \pm 1$ no es válida. Estas transiciones tienen como consecuencia la emisión de fotones de longitudes de onda en el espectro del visible o en sus proximidades, y por ello, el espectro de emisión de una molécula por transiciones electrónicas se denomina a veces *espectro óptico*.

El espaciado de niveles rotacionales se incrementa para los valores crecientes de l . Como las energías de rotación son mucho más pequeñas que las correspondientes a la excitación electrónica de una molécula, la rotación molecular aparece en los espectros ópticos como un desdoblamiento fino de las líneas espectrales. Cuando la estructura fina no está resuelta, el espectro aparece en forma de bandas como se indica en la Fig. 6.9(a). Una inspección más detallada de estas bandas revela que poseen una estructura fina debida a los niveles energéticos rotacionales, como se muestra en la ampliación de la figura (a) en la Fig. 6.9(c).

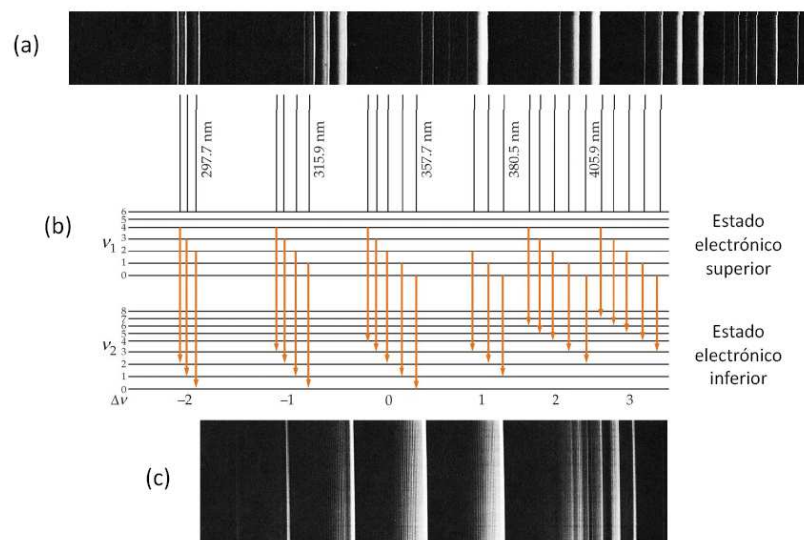


Fig. 6.9 (a) Parte del espectro de emisión del N_2 . Las líneas espectrales son debidas a las transiciones entre los niveles de vibración de dos estados electrónicos, como se indica en el diagrama de niveles energéticos (b). (c) Ampliación de una parte de la figura (a), donde se muestra que las líneas de (a) son realmente bandas con estructura causada por los niveles rotacionales.

Espectros de absorción

Una gran parte de la espectroscopía molecular se realiza utilizando técnicas de absorción infrarroja, mediante la cual sólo se excitan los niveles energéticos de vibración y rotación del nivel electrónico en su estado fundamental. A temperaturas ordinarias las energías de vibración son suficientemente grandes en comparación con la energía térmica $k_B T$ para que la mayor parte de las moléculas se encuentren en el estado vibracional más bajo $\nu = 0$, para el cual la energía es $E_0 = (1/2)hf$. La transición de $\nu = 0$ a $\nu = 1$ es la transición predominante en la absorción. Sin embargo, las energías rotacionales son habitualmente menores que $k_B T$, de modo que las moléculas se distribuyen entre varios estados energéticos de rotación. Si la molécula se encuentra en un estado vibracional caracterizado por $\nu = 0$ y un estado rotacional caracterizado por el número cuántico l , su energía es

$$E_l = \frac{1}{2}hf + l(l+1)E_{0r}, \quad (6.17)$$

en donde E_{0r} viene dada por la ec. (6.9). A partir de este estado, dos transiciones están permitidas por las reglas de selección. Para una transición al siguiente estado vibracional más alto $\nu = 1$ y un estado rotacional caracterizado por $l+1$, la energía es

$$E_{l+1} = \frac{3}{2}hf + (l+1)(l+2)E_{0r}. \quad (6.18)$$

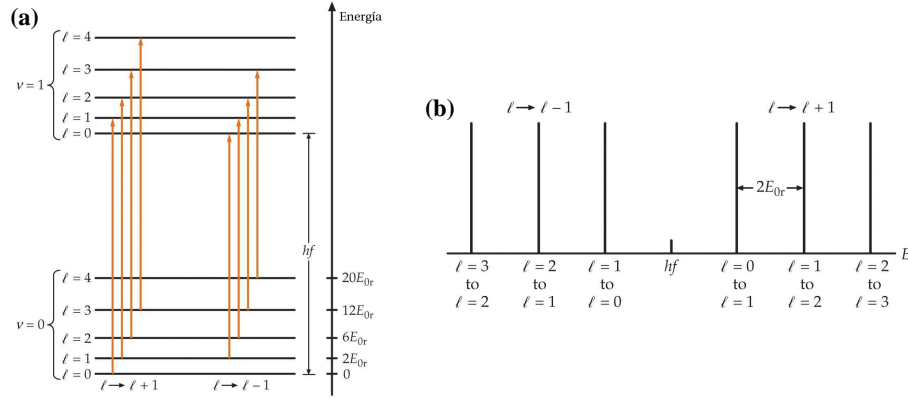


Fig. 6.10 (a) Transiciones de absorción entre los estados vibracionales más bajos $\nu = 0$ y $\nu = 1$ en una molécula diatómica. Estas transiciones obedecen a la regla de selección $\Delta l = \pm 1$. (b) Espectro de absorción típico de una molécula diatómica. La parte derecha corresponde a las transiciones $l \rightarrow l + 1$ y la parte izquierda a $l \rightarrow l - 1$. Las líneas están igualmente espaciadas por el valor $2E_{0r}$. El hueco energético entre las dos ramas es hf , donde f es la frecuencia de vibración de la molécula.

Para una transición al siguiente estado vibracional más alto y un estado rotacional caracterizado por $l - 1$, la energía final es

$$E_{l-1} = \frac{3}{2}hf + (l-1)lE_{0r}. \quad (6.19)$$

Las diferencias energéticas son

$$\Delta E_{l \rightarrow l+1} = E_{l+1} - E_l = hf + 2(l+1)E_{0r}, \quad (6.20)$$

donde $l = 1, 2, \dots$ y

$$\Delta E_{l \rightarrow l-1} = E_{l-1} - E_l = hf - 2lE_{0r}, \quad (6.21)$$

donde $l = 1, 2, 3, \dots$. La Fig. 6.10(a) ilustra estas transiciones. Las frecuencias de las mismas vienen dadas por

$$f_{l \rightarrow l+1} = \frac{\Delta E_{l \rightarrow l+1}}{h} = f + 2(l+1)E_{0r}/h \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (6.22)$$

y

$$f_{l \rightarrow l-1} = \frac{\Delta E_{l \rightarrow l-1}}{h} = f - 2lE_{0r}/h \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (6.23)$$

Las frecuencias de las transiciones $l \rightarrow l + 1$ son, por lo tanto, $f + 2(E_{0r}/h)$, $f + 4(E_{0r}/h)$, $f + 6(E_{0r}/h)$, y así sucesivamente; las correspondientes a la transición $l \rightarrow l - 1$ son $f - 2(E_{0r}/h)$, $f - 4(E_{0r}/h)$, $f - 6(E_{0r}/h)$, etc. Es de esperar, por lo tanto, que el espectro de absorción contenga frecuencias igualmente espaciadas por $2(E_{0r}/h)$, excepto un hueco de anchura igual a $4(E_{0r}/h)$ entorno a la frecuencia de vibración f , como indica la Fig. 6.10(b). Una medida de la posición del hueco nos permite conocer f , y una medida del espaciado de los picos de absorción nos

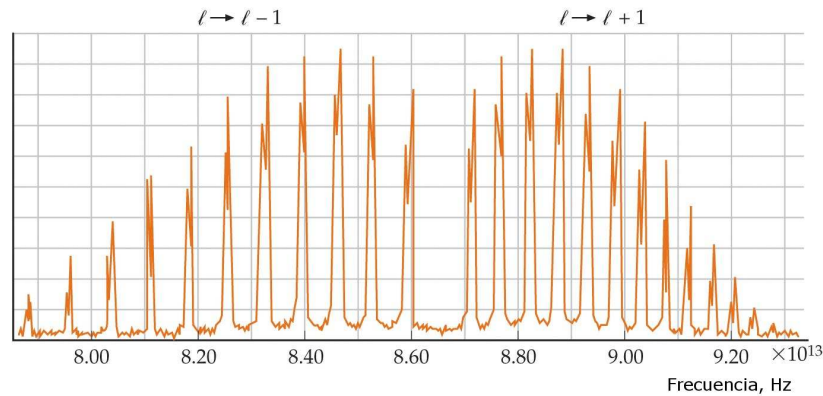


Fig. 6.11 Espectro de absorción de la molécula diatómica HCl. La estructura de doble pico es debida a los dos isótopos del cloro ^{35}Cl (abundancia 75.5%) y ^{37}Cl (abundancia 24.5%). Las intensidades de los picos varían porque la población del estado inicial depende de l .

da el valor de E_{0r} , que es inversamente proporcional al momento de inercia de la molécula.

La Fig. 6.11 muestra el espectro de absorción del HCl. La estructura en doble pico del espectro es debida a la presencia natural de los isótopos ^{35}Cl y ^{37}Cl que proporcionan diferentes momentos de inercia a la molécula HCl. Si inicialmente todos los niveles rotacionales estuvieran igualmente poblados, las intensidades de cada línea de absorción serían iguales. Sin embargo, la población de un nivel rotacional l es proporcional a la degeneración del nivel, es decir, al número de estados con igual valor de l , o sea $2l + 1$, y al factor de Boltzmann $e^{-E/k_{\text{B}}T}$, en donde E es la energía del estado. Para valores pequeños de l , la población crece ligeramente debido al factor de degeneración, mientras que para valores grandes de l la población decrece por causa del factor de Boltzmann. Las intensidades de las líneas de absorción crecen, por lo tanto, con l para valores bajos de l y disminuyen con l para valores grandes de l , como puede verse en la figura.

6.3 Bibliografía recomendada

Este capítulo está basado enteramente en la siguiente referencia:

- Capítulo 37 de “Física para la ciencia y la tecnología, Vol. 2C” (5ª edición) de Tipler y Mosca, editorial Reverté.

Para aquellos que deseen profundizar en este tema, recomendamos las siguientes referencias:

- Capítulo 9 de “Modern Physics” (5th edition) de Tipler y Llewellyn, W.H. Freeman.

- Capítulo 11 de “Modern Physics” (3rd edition) de R.A. Serway, C.J. Moses and C.A. Moyer, Thomson/Brook Cole (2005).
- Capítulo 12 de “Física Cuántica” de Robert Eisberg y Robert Resnick, editorial Limusa (1988).

6.4 Ejercicios del Capítulo 6

Cuestiones

- (1) ¿Es la molécula NaCl polar o no polar?
- (2) ¿Es la molécula N₂ polar o no polar?
- (3) ¿Se presenta el neón naturalmente como Ne o Ne₂? ¿Por qué?
- (4) ¿Qué tipo de enlace presentan (a) HF, (b) KBr, (c) N₂ y (d) los átomos de Ag en un sólido?
- (5) ¿Por qué resulta lógico que la distancia de separación entre los dos protones sea mayor en el ión de H₂⁺ que en la molécula H₂?
- (6) ¿Por qué un átomo absorbe radiación sólo a partir de su estado fundamental, mientras que una molécula diatómica puede absorber radiación a partir de muchos estados rotacionales distintos?

Problemas

- (7) La separación de equilibrio de los iones de K⁺ y Cl⁻ en el KCl es aproximadamente 0.267 nm. (a) Calcular la energía potencial de atracción de los iones suponiendo que para esta separación son cargas puntuales. (b) La energía de ionización del K es 4.34 eV y la afinidad electrónica del Cl es 3.62 eV. Determinar la energía de disociación, despreciando toda energía de repulsión. La energía de disociación medida es 4.49 eV. ¿Cuál es la energía debida a la repulsión de los iones a la separación de equilibrio?
- (8) Indicar el valor medio de r (distancia entre los átomos) para dos niveles de vibración en la curva de energía potencial para una molécula diatómica y demostrar que debido a la asimetría de la curva, r se incrementa con el crecimiento de la energía de vibración y, por tanto, los sólidos se expansionan al elevar su temperatura.
- (9) La separación de equilibrio entre los núcleos de la molécula de LiH es 0.16 nm. Determinar la separación entre los niveles rotacionales de energía para $l = 3$ y $l = 2$ de esta molécula diatómica.
- (10) La frecuencia central de la banda de absorción del HCl mostrada en la Fig. 6.11 corresponde a $f = 8.66 \times 10^{13}$ Hz y los picos de absorción están separados aproximadamente por $\Delta f = 6 \times 10^{11}$ Hz. Utilizar esta información para determinar (a) la energía de vibración más baja (punto cero) del HCl, (b) el momento de inercia del HCl y (c) la separación de equilibrio de los átomos.

- (11) Dos objetos de masa m_1 y m_2 se fijan a un muelle de constante de fuerza K y distancia de equilibrio r_0 . (a) Demostrar que cuando m_1 se desplaza una distancia Δr_1 del centro de masas, la fuerza ejercida por el muelle es

$$F = -K \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} \right) \Delta r_1.$$

(b) Demostrar que la frecuencia angular de oscilación es $f = (1/2\pi)\sqrt{K/\mu}$, donde μ es la masa reducida.

- (12) La constante de fuerza del enlace de hidrógeno en la molécula H_2 es 580 N/m. Deducir las energías de los cuatro niveles vibracionales más bajos de las moléculas H_2 , HD y D_2 , y las longitudes de onda de los fotones resultantes de las transiciones entre niveles vibracionales adyacentes de estas moléculas.
- (13) La energía potencial entre dos átomos de una molécula puede describirse bastante bien por el potencial de Lenard-Jones, que puede expresarse en la forma

$$U(r) = U_0 \left[\left(\frac{a}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{a}{r} \right)^6 \right],$$

donde U_0 y a son constantes. (a) Determinar la separación interatómica r_0 en función de a para la cual la energía potencial es mínima. (b) Determinar el valor correspondiente $U_{\min} = U(r_0)$.

- (14) En este problema debe determinarse la forma en que la fuerza de van der Waals entre una molécula polar y otra no polar depende de la distancia entre las moléculas. Supongamos que el momento dipolar de la molécula polar se encuentra orientado en la dirección x y la molécula no polar está a una distancia x . (a) ¿Cómo varía con la distancia x el campo eléctrico de un dipolo? (b) Teniendo en cuenta que la energía potencial de un dipolo eléctrico de momento \vec{p} en un campo eléctrico \vec{E} es igual a $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ y que el momento dipolar inducido de la molécula no polar es proporcional a E , determinar cómo depende la energía potencial de interacción de las dos moléculas de la distancia de separación. (c) A partir de la ecuación $F_x = -dU/dx$, determinar la dependencia con x de la fuerza entre las dos moléculas. (d) ¿Cuál sería la correspondiente dependencia de la fuerza entre dos moléculas polares?

Problemas avanzados

- (15) Para una molécula, tal como CO, que tiene un momento dipolar eléctrico permanente, las transiciones radiativas que obedecen la regla de selección $\Delta l = \pm 1$ entre dos niveles energéticos rotacionales del mismo nivel vibracional están permitidas. (Es decir, la regla de selección $\Delta l = \pm 1$ no es válida). (a) Determinar el momento de inercia del CO y calcular la energía rotacional característica en eV. (b) Construir un diagrama para los niveles rotacionales desde $l = 0$ a $l = 5$ para algún nivel vibracional. Especificar las energías en eV partiendo de $E = 0$ para $l = 0$. (c) Indicar en el diagrama obtenido las transiciones que

obedecen $\Delta l = -1$ y calcular la energía del fotón emitido. (d) Determinar la longitud de onda de los fotones emitidos en cada transición en (c). ¿A qué región del espectro electromagnético pertenecen estos fotones?

Capítulo 7

Sólidos

En este capítulo presentaremos una breve introducción a la física de los sólidos. Comenzaremos por estudiar los diversos tipos de enlaces que mantienen unidos a los átomos y moléculas de un sólido. Continuaremos con la descripción clásica de la conducción eléctrica en metales. Después, abordaremos la teoría cuántica de la conducción, donde estudiaremos en particular las propiedades de un gas de electrones (o gas de Fermi). Introduciremos el concepto de bandas de energía que nos permitirá entender las diferencias básicas entre los diversos tipos de sólidos. Le dedicaremos especial atención a los materiales semiconductores y describiremos algunos de los dispositivos semiconductores que constituyen la base de la electrónica moderna. Finalmente, acabaremos este tema describiendo las propiedades fundamentales de los materiales superconductores.

7.1 La estructura de los sólidos

Las tres fases de la naturaleza que observamos –gas, líquido y sólido– son debidas a las intensidades relativas de las fuerzas atractivas entre moléculas y la energía térmica molecular. Las moléculas en la fase gaseosa tienen una elevada energía cinética térmica y ejercen escasa influencia entre sí, excepto durante sus frecuentes pero breves colisiones. A temperaturas suficientemente bajas, las fuerzas de van der Waals son la causa de que prácticamente todas las sustancias se condensen en forma líquida y después en forma sólida. En los líquidos las moléculas están bastante próximas –y su energía cinética es lo suficientemente baja– para que desarrollen temporalmente un *orden de corto alcance*. Si la energía cinética se reduce aún más, las moléculas forman sólidos, caracterizados por un orden permanente.

Si un líquido se enfría lentamente, las moléculas (o átomos) pueden distribuirse en una red cristalina regular. Sin embargo, si el líquido se enfría rápidamente, el sólido formado no es cristalino, sino que recuerda a una fotografía instantánea de un líquido. Tal sólido se denomina *amorfo*. Tiene un orden de corto alcance, pero no el *orden de largo alcance* característico de un cristal.

La mayor parte de los sólidos comunes son policristalinos. El tamaño de un

monocristal es típicamente del orden de una fracción de milímetro. La propiedad más importante de un monocristal es la simetría y regularidad de su estructura. Puede considerarse que se trata de una sola estructura unitaria que se repite por todo el cristal. La unidad más pequeña de un cristal se llama **celda unidad**, y su estructura depende del tipo de enlace. En lo que resta de sección estudiaremos los diversos tipos de enlaces que son responsables de los diferentes tipos de sólidos.

7.1.1 Sólidos iónicos

Muchos cristales se forman por medio del enlace iónico, es decir, por medio de la atracción coulombiana entre iones con cargas eléctricas de signo opuesto. Un buen ejemplo lo constituye el cloruro sódico (NaCl), cuya estructura cristalina se muestra en la Fig. 7.1. En este caso, los iones de Na^+ y Cl^- se disponen en una red cúbica simple con un ión de Na^+ rodeado de iones de Cl^- (6 vecinos). La parte atractiva neta de la energía potencial de un ión en un cristal puede escribirse en la forma

$$U_{\text{atr}} = -\alpha \frac{ke^2}{r}, \quad (7.1)$$

donde r es la separación entre los vecinos y α es la llamada **constante de Madelung** que depende de la geometría del cristal. Si sólo los 6 vecinos de cada ión fueran esenciales, α sería igual a 6. Sin embargo, además de los 6 vecinos de carga opuesta a una distancia r , existen 12 iones con la misma carga a una distancia $\sqrt{2}r$, 8 iones de carga opuesta a $\sqrt{3}r$ y así sucesivamente:

$$\alpha = 6 - \frac{12}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{3}} - \dots \quad (7.2)$$

El resultado correspondiente a la estructura cúbica centrada en las caras es $\alpha = 1.7476$.

Cuando los iones Na^+ y Cl^- están muy próximos entre sí, se repelen debido al solapamiento de sus electrones y a la repulsión debida al principio de exclusión.

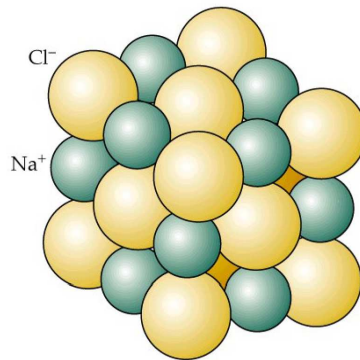


Fig. 7.1 Estructura cristalina centrada en las caras del cristal NaCl.

La energía potencial asociada a esta repulsión puede expresarse aproximadamente mediante la siguiente expresión empírica:

$$U_{\text{rep}} = \frac{A}{r^n}, \quad (7.3)$$

donde A y n son constantes. La energía potencial total de un ión será, por tanto

$$U = -\alpha \frac{ke^2}{r} + \frac{A}{r^n}. \quad (7.4)$$

La separación de equilibrio $r = r_0$ es aquella para la cual la fuerza $F = -dU/dr$ es cero. Diferenciando y haciendo $dU/dr = 0$ para $r = r_0$ se obtiene

$$A = \frac{\alpha ke^2 r_0^{n-1}}{n} \quad (7.5)$$

y por tanto,

$$U = -\alpha \frac{ke^2}{r_0} \left[\frac{r_0}{r} - \frac{1}{n} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n \right] \quad (7.6)$$

Para $r = r_0$, tenemos

$$U(r_0) = -\alpha \frac{ke^2}{r_0} \left(1 - \frac{1}{n} \right). \quad (7.7)$$

Si conocemos la separación de equilibrio r_0 , el valor de n puede deducirse aproximadamente a partir de la *energía de disociación* del cristal, es decir, la energía necesaria para separar el cristal en sus átomos componentes.

La energía de disociación medida del NaCl es 770 kJ/mol, lo cual implica 7.98 eV por par de iones. Substituyendo $U(r_0)$ por -7.98 eV, r_0 por 0.282 nm y α por 1.75 en la ec. (7.7), se obtiene que $n = 9.35 \approx 9$.

La mayor parte de los cristales iónicos, tales como el LiF, KF, KCl, KI y AgCl, tienen una estructura cúbica centrada en las caras. En la Fig. 7.2 se muestra la estructura del cloruro de cesio (CsCl), llamada *cúbica centrada en el cuerpo* (fcc). En esta estructura cada ión posee 8 vecinos más próximos de cargas opuestas. La constante de Madelung para estos cristales es 1.7627.

Los sólidos iónicos tienen las siguientes propiedades generales:

- Forman cristales relativamente estables y duros.
- Son malos conductores eléctricos porque no tienen electrones libres.
- Tienen puntos de fusión muy altos ya que hay que aplicarles una gran cantidad de energía térmica para superar su gran energía de cohesión.
- Son transparentes a la radiación visible, pero absorben fuertemente en la región del infrarrojo.
- Son en general muy solubles en líquidos polares como el agua.

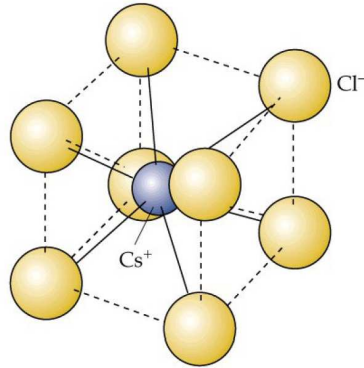


Fig. 7.2 Estructura cúbica centrada en el cuerpo del cristal CsCl.

7.1.2 Sólidos covalentes

Como vimos en el capítulo pasado, el enlace covalente es muy fuerte. El carbono sólido, en su forma de diamante, es un cristal cuyos átomos están unidos mediante enlaces covalentes. Como el carbono tiene una configuración electrónica $1s^2 2s^2 2p^2$, le faltan cuatro electrones para tener la capa p llena. Por tanto, cada átomo de carbono en el diamante se liga covalentemente a otros cuatro átomos de carbono para formar una estructura estable de capa cerrada.

En la estructura de diamante, cada átomo de carbono se enlace a otros cuatro átomos situados en las esquinas de un cubo, como se ilustra en la Fig. 7.3(a). La Fig. 7.3(b) muestra la estructura cristalina del diamante. Nótese que cada átomo de carbono forma enlaces covalentes con los cuatro átomos vecinos más próximos. Otros sólidos covalentes, como el silicio o el germanio, tienen estructuras similares.

La energía de cohesión de los sólidos covalentes es incluso mayor que en los iónicos, lo que explica su dureza. El diamante es particularmente duro y tiene un

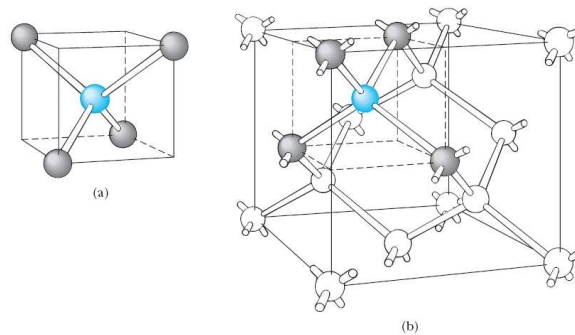


Fig. 7.3 (a) Cada átomo de carbono en el diamante se enlace covalentemente a otros cuatro átomos de carbono que forman un tetraedro. (b) La estructura cristalina del diamante.

punto de fusión enorme (del orden de 4000 K). En general, los sólidos covalentes son aislantes eléctricos, ya que los electrones están localizados en los átomos, y suelen ser transparentes, ya que no absorben la luz visible.

7.1.3 Sólidos metálicos

Los enlaces metálicos son en general más débiles que los enlaces covalentes. Los electrones de valencia en un metal están relativamente libres y se pueden mover por todo el material. Hay un gran número de electrones libres en un metal, típicamente uno o dos electrones por átomo. La estructura de un metal se puede considerar como una red de iones positivos rodeada por un “gas” de electrones libres. El mecanismo de enlace en un metal es la fuerza atractiva entre los iones positivos y el gas de electrones.

Los metales tienen una energía de cohesión en el rango de 1 a 4 eV y, por tanto, menores que en el caso de sólidos covalentes, pero todavía suficientemente grandes como para producir sólidos muy fuertes. La luz visible interactúa fuertemente con los electrones, lo que hace que los metales no sean transparentes. Por otra parte, los metales poseen una alta conductividad eléctrica gracias a los electrones libres. Además, el carácter no direccional del enlace metálico hace que los metales se puedan “mezclar” con relativa facilidad para formar **aleaciones** con una gran variedad de propiedades interesantes.

7.2 Imagen microscópica de la conducción eléctrica

Las propiedades eléctricas de los sólidos, en general, y de los metales, en particular, han atraído desde siempre una gran atención por sus implicaciones prácticas. En esta sección estudiaremos la conductividad eléctrica de los metales desde un punto de vista clásico y mostraremos la necesidad de desarrollar una teoría cuántica para describir correctamente dicha propiedad.

Consideraremos un metal como una red regular tridimensional de iones que ocupan un volumen V y contienen un gran número N de electrones que pueden moverse libremente a través de todo el metal. Se sabe que ese número es aproximadamente de entre 1 y 4 electrones por átomo. En ausencia de campo eléctrico, los electrones libres se mueven en el metal aleatoriamente de un modo muy parecido a como las moléculas de un gas se mueven dentro de un recipiente. Por ello, con frecuencia nos referimos a estos electrones libres de un metal como un *gas electrónico*.

La corriente eléctrica en un segmento de alambre conductor es proporcional a la caída de potencial a través del segmento (ley de Ohm):

$$I = \frac{V}{R}. \quad (7.8)$$

La resistencia R es proporcional a la longitud L del segmento de alambre e inver-

samente proporcional al área transversal A :

$$R = \rho \frac{L}{A}, \quad (7.9)$$

donde ρ es la resistividad que depende del material. De este modo, la corriente se puede expresar en términos del campo eléctrico E como

$$I = \frac{V}{R} = \frac{EL}{\rho L/A} = \frac{1}{\rho} EA. \quad (7.10)$$

Al cociente I/A se le conoce como **densidad de corriente**. Esta densidad de corriente se puede expresar en términos de cantidades microscópicas como:

$$\vec{J} = qn\vec{v}_d, \quad (7.11)$$

donde q es la carga de los portadores, n es la densidad de portadores y \vec{v}_d es la velocidad de desplazamiento. La ec. (7.10) establece la siguiente relación entre la densidad de corriente y el campo eléctrico (en forma vectorial):

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad (7.12)$$

donde $\sigma = 1/\rho$ es la conductividad del material. Ec. (7.12) es la expresión microscópica de la **ley de Ohm**.

Combinando las ecs. (7.11) y (7.12), obtenemos

$$-en_e\vec{v}_d = \frac{1}{\rho} \vec{E}, \quad (7.13)$$

donde hemos substituido q por $-e$. Según la ec. (7.13), \vec{v}_d es proporcional al campo eléctrico. A continuación, veremos cómo explica esto la teoría clásica de los metales.

En presencia de un campo eléctrico, un electrón libre experimenta una fuerza $-e\vec{E}$. Si esta fuerza fuera la única que actuase sobre el electrón, éste experimentaría una aceleración constante $-e\vec{E}/m_e$. Sin embargo, la ec. (7.13) implica que existe una situación estacionaria en la cual la velocidad de desplazamiento constante del electrón es proporcional al campo \vec{E} . En el modelo microscópico se supone que un electrón libre es acelerado durante un corto intervalo de tiempo y luego sufre un choque contra un ión de la red. Después del choque, la velocidad del electrón no tiene ninguna relación con la que tenía antes de la colisión.

Para un electrón típico, su velocidad en un tiempo t posterior a su último choque es $\vec{v}_0 - (e\vec{E}/m_e)t$, donde \vec{v}_0 es la velocidad inmediatamente después del choque. Como \vec{v}_0 es aleatoria (su dirección), no contribuye a la velocidad media de los electrones. Por tanto, esta velocidad media o de desplazamiento es

$$v_d = \frac{eE}{m_e} \tau, \quad (7.14)$$

donde τ es el tiempo promedio después del último choque. Substituyendo \vec{v}_d en la ec. (7.13), obtenemos

$$-en_e \left(-\frac{e\vec{E}}{m_e} \tau \right) = \frac{1}{\rho} \vec{E} \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{m_e}{n_e e^2 \tau}} \quad (7.15)$$

El tiempo τ , llamado **tiempo de colisión**, es el tiempo medio entre colisiones. La distancia media que el electrón recorre entre colisiones es $v_m\tau$ y se llama **recorrido libre medio** λ :

$$\lambda = v_m\tau, \quad (7.16)$$

donde v_m es la velocidad media de los electrones. De este modo, podemos expresar la resistividad de un material en términos de λ como sigue:

$$\rho = \frac{m_e v_m}{n_e e^2 \lambda} \quad (7.17)$$

Según la ley de Ohm, ρ es independiente de \vec{E} . Como m_e , n_e y e son constantes, las únicas magnitudes que podrían depender de \vec{E} son v_m y λ . Analizaremos estas magnitudes para ver si cumplen estas dependencias.

Interpretación clásica de λ y v_m

Clásicamente los electrones deberían tener en equilibrio térmico una energía cinética media igual a $(3/2)k_B T$, que a 300 K es aproximadamente 0.04 eV. Para $T = 300$ K la raíz de su velocidad cuadrática media (v_{cm}), ligeramente mayor que la velocidad media (v_m), es

$$v_m \approx v_{cm} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}} = \sqrt{\frac{3(1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(300 \text{ K})}{9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}}} = 1.17 \times 10^5 \text{ m/s}. \quad (7.18)$$

Esta velocidad es muchos órdenes de magnitud mayor que la velocidad de desplazamiento, que suele ser del orden de 10^{-5} m/s. Por tanto, podemos concluir que v_m no depende de \vec{E} .

El recorrido libre medio está relacionado clásicamente con el tamaño de los iones de la red en el conductor y el número de iones por unidad de volumen. Consideremos que el electrón se mueve con velocidad v a través de una región de iones en reposo, que consideraremos como esferas duras. El electrón chocará con un ión de radio r cuando se encuentre a una distancia r del centro del ión. En un tiempo t_1 el electrón se mueve una distancia vt_1 . Si existe un ión cuyo centro se encuentre en el volumen cilíndrico $\pi r^2 vt_1$, el electrón chocará con él. El electrón entonces cambia de dirección y choca con otro ión en el tiempo t_2 si el centro del ión está en el volumen $\pi r^2 vt_2$. Así pues, en el tiempo total $t = t_1 + t_2 + \dots$ el electrón chocará con el número de iones cuyos centros estén en el volumen $\pi r^2 vt$. El número de iones en este volumen es $n_{\text{ion}} \pi r^2 vt$, siendo n_{ion} el número de iones por unidad de volumen. La longitud de la trayectoria total dividida por el número de colisiones es igual al recorrido libre medio

$$\lambda = \frac{vt}{n_{\text{ion}} \pi r^2 vt} = \frac{1}{n_{\text{ion}} \pi r^2} = \frac{1}{n_{\text{ion}} A}, \quad (7.19)$$

donde $A = \pi r^2$ es el área transversal de un ion.

Éxitos y fracasos del modelo clásico

Como n_{ion} y r no dependen de \vec{E} , tampoco λ depende del campo eléctrico \vec{E} . Así pues, dentro de la teoría clásica, la resistividad ρ tampoco dependerá de \vec{E} , de acuerdo con la ley de Ohm. Sin embargo, la teoría clásica predice una dependencia incorrecta de la resistividad con la temperatura. Esta teoría predice que ρ es proporcional a \sqrt{T} , mientras que en realidad se observa que la resistividad varía linealmente con la temperatura. Además, cuando ρ se calcula a $T = 300$ K, se obtiene una resistividad que es seis veces mayor que el valor medido.

La teoría clásica de la conducción falla porque los electrones no son partículas clásicas. En la próxima sección veremos cómo los efectos cuánticos modifican las conclusiones de la teoría clásica.

7.3 El gas de electrones de Fermi

Algunas de las características de un sólido conductor se pueden comprender considerando que los electrones de valencia forman un gas de electrones libres (**gas de electrones de Fermi**). Las principales características de este gas pueden entenderse considerando que un electrón del metal se comporta como una partícula en una caja. En esta sección estudiaremos cualitativamente las principales características de un gas de electrones de Fermi.

Cuantización de la energía en un caja

Como vimos en el Capítulo 4, los niveles de energía de un electrón en una caja unidimensional de anchura L vienen dados por

$$E_n = \frac{n^2 \hbar^2}{8mL^2} \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.20)$$

y las correspondientes funciones de onda

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (7.21)$$

El número cuántico n caracteriza la función de onda para un estado particular y la energía de dicho estado. En problemas tridimensionales aparecen tres números cuánticos, cada uno asociado a una dimensión.

Principio de exclusión de Pauli

La distribución de los electrones entre los posibles estados energéticos está dominada por el principio de exclusión, que establece que dos electrones en un átomo no pueden estar en el mismo estado, es decir, no pueden tener el mismo conjunto de números cuánticos. Este principio de exclusión se aplica a todas las partículas de espín $1/2$, tales como electrones, protones y neutrones. Estas partículas tienen un

número cuántico de espín m_S que tiene dos valores posibles $+1/2$ y $-1/2$. El estado cuántico de una partícula se caracteriza por el número cuántico de espín m_S , más los números cuánticos asociados a la parte espacial de la función de onda. Como los números de espín tienen dos valores posibles, el principio de exclusión puede establecerse en función de los estados espaciales:

“Como máximo sólo pueden existir dos electrones con la misma serie de valores de sus números cuánticos espaciales”.

Ejemplo 7.1: Comparar la energía total del estado fundamental de 5 bosones idénticos de masa m en una caja unidimensional con la de 5 fermiones de masa m en la misma caja.

Solución. En el caso de bosones, todas las partículas podrían estar en el mismo estado para dar lugar a una energía total igual a $E_{\text{bosones}} = 5E_1$, donde E_1 es la energía del nivel más bajo de la caja unidimensional.

En el caso de fermiones, tan sólo podemos tener dos electrones como máximo por nivel de energía de la caja. Por tanto, la energía del estado fundamental será en este caso igual a

$$E_{\text{fermiones}} = 2E_1 + 2E_2 + 1E_3 = 19E_1 = 3.8E_{\text{bosones}}. \quad \square$$

La energía de Fermi

Cuando hay muchos electrones en una caja, a $T = 0$ los electrones ocuparán los estados más bajos de energía compatibles con el principio de exclusión. Si tenemos N electrones, podemos poner dos electrones en el nivel de menor energía, dos en el siguiente y así sucesivamente. Los N electrones llenarán los $N/2$ niveles más bajos de energía (ver Fig. 7.4). La energía del último nivel lleno (o medio lleno) a $T = 0$ se llama **energía de Fermi**, E_F . Si los electrones se mueven en una caja unidimensional, la energía de Fermi vendrá dada por la ec. (7.20) con $n = N/2$:

$$E_F = \left(\frac{N}{2}\right)^2 \frac{h^2}{8m_e L^2} = \frac{h^2}{32m_e} \left(\frac{N}{L}\right)^2. \quad (7.22)$$

Ejemplo 7.2: Supongamos que existe un ión y, por lo tanto, un electrón libre, por cada 0.1 nm en una caja unidimensional. Calcular la energía de Fermi.

Solución.

$$E_F = \frac{h^2}{32m_e} \left(\frac{N}{L}\right)^2 = \frac{h^2 c^2}{32m_e c^2} \left(\frac{N}{L}\right)^2 = \frac{(1240 \text{ eV} \cdot \text{nm})^2}{32(0.511 \text{ MeV})} \left(0.1 \frac{\text{ión}}{\text{nm}}\right)^2 = 9.4 \text{ eV}. \quad \square$$

En nuestro modelo de conducción, los electrones se mueven en una caja tridimensional de volumen V . Se puede demostrar que la energía de Fermi viene dada en este caso por

$$E_F = \frac{h^2}{8m_e} \left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{2/3} = (0.365 \text{ eV} \cdot \text{nm}^2) \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \quad (7.23)$$

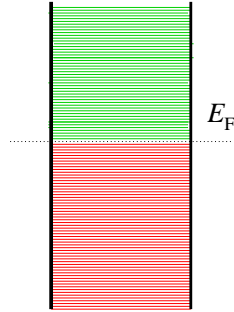


Fig. 7.4 Para $T = 0$, los electrones llenan los estados energéticos permitidos hasta la energía de Fermi E_F . Los niveles están tan próximos que puede suponerse que hay continuidad.

Ejemplo 7.3: La densidad de electrones en el cobre es $8.47/\text{nm}^3$. Calcular la energía de Fermi del cobre.

Solución.

$$E_F = (0.365 \text{ eV} \cdot \text{nm}^2) \left(\frac{8.47}{\text{nm}^3} \right)^{2/3} = 7.04 \text{ eV}. \quad \square$$

La energía media de un electrón libre puede calcularse a partir de la distribución energética completa de los electrones. Para $T = 0$, la energía media resulta ser

$$E_m = \frac{3}{5} E_F. \quad (7.24)$$

Para el cobre, $E_m \approx 4 \text{ eV}$. Esta energía media es grande comparada con las energías térmicas típicas, que son $k_B T \approx 0.026 \text{ eV}$ para $T = 300 \text{ K}$.

La función de Fermi

La probabilidad de que un estado energético en el gas de electrones esté ocupado se llama **función de Fermi**, $f(E)$. Para $T = 0$ esta función viene dada por la siguiente función escalón (ver Fig. 7.5):

$$f(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } E < E_F \\ 0 & \text{si } E > E_F \end{cases}. \quad (7.25)$$

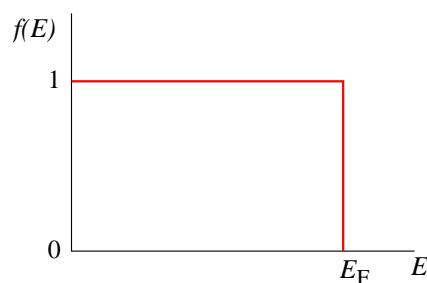
A $T > 0$ los electrones pueden ocupar parcialmente estados por encima de E_F , dejando estados por debajo de E_F parcialmente vacíos.

La **temperatura de Fermi**, T_F , está definida como

$$k_B T_F = E_F. \quad (7.26)$$

Para temperaturas mucho menores que la de Fermi, la energía media de los iones de la red es muy inferior a la de Fermi y la distribución energética de los electrones no diferirá de la de $T = 0$.

Ejemplo 7.4: Determinar la temperatura de Fermi del cobre.

Fig. 7.5 La función de Fermi para $T = 0$.

Solución.

$$T_F = \frac{E_F}{k_B} = \frac{7.04 \text{ eV}}{8.62 \times 10^{-5} \text{ eV/K}} = 81700 \text{ K.}$$

□

Como un campo eléctrico en un conductor acelera conjuntamente a todos los electrones de conducción, el principio de exclusión no impide que los electrones libres que ocupan los estados llenos participen en la conducción. La Fig. 7.6 muestra función de Fermi como función de la velocidad para una temperatura ordinaria. La ocupación es prácticamente 1 para velocidades en el intervalo $(-u_F, u_F)$, donde u_F es la velocidad de Fermi dada por

$$u_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m_e}}. \quad (7.27)$$

El efecto neto del campo es desplazar sólo a los electrones próximos a la energía de Fermi.

Ejemplo 7.5: Calcular la velocidad de Fermi para el cobre.

Solución.

$$u_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m_e}} = \sqrt{\frac{2(7.04 \text{ eV})}{9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}} \times \frac{1.6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}}} = 1.57 \times 10^6 \text{ m/s.}$$

□

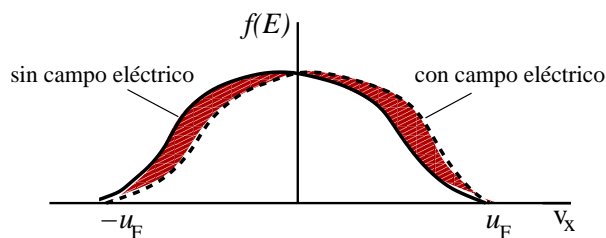


Fig. 7.6 La función de Fermi en términos de la velocidad en un dimesión sin campo eléctrico (línea continua) y con un campo eléctrico en la dirección x (línea de trazos). La diferencia está muy exagerada.

7.4 Teoría cuántica de la conducción eléctrica

Consideremos de nuevo la expresión de la resistividad substituyendo la velocidad media v_m por la velocidad de Fermi u_F :

$$\rho = \frac{m_e u_F}{n e^2 \lambda} \quad (7.28)$$

Esta expresión presenta dos problemas. Primero, como u_F es independiente de la temperatura, ρ será independiente de T , a no ser que λ dependa de T . Segundo, u_F es muy grande para explicar los resultados experimentales. En concreto, el valor típico de u_F da lugar a una resistividad que es del orden de 100 veces mayor de lo que se observa experimentalmente. La solución de ambos problemas reside en calcular apropiadamente el recorrido libre medio λ .

Dispersión de ondas electrónicas

Hay que reinterpretar la ecuación para el recorrido libre medio: $\lambda = 1/n_{\text{ion}}A$. Cálculos cuánticos muestran que en una red perfectamente ordenada λ es infinito y el recorrido libre medio se hace finito por las imperfecciones de la red cristalina. La teoría cuántica muestra que A depende simplemente de las *desviaciones* de los iones reticulares respecto a una red perfectamente ordenada y no del tamaño de los iones. Las causas más comunes de tales desviaciones son las vibraciones térmicas de los iones y la presencia de impurezas.

Podemos utilizar $\lambda = 1/n_{\text{ion}}A$ si reinterpretamos el significado del área A . Podemos tomar $A = \pi r_0^2$, donde r_0 es la amplitud de las vibraciones térmicas. La energía de vibración en el movimiento armónico simple es proporcional al cuadrado de la amplitud, es decir, a πr_0^2 . De este modo, el área efectiva A resulta ser proporcional a la energía de vibración de los iones de la red. Según el teorema de equipartición, sabemos que la energía media de vibración es proporcional a $k_B T$. Así, A es proporcional a T y λ proporcional a $1/T$. Por lo tanto, la resistividad es proporcional a T de acuerdo con los experimentos.

La presencia de impurezas en un metal también causa desviaciones respecto a la regularidad perfecta de la red cristalina. Los efectos de las impurezas sobre la resistividad son independientes de la temperatura.

7.5 Teoría de bandas de los sólidos

Las resistividades de los sólidos varían enormemente entre aislantes y conductores. Para un aislante típico, como el cuarzo, $\rho \sim 10^{16} \Omega \cdot \text{m}$, mientras que para un conductor típico, $\rho \sim 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$. La razón de esta enorme diferencia es la variación en la densidad de los electrones libres, n_e . Para entender esta variación, consideremos el efecto de la red sobre los niveles energéticos de los electrones.

Comencemos con los niveles energéticos de los átomos individuales cuando éstos

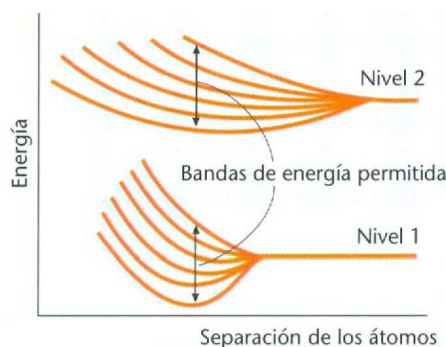


Fig. 7.7 División energética de dos niveles de energía para seis átomos como función de la separación de los átomos. Si existen muchos átomos, cada nivel se divide en un conjunto casi continuo de niveles que constituyen una banda.

se aproximan entre sí. Los niveles de energía permitidos de un átomo aislado están frecuentemente muy separados. Por ejemplo, en el hidrógeno, la energía permitida más baja $E_1 = -13.6$ eV es 10.2 eV menor que la siguiente energía más baja $E_2 = (-13.6 \text{ eV})/4 = -3.4$ eV. Consideremos ahora dos átomos idénticos y fijémonos en un nivel de energía particular. Cuando los átomos están muy separados, la energía de un nivel particular es la misma en cada átomo. Cuando los átomos se aproximan entre sí, el nivel de cada átomo cambia debido a la influencia del otro átomo. Como consecuencia, el nivel se desdobra en dos niveles de energía ligeramente diferentes que corresponden al sistema formado por los dos átomos. Si aproximamos tres átomos entre sí, un nivel energético particular se divide en tres niveles ligeramente distintos. La Fig. 7.7 muestra el desdoblamiento de dos niveles energéticos para seis átomos en función de la separación de los átomos.

Si tenemos N átomos idénticos, un nivel particular de energía de un átomo aislado se divide en N niveles energéticos distintos, pero muy próximos, cuando los átomos se reúnen conjuntamente. En un sólido macroscópico, N es un número muy grande –del orden de 10^{23} – de modo que cada nivel se divide en un número muy grande de niveles llamado **banda de energía**. Los niveles están espaciados casi continuamente dentro de la banda. Existe una banda separada de niveles para cada nivel energético particular del átomo aislado. Las bandas pueden estar muy separadas en su energía, pueden estar muy próximas, e incluso pueden solaparse, según el tipo de átomo y el tipo de enlace en el sólido.

Las bandas de más baja energía, que corresponden a los niveles de menor energía del átomo en la red, están llenas de electrones ligados al átomo. Los electrones que pueden tomar parte en la conducción ocupan las bandas de energía más elevadas. La banda de energía más alta que contiene electrones se llama **banda de valencia**. La banda de valencia puede estar completamente llena de electrones o sólo parcialmente llena, según el tipo de átomo y el tipo de enlace del sólido.

Ahora ya podemos entender por qué algunos sólidos son conductores y otros

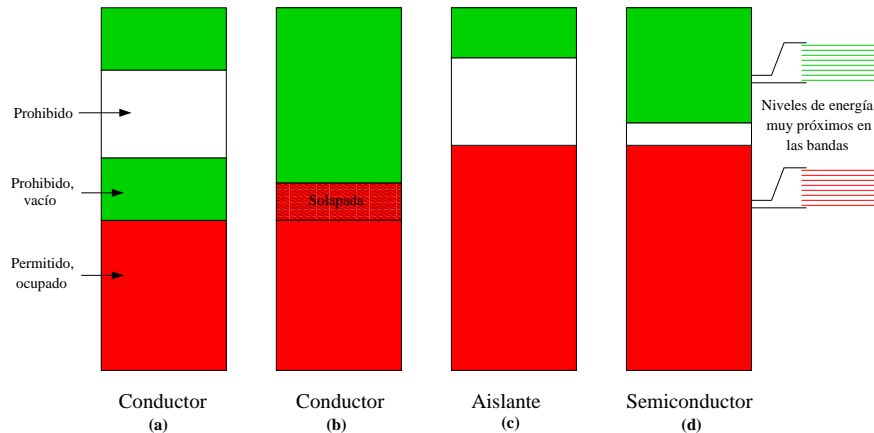


Fig. 7.8 Cuatro posibles estructuras de bandas para un sólido. (a) Conductor típico. La banda de valencia está sólo parcialmente llena, de modo que los electrones pueden excitarse fácilmente a estados energéticos próximos. (b) Conductor con las bandas de energía permitidas solapadas. (c) Aislante típico. Posee una zona que abarca un gran intervalo de energía prohibida o gap entre la banda de valencia llena y la banda de conducción. (d) Semiconductor. El gap entre la banda de valencia llena y la banda de conducción es muy pequeño, de modo que algunos electrones son excitados y pasan a la banda de conducción a temperaturas ordinarias, dejando huecos en la banda de valencia.

son aislantes. Si la banda de valencia está sólo parcialmente llena, existen muchos estados energéticos vacíos en la banda y los electrones de ésta pueden ser fácilmente elevados a un estado energético superior por la acción del campo eléctrico. En consecuencia, este material es un buen conductor. Si la banda de valencia está llena y hay un espaciado grande de energía entre ella y la siguiente banda disponible, al aplicar un campo eléctrico típico, éste será insuficiente para excitar un electrón desde los niveles energéticos superiores de la banda llena a través del gran intervalo que les separa de los niveles energéticos de la banda vacía, de modo que el material es un aislante. La banda más baja en la cual hay estados no ocupados se llama **banda de conducción**. En un conductor, la banda de valencia está sólo parcialmente llena, de modo que esta banda es también la banda de conducción. Un espaciado o intervalo energético entre bandas permitidas es una **banda energética prohibida o gap**.

En la Fig. 7.8(a) se muestra una estructura de bandas para un conductor como el cobre. Las bandas más bajas (no mostradas) están llenas con los electrones más internos de los átomos. Las bandas por debajo de la de valencia están llenas con los electrones más internos de los átomos. La banda de valencia está llena hasta sólo aproximadamente la mitad. Cuando se establece un campo eléctrico en el conductor, los electrones de la banda de conducción se aceleran, lo cual significa que su energía aumenta. Esto es consistente con el principio de exclusión de Pauli, ya que existen muchos estados energéticos vacíos, justo por encima de los ocupados por los electrones de esta banda. Estos son, por lo tanto, electrones de conducción.

La Fig. 7.8(b) muestra la estructura de bandas del magnesio, que es también un conductor. En este caso la banda ocupada más elevada está llena pero existe una banda vacía por encima que la solapa. Las dos bandas forman así una banda de conducción-valencia que está sólo parcialmente llena.

La Fig. 7.8(c) muestra la estructura de bandas de un aislante típico. Para $T = 0$ K, la banda de valencia está completamente llena. La siguiente banda contiene estados vacíos, es decir, la banda de conducción está vacía. A las temperaturas ordinarias sólo unos pocos electrones pueden excitarse y pasar a estados de esta banda. Cuando se establece en el sólido un campo eléctrico moderado, los electrones no pueden acelerarse, pues no hay estados vacíos a energías próximas, lo cual explica las bajas conductividades de estos materiales. Cuando a un aislante se le aplica un campo eléctrico suficientemente intenso para que un electrón se excite a través del gap hasta la banda vacía, tiene lugar la ruptura dieléctrica.

En algunos materiales, el intervalo de energía prohibida entre la banda de valencia y la banda de conducción vacía es muy pequeño, como muestra la Fig. 7.8(d). Para $T = 0$ no hay electrones en la banda de conducción y el material es un aislante. Sin embargo, a temperaturas ordinarias existe un número apreciable de electrones en la banda de conducción debido a la excitación térmica. Estos materiales se denominan **semiconductores intrínsecos**. En los semiconductores típicos, como el silicio y el germanio, el gap (o intervalo prohibido) es sólo de 1 eV aproximadamente. En presencia de un campo eléctrico, los electrones de la banda de conducción pueden acelerarse, ya que existen estados vacíos próximos. Además, por cada electrón que existe en la banda de conducción hay una vacante, o hueco, en la banda de valencia llena próxima. En presencia de un campo eléctrico, los electrones de esta banda también pueden ser excitados a un nivel de energía vacante. Esto contribuye a la corriente eléctrica y se describe fácilmente como el movimiento de un hueco en el sentido del campo, es decir, opuesto al movimiento de los electrones. El hueco actúa así como una carga positiva.

Una característica interesante de los semiconductores es que la resistividad del material decrece con la temperatura, al contrario que los conductores normales. La razón es que cuando la temperatura crece, el número de electrones libres aumenta, porque hay más electrones en la banda de conducción. El número de huecos en la banda de valencia también crece, como es lógico. En los semiconductores, el efecto producido al incrementar el número de portadores de carga, tanto electrones como huecos, excede al efecto del incremento de la resistividad producido por la mayor dispersión de los electrones por los iones de la red debido a las vibraciones térmicas.

7.6 Semiconductores

La propiedad semiconductor de estos materiales es básica en su uso como componentes de circuitos electrónicos cuya resistencia se controla por aplicación de una corriente o voltaje externo. Sin embargo, muchos de estos dispositivos de es-

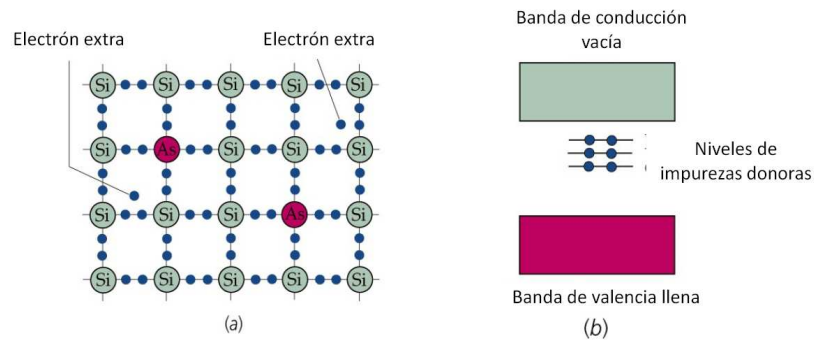


Fig. 7.9 (a) Ilustración esquemática de un sólido de silicio con impurezas de arsénico. Como el arsénico tiene cinco electrones de valencia, existe un electrón adicional, débilmente ligado al átomo. Este electrón se excita fácilmente a la banda de conducción, contribuyendo a la conducción eléctrica. (b) Estructura de bandas de un semiconductor de tipo n , como el Si dopado con As. Los átomos de las impurezas proporcionan niveles energéticos completos que están justamente por debajo de la banda de conducción. Estos niveles entregan electrones a la banda de conducción.

tado sólido, tales como el diodo o el transistor, utilizan **semiconductores con impurezas** que se crean mediante la adición controlada de ciertas impurezas a semiconductores intrínsecos. Esta adición controlada de impurezas se denomina **dopaje** y se dice entonces que el semiconductor está **dopado**. En la Fig. 7.9(a) se muestra un esquema del silicio con impurezas de arsénico, de tal modo que unos pocos átomos de silicio son reemplazados en la red cristalina por átomos de arsénico. La banda de conducción del silicio puro está virtualmente vacía a temperaturas ordinarias, de modo que es un mal conductor eléctrico. Sin embargo, el arsénico tiene cinco electrones de valencia, mientras que el silicio tiene cuatro. Cuatro de los electrones del arsénico comparten el enlace con los cuatro átomos de silicio próximos, y el quinto electrón está débilmente ligado al átomo. Este electrón adicional ocupa un nivel energético que está ligeramente por debajo de la banda de conducción del sólido y se excita fácilmente a la banda de conducción, en donde puede contribuir a la conducción eléctrica.

En la Fig. 7.9(b) se muestra el efecto sobre la estructura de bandas de un cristal de silicio dopado con arsénico. Los niveles que se indican justamente por debajo de la banda de conducción son debidos a los electrones adicionales de los átomos de arsénico. Estos niveles se llaman **niveles donores**, ya que entregan electrones a la banda de conducción sin dejar vacantes en la banda de valencia. Un semiconductor en estas condiciones se denomina **semiconductor tipo n** , porque los principales portadores de carga son electrones. La conductividad de un semiconductor dopado puede controlarse por la cantidad de impurezas añadidas. La adición de una sola parte por millón puede incrementar la conductividad en varios órdenes de magnitud.

Otro tipo de semiconductor con impurezas se obtiene al reemplazar un átomo de silicio por un átomo de galio, el cual posee 3 electrones de valencia (ver Fig. 7.10(a)). El átomo de galio acepta electrones de la banda de valencia para completar sus cua-

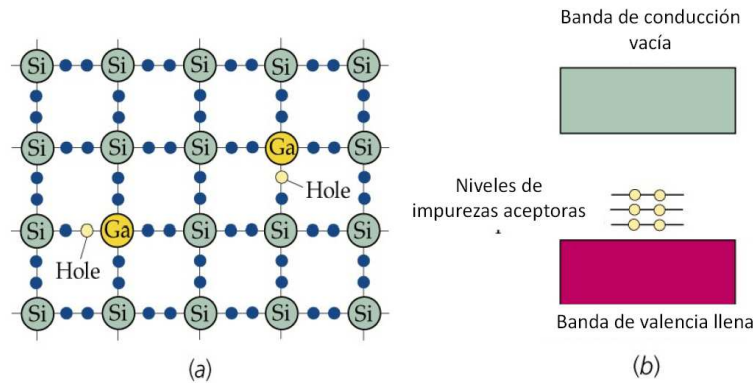


Fig. 7.10 (a) Ilustración esquemática de un sólido de silicio dopado con impurezas de galio. Como el galio sólo posee tres electrones de valencia, se produce una vacante (o hueco) en uno de sus enlaces. Cuando los electrones se mueven hacia la vacante, ésta se desplaza contribuyendo a la conducción de la corriente eléctrica. (b) Estructura de bandas de un semiconductor de tipo p , como el Si dopado con Ga. Los átomos de las impurezas proporcionan niveles energéticos vacíos, justo por encima de la banda de valencia llena, que aceptan electrones de la banda de valencia.

tro enlaces covalentes, creando así una vacante o hueco en la banda de valencia. En la Fig. 7.10(b) se muestra el efecto sobre la estructura de bandas del silicio obtenida al doparlo con galio. Los niveles vacíos que se indican justamente por encima de la banda de valencia son debidos a las vacantes producidas por los átomos de galio ionizados. Estos niveles se denominan **niveles aceptores** ya que aceptan electrones de la banda de valencia saturada cuando estos electrones se excitan térmicamente a un estado energético más elevado. Esto da lugar a vacantes en la banda de valencia que pueden propagarse libremente en la dirección de un campo eléctrico. Este semiconductor se llama de **tipo p** porque los portadores de carga son las vacantes positivas o huecos. El hecho de que la conducción se debe al movimiento de las vacantes se puede verificar usando el efecto Hall.

Ejemplo 7.6: El número de electrones libres en el silicio puro es de unos 10^{10} electrones/cm³ a temperaturas ordinarias. Si por cada millón de átomos reemplazamos un átomo de silicio por otro de arsénico, ¿cuántos electrones libres existirán entonces por centímetro cúbico? Nota: la densidad del silicio es $\rho = 2.33$ g/cm³ y su masa molar es $M = 28.1$ g/mol.

Solución. Calculemos primero el número de átomos de silicio n_{Si} :

$$n_{\text{Si}} = \frac{\rho N_{\text{A}}}{M} = \frac{(2.33 \text{ g/cm}^3)(6.02 \times 10^{23} \text{ átomos/mol})}{28.1 \text{ g/mol}} = 4.99 \times 10^{22} \text{ átomos/cm}^3.$$

Por tanto, el número de electrones será:

$$n_e = 10^{-6} n_{\text{Si}} = 4.99 \times 10^{16} \text{ electrones/cm}^3.$$

□

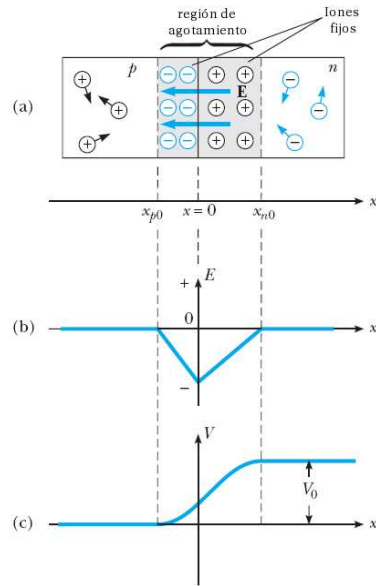


Fig. 7.11 (a) Unión $p-n$. (b) Campo eléctrico como función de la posición x a lo largo de una unión $p-n$. (c) Correspondiente dependencia espacial del potencial eléctrico creado en la interfase de la unión $p-n$.

7.7 Uniones y dispositivos semiconductores

Consideremos ahora lo que ocurre cuando un semiconductor de tipo p se une a uno de tipo n para formar una **unión $p-n$** . Como se muestra en la Fig. 7.11(a), en este caso la unión posee tres regiones bien diferenciadas: una región tipo p , una **región de agotamiento** y una región tipo n . La región de agotamiento se puede entender como el resultado de poner juntas las dos mitades de la unión de modo que los electrones móviles difunden hacia la región p dejando atrás a los iones fijos positivos. (De igual modo, los huecos difunden hacia el lado n y dejan atrás una región de iones fijos negativos). La región alrededor de la unión se llama región de agotamiento porque los portadores de carga desaparecen de esa región. En esta región también se crea un campo eléctrico del orden de 10^3 a 10^5 V/cm, que sirve para barrer las cargas móviles de esta región. Este campo eléctrico crea una barrera de potencial V_0 que evita que los electrones y los huecos continúen difundiéndose a través de la unión y asegura que haya corriente cero a través de la unión cuando no haya un voltaje aplicado.

Diodos

Quizás la característica más notable de una unión $p-n$ es su capacidad para pasar corriente sólo en un sentido, dando lugar a lo que se conoce como un **diodo**. Pode-

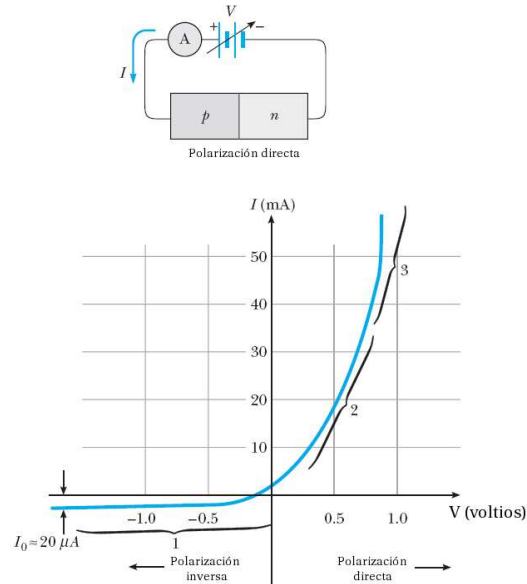


Fig. 7.12 La característica corriente-voltaje de un diodo real. En la parte superior se puede ver la disposición de la unión p - n con una polarización directa.

mos entender el funcionamiento de este dispositivo con ayuda de la Fig. 7.11(c). Si se aplica un voltaje externo positivo en el lado p de la unión, la barrera de potencial decrecerá, lo que provoca un aumento exponencial de la corriente a medida que aumente el voltaje. Si invertimos el voltaje (aplicando un voltaje externo positivo en el lado n de la unión), la barrera de potencial aumentará, lo que resulta en una pequeña corriente en el sentido opuesto que rápidamente alcanzará un valor de saturación, I_0 , al aumentar el voltaje inverso. La relación corriente-voltaje para un diodo ideal se puede escribir como:

$$I = I_0 \left(e^{qV/k_B T} - 1 \right) \quad (7.29)$$

donde q es la carga del electrón y T es la temperatura absoluta. La Fig. 7.12 muestra un ejemplo de la característica corriente-voltaje para un diodo real, así como un esquema de un diodo con polarización directa (voltaje positivo en la región p). La región 1 muestra la operación bajo polarización inversa (voltaje positivo en la región n), la región 2 muestra la operación en polarización directa ordinaria y la región 3 muestra el caso una polarización directa extrema (lo que es necesario para hacer operar la unión p - n como un láser).

Ejemplo 7.7: Calcular el cociente entre la corriente en polarización directa y en polarización inversa para un voltaje de $+1.0$ V (polarización directa) y -1.0 V (polarización inversa).

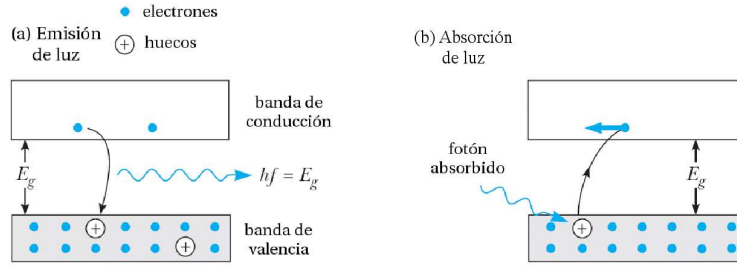


Fig. 7.13 (a) Emisión de luz de un semiconductor. (b) Absorción de luz por un semiconductor.

Solución. Usando ec. (7.29)

$$\frac{I_{\text{directa}}}{I_{\text{inversa}}} = \frac{I_0(e^{+qV/k_B T} - 1)}{I_0(e^{-qV/k_B T} - 1)}.$$

Teniendo en cuenta que $k_B T \approx 0.025$ eV a temperatura ambiente, tenemos que

$$\frac{I_{\text{directa}}}{I_{\text{inversa}}} \approx -2.4 \times 10^{17}.$$

□

Diodos emisores de luz y células solares

La emisión y la absorción de luz en semiconductores es similar a la emisión y a la absorción de luz por los átomos de un gas, excepto por el hecho de que los niveles discretos de los átomos han de ser reemplazados por bandas de energía en los semiconductores. Como se muestra en la Fig. 7.13(a), un electrón excitado eléctricamente en la banda de conducción puede recombinarse fácilmente con un hueco (especialmente si el electrón se inyecta en la región tipo p), emitiendo un fotón cuya energía es del orden del gap del semiconductor. Un ejemplo de uniones p - n que convierten señales eléctricas en luz son los diodos emisores de luz (LED) y los láseres de inyección. Inversamente, un electrón en la banda de valencia puede absorber un fotón y ser promocionado a la banda de conducción, dejando detrás de sí a un hueco, ver Fig. 7.13(b). Las **células solares** o los **dispositivos fotovoltaicos** son ejemplos de dispositivos en los que electrones y huecos fotoexcitados son separados por el campo eléctrico de una unión p - n convirtiéndose en corriente eléctrica.

Transistores

La invención del transistor por los físicos John Bardeen, Walter Brattain y William Shockley en 1948 revolucionó el mundo de la electrónica y les condujo al premio Nobel en 1956. Desde 1960 los transistores reemplazaron a los tubos de vacío en muchas aplicaciones electrónicas, dando lugar a una multimillonaria industria.

El transistor en su forma más elemental consiste en un material semiconductor con una región n muy estrecha que separa a dos regiones de tipo p , llamado **tran-**

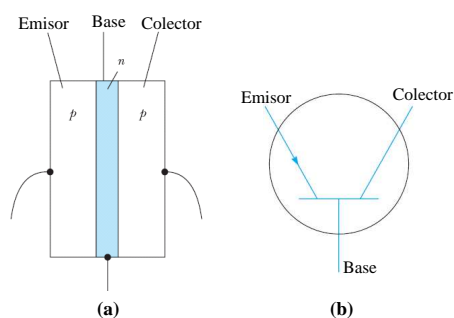


Fig. 7.14 (a) El transistor *pnp* consiste en una región *n* (base) que separa a dos regiones tipo *p* (el emisor y el colector). (b) El símbolo de circuito de un transistor *pnp*.

sistor *pnp*, o en una región *p* entre dos regiones *n*, llamado **transistor** *npn*. La operación de los dos transistores es muy similar y nosotros describiremos aquí el transistor *pnp*.

La Fig. 7.14 muestra la estructura de un transistor *pnp* junto con su símbolo en la teoría de circuitos. Las regiones exteriores del transistor reciben los nombres de **emisor** y de **colector**, y la estrecha región central se llama **base**. Nótese que el transistor posee dos uniones. Una unión es la interfase entre el emisor y la base y la otra es la interfase entre la base y el colector.

Supongamos ahora que se aplica un voltaje al transistor de modo que el emisor esté a un potencial mayor que el colector. (Esto se puede conseguir con una batería V_{ec} en la Fig. 7.15). Si pensamos en un transistor como en dos diodos colocados en serie, vemos que la unión emisor-base está en polarización directa y la unión base-colector lo está en polarización inversa. Como el emisor está dopado tipo *p* con respecto a la base, casi toda la corriente es llevada por huecos que se mueven a través de la unión emisor-base. La mayoría de estos huecos no se recombinan en la base porque ésta es muy estrecha. Los huecos son finalmente acelerados a través de la unión base-colector, produciendo la corriente I_c de la Fig. 7.15.

Aunque sólo una pequeña parte de los huecos se recombinan en la base, ésto es suficiente para producir una carga positiva que inhibe el flujo posterior de la corriente a través de esta región. Para prevenir esta limitación de corriente, algunas de las cargas positivas en la base deben de ser retiradas. Esto se consigue conectando a la base una segunda batería, V_{eb} en la Fig. 7.15. Estas cargas positivas que cruzan la unión colector-base dejan la base a través de este camino adicional dando lugar a un pequeña corriente, I_b . Un pequeño cambio en I_b produce un cambio significativo en la corriente del colector, I_c . Si el transistor está diseñado apropiadamente, la corriente del colector (output) es proporcional a la corriente en la base (input), y el transistor actúa como un amplificador. Esta condición se escribe como

$$I_c = \beta I_b, \quad (7.30)$$

donde β representa la ganancia de corriente y tiene valores típicos entre 10 y 100. De este modo, el transistor puede ser usado para amplificar un pequeña señal de-

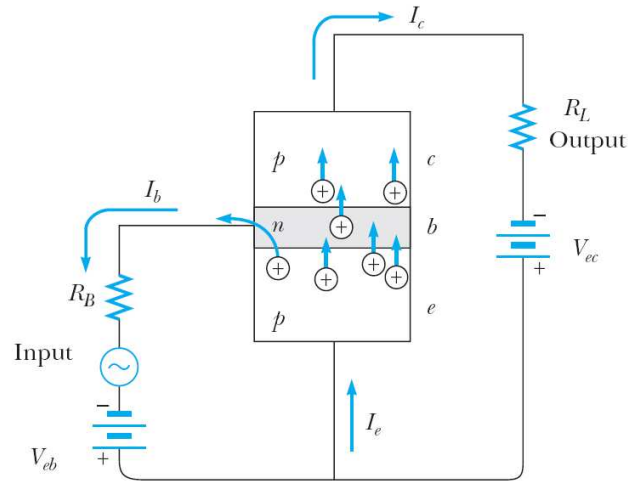


Fig. 7.15 Un pequeña corriente de base, I_b , controla la gran corriente del colector, I_c . Nótese que $I_e = I_b + I_c$, $I_b \ll I_c$ y $I_c = \beta I_b$, donde $\beta \approx 10-100$.

pendiente del tiempo. El pequeño voltaje que se quiere amplificar se coloca en serie con la batería V_{eb} , como se muestra en la Fig. 7.15. La señal de entrada produce una pequeña variación en la corriente de base. Esta variación resulta en un gran cambio en la corriente del colector y, por tanto, en un gran cambio en el voltaje a través de la resistencia de salida.

7.8 Superconductividad

Existen algunos metales para los cuales la resistividad pasa repentinamente a ser cero por debajo de una determinada temperatura T_C , denominada **temperatura crítica**. Este fenómeno llamado **superconductividad**, fue descubierto en 1911 por el físico holandés H. Kamerlingh Onnes, quien había desarrollado una técnica para licuar helio (punto de ebullición 4.2 K) y la aprovechó para estudiar las propiedades de varios metales a esas temperaturas. La Tabla 7.1 muestra la temperatura crítica de diversos materiales. Como se puede ver, dicha temperatura varía entre unos pocos Kelvins para metales ordinarios hasta algo más de 100 K para algunos materiales cerámicos exóticos. En el resto de esta sección repasaremos brevemente las propiedades básicas de los materiales superconductores.

Comencemos examinando el **efecto Meissner**, un fenómeno en el que el campo magnético es expulsado del interior de los superconductores. Se pueden usar argumentos sencillos basados en las leyes de la electricidad y el magnetismo para mostrar que el campo magnético en el interior de un superconductor no puede cambiar con el tiempo. De acuerdo con la ley de Ohm, la resistencia de un conductor está dada por $R = \Delta V/I$, donde ΔV es la diferencia de potencial a través del conductor e

Tabla 7.1 Temperaturas críticas de algunos superconductores.

Material	T_C (K)
Zn	0.88
Al	1.19
Sn	3.72
Hg	4.15
Pb	7.18
Nb	9.46
Nb ₃ Sn	18.05
Nb ₃ Ge	23.2
YBa ₂ Cu ₃ O ₇	92
Bi-Sr-Ca-Cu-O	105
Tl-Ba-Ca-Cu-O	125
Hg Ba ₂ Ca ₂ Cu ₃ O ₈	134

I es la corriente en el conductor. Por tanto, como $R = 0$ en un superconductor, el campo eléctrico en su interior debe ser cero. Ahora recordemos que la ley de Faraday se puede expresar como

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (7.31)$$

es decir, la circulación del campo eléctrico alrededor de cualquier camino cerrado es igual a menos el cambio del flujo magnético Φ_B a través de dicho camino. Como \vec{E} es cero en el interior de un superconductor, la correspondiente circulación será cero para cualquier camino dentro del superconductor. Por tanto, $d\Phi_B/dt = 0$, lo que nos dice que el flujo magnético en un superconductor no puede cambiar. Por tanto, concluimos que $B = \Phi_B/A$ debe permanecer constante dentro de un superconductor.

Antes de 1933, se suponía que la superconductividad era una manifestación de conductividad perfecta. Si un conductor perfecto es enfriado por debajo de su temperatura crítica en presencia de un campo magnético, el campo debería estar atrapado en el interior del conductor incluso después de anular el campo externo. Además, el estado final del conductor perfecto debería depender de qué se haga primero, aplicar el campo o enfriar el conductor por debajo de T_C . Si el campo magnético se aplica después de enfriar el conductor, el campo debería ser expulsado del superconductor. Si el campo se aplica antes de enfriar el material, el campo no debería ser expulsado una vez que se enfríe el material. En 1933, sin embargo, W. Hans Meissner and Robert Ochsenfeld descubrieron que cuando un metal se hace superconductor en presencia de un campo magnético, el campo es expulsado. De este modo, el mismo estado final $\vec{B} = 0$ se alcanza tanto si el campo se aplica antes como si se aplica después de que el material se enfríe por debajo de su T_C .

El efecto Meissner se ilustra en la Fig. 7.16 para un material superconductor con forma de cilindro. Nótese que el campo penetra en el cilindro cuando la temperatura

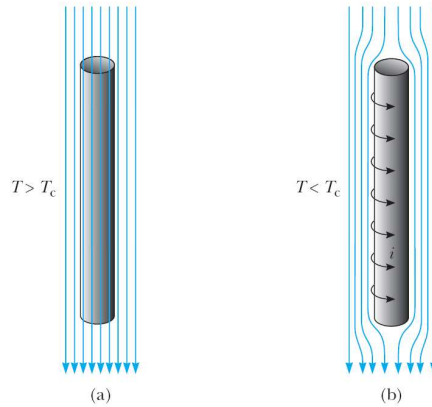


Fig. 7.16 Un superconductor en forma de cilindro en presencia de un campo magnético externo. (a) A temperaturas por encima de T_C las líneas de campo penetran en el cilindro porque está en su estado normal. (b) Cuando el cilindro se enfría y se convierte en superconductor, el flujo magnético es expulsado de su interior mediante la aparición de corrientes superficiales.

es mayor que T_C . Cuando la temperatura se baja por debajo de T_C , sin embargo, las líneas de campo son expulsadas del interior del superconductor. De este modo, un superconductor es más que un conductor perfecto (resistividad $\rho = 0$); también es un diamagneto perfecto ($\vec{B} = 0$). La propiedad de que $\vec{B} = 0$ en el interior de un superconductor es una propiedad tan fundamental como la propiedad de la resistencia nula. Si el campo magnético excede un valor crítico B_C , definido como el valor de B que destruye las propiedades superconductoras de un material, el campo de nuevo penetra en la muestra.

Como un superconductor es un diamagneto perfecto, con una susceptibilidad magnética negativa, repelerá a cualquier imán. De hecho, uno puede realizar una demostración del efecto Meissner haciendo flotar a un pequeño imán encima de un superconductor y alcanzando la llamada *levitación magnética*, como se muestra en la Fig. 7.17. Recordemos que un buen conductor expulsa un campo eléctrico estático moviendo sus cargas a la superficie. Estas cargas superficiales producen un campo eléctrico que cancela exactamente el campo externo aplicado en el interior del conductor. De forma similar, un superconductor expulsa el campo magnético creando unas corrientes de superficie. Para ver por qué ocurre esto consideremos de nuevo el superconductor de la Fig. 7.16. Supongamos que la muestra está inicialmente a una temperatura $T > T_C$, como se ilustra en la Fig. 7.16(a), de modo que el campo magnético penetra en el cilindro. Cuando el cilindro se enfría por debajo de T_C , el campo se expulsa, como se muestra en la Fig. 7.16(b). Corrientes superficiales inducen en la superficie del superconductor un campo magnético que cancela exactamente el campo externo aplicado dentro del superconductor. Estas corrientes desaparecen cuando se quita el campo magnético externo.

La teoría microscópica de la superconductividad no fue desarrollada hasta 1957

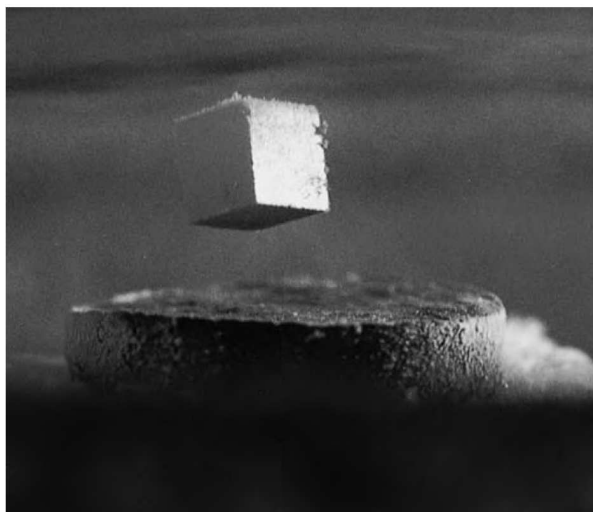


Fig. 7.17 Un pequeño imán permanente levita encima de una pastilla de $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ enfriada a la temperatura del nitrógeno líquido (77 K).

y se debe a los físicos estadounidenses John Bardeen, Leon N. Cooper y J. Robert Schrieffer. Esta teoría se conoce como **teoría BCS**, basado en las iniciales de los nombres de los autores, y condujo a sus autores a la obtención del premio Nobel en 1972. En esta teoría dos electrones pueden interactuar via distorsiones de la red de iones del sólido de modo que surge una fuerza atractiva entre los electrones. Como resultado, los electrones se ligan formando una entidad llamada **par de Cooper**. El par de Cooper se comporta como una partícula de espín entero o bosón. Una importante característica de los bosones es que no obedecen el principio de exclusión de Pauli. Consecuentemente, a muy bajas temperaturas, es posible que todos los bosones en una colección de tales partículas ocupen el estado de más baja energía. Como resultado, *toda la colección de pares de Cooper en un metal se describe con una única función de onda*. Por encima de la energía asociada con esta función de onda hay un gap de energía que es igual a la energía de ligadura del par de Cooper. Bajo la acción de un campo eléctrico externo, los pares de Cooper experimentan una fuerza eléctrica que les induce a moverse por todo el metal. En principio, las colisiones entre los pares de Cooper y los iones de la red podrían dar lugar a una resistencia finita. Sin embargo, como no hay estados energéticos accesibles para los pares de Cooper (ni por arriba ni por abajo), las colisiones con la red están prohibidas y el movimiento de los pares de Cooper no presenta ninguna resistencia.

Uno de los descubrimientos que mayor excitación produjo en el mundo de la física en el siglo XX fue el de la superconductividad de alta temperatura crítica en los óxidos de cobre. Todo comenzó en 1986 cuando J. Georg Bednorz y K. Alex Müller del laboratorio de IBM en Zurich descubrieron evidencia de superconductividad a 30 K en un óxido de bario, lantano y cobre, lo que les valió el premio Nobel de física

en 1987. Poco después de este descubrimiento, una nueva familia de compuestos fue investigada. A comienzos de 1987 varios grupos anunciaron superconductividad a 92 K en un óxido de itrio, bario y cobre ($\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$). Más tarde en ese año, otros grupos anunciaron el descubrimiento de superconductividad a 105 K en un óxido de bismuto, estroncio, calcio y cobre. Más recientemente, científicos han mostrado la existencia de superconductividad a temperaturas tan altas como 150 K en un óxido de mercurio. Hoy en día no se descarta la posibilidad de tener superconductividad a temperatura ambiente, sin embargo, aún se desconocen los mecanismos microscópicos responsables de la superconductividad en estos nuevos materiales y este asunto continúa siendo un tema de investigación muy importante en la física del estado sólido.

7.9 Bibliografía recomendada

Este capítulo está basado en las siguientes tres referencias:

- Capítulo 38 de “Física para la ciencia y la tecnología, Vol. 2C” (5ª edición) de Tipler y Mosca, editorial Reverté.
- Capítulo 12 de “Modern Physics” (3rd edition) de R.A. Serway, C.J. Moses and C.A. Moyer, Thomson/Brook Cole (2005).
- Capítulo 10 de “Modern Physics” (5th edition) de Tipler y Llewellyn, W.H. Freeman.

El libro de Tipler y Llewellyn es muy recomendable para ampliar lo que hemos visto aquí acerca de temas como los dispositivos semiconductores y la superconductividad. Además, posee una sección muy recomendable acerca del magnetismo en la materia, que es otro de los grandes temas de la física de los sólidos y que no hemos abordado aquí. Por otra parte, la sección 12.7 del libro de Serway, Moses y Moyer presenta una discusión muy interesante de la física del láser y, en particular, de los láseres semiconductores.

Finalmente, un tratamiento más detallado de la física de los sólidos, pero con un nivel accesible, se encuentra en

- Capítulo 13 y 14 de “Física Cuántica” de Robert Eisberg y Robert Resnick, editorial Limusa (1988).

7.10 Ejercicios del Capítulo 7

Cuestiones

- (1) En el modelo clásico de la conducción eléctrica, el electrón pierde energía por término medio en una colisión ya que pierde la velocidad de desplazamiento que había adquirido desde el último choque. ¿Dónde aparece esta energía?

- (2) Cuando la temperatura del cobre puro disminuye de 300 K a 4 K, su resistividad disminuye en un factor mucho mayor que el que presenta el latón cuando se enfría del mismo modo. ¿Por qué?
- (3) ¿Como varía la resistividad del cobre en comparación con la del silicio al aumentar la temperatura?
- (4) Explicar cómo la estructura de bandas de los metales, semiconductores y aislantes puede explicar las siguientes propiedades ópticas generales: (a) los metales son opacos a la luz visible. (b) Los semiconductores son opacos a la luz visible, pero transparentes para la radiación infrarroja. (c) Muchos aislantes, como el diamante, son transparentes a la luz visible.
- (5) La resistividad de la mayoría de los metales crece con la temperatura, mientras que la resistividad de un semiconductor decrece al aumentar la temperatura. ¿Cómo se explica esta diferencia?
- (6) Discutir las diferencias entre las estructuras de bandas de un metal, un semiconductor y un aislante. ¿Cómo se pueden explicar las propiedades eléctricas de estos materiales en términos de sus estructuras de bandas?
- (7) Cuando un fotón es absorbido por un semiconductor, se dice que se crea un par electrón-hueco. Explicar este concepto haciendo uso de la estructura de bandas de un semiconductor.
- (8) En un semiconductor como el silicio, átomos pentavalentes como el arsénico actúan como átomos donores, mientras que átomos trivalentes como el indio se comportan como impurezas aceptoras. Consultar la tabla periódica para determinar qué otros elementos pueden ser considerados como donores o aceptores.
- (9) ¿Cuales de los siguientes elementos tienen mayor probabilidad de actuar como impurezas donoras en el germanio? (a) Bromo. (b) Galio. (c) Silicio. (d) Fósforo. (e) Magnesio.
- (10) ¿Cuales de los siguientes elementos tienen mayor probabilidad de actuar como impurezas aceptoras en el germanio? (a) Bromo. (b) Galio. (c) Silicio. (d) Fósforo. (e) Magnesio.
- (11) La energía del gap del Si es 1.14 eV. (a) Encontrar la frecuencia mínima que debe tener un fotón para que logre promocionar un electrón de la banda de valencia a la banda de conducción. (b) ¿Cuál es la longitud de onda de este fotón?
- (12) Del espectro de absorción de un cierto semiconductor, se encuentra que la longitud de onda más larga que se absorbe es $1.85 \mu\text{m}$. Calcular el gap de este semiconductor.
- (13) Explicar cómo una unión $p-n$ puede actuar como un diodo, como una célula solar y como un LED (diodo emisor de luz).

Problemas

- (14) (a) Demostrar que la energía potencial mínima de un par de iones en un sólido iónico viene dado por

$$U_0 = -\alpha \frac{ke^2}{r_0} \left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

donde r_0 es la separación de equilibrio entre los iones, α es la constante de Madelung y la parte repulsiva de la energía potencial entre iones es A/r^n . $|U_0|$ es la llamada *energía de cohesión iónica* o también *energía de disociación* y es la energía necesaria para separar un par de iones una distancia infinita cuando estaban inicialmente a una distancia r_0 en el cristal. (b) Calcular la energía de disociación (o energía de cohesión iónica) para el NaCl. Tomar $\alpha = 1.7476$, $r_0 = 0.281$ nm y $n = 8$.

- (15) El LiCl, que tiene la misma estructura cristalina que el NaCl, tiene $r_0 = 0.257$ nm y una energía de cohesión de 199 kcal/mol. (a) Encontrar el valor del entero n que mejor describe el valor medido de la energía de cohesión. (b) ¿Es muy sensible el valor de U_0 a cambios en n ? Calcular el cambio porcentual de U_0 cuando n aumenta en 1%?
- (16) Consideremos una cadena unidimensional de iones positivos y negativos colocados de forma aterna. Demostrar que la energía de un ión en este hipotético cristal viene dada por

$$U_0 = -\alpha \frac{ke^2}{r},$$

donde $\alpha = 2 \ln 2$ es la constante de Madelung y r es la distancia entre los iones.

- (17) (a) Demostrar que la fuerza sobre un ión en sólido iónico se puede escribir como

$$F = -\alpha \frac{ke^2}{r^2} \left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-1}\right],$$

donde r_0 es la separación de equilibrio y α es la constante de Madelung. (b) Imaginemos que un ión en el sólido se desplaza una pequeña distancia x de r_0 . Demostrar que el ión experimenta una fuerza restauradora $F = -Kx$, donde

$$K = \frac{k\alpha e^2}{r_0^3}(n-1).$$

(c) Usar el resultado anterior para estimar la frecuencia de vibración de un ión Na^+ en el NaCl. Tomar $n = 8$ y usar el valor $\alpha = 1.7476$. (d) ¿A qué longitud de onda absorbe el ión Na^+ la radiación incidente? ¿En qué rango del espectro electromagnético se encuentra esta radiación?

- (18) (a) Dado un recorrido libre medio $\lambda = 0.4$ nm y una velocidad media $v_m = 1.17 \times 10^5$ m/s para el flujo de corriente en el cobre a una temperatura de 300 K, calcular el valor clásico de la resistividad ρ del cobre. (b) El modelo clásico sugiere que el recorrido libre medio es independiente de la temperatura y que v_m depende de la temperatura. Usando este modelo, ¿cuál será el valor de ρ a 100 K?

- (19) La plata tiene una densidad de $1.5 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$ y una resistividad de $1.6 \times 10^{-8} \text{ } \Omega \cdot \text{m}$ a temperatura ambiente. (a) Usando el modelo clásico de la conducción eléctrica y suponiendo que cada átomo de plata contribuye con un electrón por átomo a la corriente, calcular el tiempo promedio entre colisiones τ . (b) Calcular el camino libre medio λ a partir de τ y la velocidad térmica del electrón. (c) ¿Cómo compara λ con el parámetro de red (distancia entre los iones de la red cristalina)?
- (20) La contribución de un electrón individual o de un hueco a la conductividad eléctrica de un semiconductor se puede expresar por medio de una cantidad importante llamada *movilidad*. La movilidad, μ , se define como la velocidad de desplazamiento de la partícula por unidad de campo eléctrico, es decir, $\mu v_m/E$. Nótese que la movilidad describe la facilidad con la que un portador de carga difunde (o se desplaza) en un campo eléctrico. además, la movilidad de un electrón, μ_n , puede ser diferente de la movilidad de un hueco, μ_p , en el mismo material. (a) Demostrar que la densidad de corriente se puede escribir en términos de la movilidad como: $J = ne\mu_n E$, donde $\mu_n = e\tau/m_e$. (b) Demostrar que cuando ambos electrones y huecos están presentes, la conductividad se puede expresar en términos de μ_p y μ_n como: $\sigma = ne\mu_n + pe\mu_p$, donde n es la densidad de electrones y p la de huecos. (c) Si una muestra de germanio tiene $\mu_n = 3900 \text{ cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$, calcular la velocidad de desplazamiento de un electrón cuando se aplica un campo de 100 V/cm . (d) Una muestra pura de germanio tiene $\mu_n = 3900 \text{ cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$ y $\mu_p = 1900 \text{ cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$. Si la densidad de huecos es $3.0 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$, calcular la resistividad de la muestra.
- (21) El arseniuro de galio (GaAs) es un semiconductor de gran interés tecnológico. (a) Calcular la velocidad de desplazamiento de los electrones en el GaAs para un campo de 10 V/cm si la movilidad electrónica es $\mu_n = 8500 \text{ cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$ (ver problema anterior para la definición de μ). (b) ¿A qué porcentaje de la velocidad térmica de los electrones a 300 K corresponde esta velocidad de desplazamiento? (c) Suponiendo que los electrones tienen una masa efectiva igual a la de los electrones libres, calcular el tiempo promedio entre colisiones, τ . (d) Calcular el camino libre medio para los electrones.
- (22) Suponiendo que los electrones de conducción en la plata se pueden describir mediante un gas de electrones de Fermi con $E_F = 5.48 \text{ eV}$, repetir el problema 19.
- (23) (a) Calcular la densidad de electrones en el oro suponiendo que cada átomo de oro aporta un electrón libre al metal sabiendo que el peso atómico del oro es 196.97 y su densidad $1.93 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$. (b) Si la velocidad de Fermi del oro es $1.36 \times 10^6 \text{ m/s}$, ¿cuál es su energía de Fermi en electrón-voltios? (c) ¿Cuántas veces es mayor la energía de Fermi que la energía térmica $k_B T$ a temperatura ambiente? (d) Explicar las diferencias entre la energía de Fermi y la energía térmica.
- (24) La presión de un gas ideal está relacionada con la energía media de las

partículas del gas por la expresión $PV = (2/3)NE_m$, donde N es el número de partículas y E_m es la energía media. Utilizar esta expresión para calcular la presión del gas de electrones de Fermi en el cobre en N/m^2 y comparar el resultado con la presión atmosférica, que es aproximadamente 10^5 N/m .

- (25) El enlace del electrón extra en el átomo de arsénico que reemplaza a un átomo de silicio o germanio se describe mediante un cálculo de la primera órbita de Bohr de ese electrón en dichos materiales. Cuatro de los electrones externos del arsénico forman enlaces covalentes, de modo que el quinto electrón “ve” simplemente un centro de atracción cargado (con carga $+e$). Este modelo es un átomo de hidrógeno modificado. En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, el electrón se mueve en el espacio libre con un radio a_0 dado por $a_0 = \epsilon_0 h^2 / (\pi m_e e^2)$. Cuando el electrón se mueve en un cristal, podemos aproximar el efecto de los otros átomos reemplazando ϵ_0 , $\kappa \epsilon_0$ y m_e por la masa efectiva del electrón. Para el silicio κ es 12 y la masa efectiva es $0.2m_e$. Para el germanio, κ es 16 y la masa efectiva es $0.1m_e$. (a) Estimar los radios de Bohr del electrón externo cuando se encuentra en órbita alrededor del átomo de arsénico de impureza en el silicio y el germanio. (b) Modificar la expresión de la energía del estado fundamental del átomo de hidrógeno del mismo modo para estimar la correspondiente energía de enlace de ese electrón extra.
- (26) Una muestra de silicio de tipo n dopada con 10^{16} electrones por cm^3 en la banda de conducción posee una resistividad de $5 \times 10^{-3} \Omega \cdot \text{m}$ a 300 K. Determinar el recorrido libre medio de los electrones. Utilizar la masa efectiva de $0.2m_e$ para la masa de los electrones (ver problema anterior). Comparar este recorrido libre medio con el de los electrones de conducción en el cobre a 300 K.
- (27) El coeficiente Hall de una muestra de silicio dopado resulta ser $0.04 \text{ V} \cdot \text{m} / \text{A} \cdot \text{T}$ a la temperatura ambiente. Si todas las impurezas han contribuido a los portadores de la carga total de la muestra, determinar (a) el tipo de impureza (donora o aceptora) utilizado para dopar la muestra y (b) la concentración de estas impurezas.

Problemas avanzados

- (28) Una oblea de 2 cm^2 de silicio puro se irradia con luz de longitud de onda 775 nm. La intensidad del haz de luz es de 4.0 W/m^2 y todo fotón que choca contra la muestra se absorbe y crea un par electrón-hueco. (a) ¿Cuántos pares electrón-hueco se producen por segundo? (b) Si el número de pares en la muestra es de 6.25×10^{11} en estado estacionario, ¿a qué velocidad se recombinan los pares electrón-hueco? (c) Si cada proceso de recombinación da lugar a la radiación de un fotón, ¿cuál es la potencia de irradiación de la muestra?

Capítulo 8

Física nuclear

En este capítulo dedicado a la física nuclear, repasaremos en primer lugar las propiedades básicas de los núcleos atómicos. A continuación, nos centraremos en el estudio del fenómeno de la radiactividad y, en particular, presentaremos una discusión detallada de los diversos mecanismos de desintegración nuclear. Después, haremos una breve incursión en el tema de las reacciones nucleares y acabaremos analizando los fundamentos básicos de la fisión y de la fusión, dos reacciones nucleares de capital importancia para nuestra sociedad.

8.1 Propiedades de los núcleos

El núcleo atómico contiene sólo dos tipos de partículas: protones y neutrones, que poseen aproximadamente la misma masa. El protón tiene una carga $+e$ y el neutrón carece de carga. El número de protones, Z , es el *número atómico* del átomo, que coincide con el número de electrones del mismo. El número de neutrones, N , es aproximadamente igual a Z para los núcleos ligeros, y para los núcleos más pesados es mayor que Z , incrementándose a medida que aumenta Z . El número total de nucleones, $A = N + Z$, se denomina *número másico*. Una especie nuclear en particular se llama **núclido**. Dos o más núclidos de igual número atómico Z , pero distintos números N y A se denominan **isótopos**. Un núclido particular se designa por su símbolo atómico con el número másico A escrito delante del símbolo como superíndice. El hidrógeno tiene tres isótopos: ${}^1\text{H}$, ${}^2\text{H}$ (= deuterio) y ${}^3\text{H}$ (= tritio). Por término medio, existen 3 isótopos estables por cada átomo, si bien algunos poseen un solo isótopo estable y otros, cinco o seis.

En el interior del núcleo, los nucleones ejercen una fuerza atractiva intensa sobre sus vecinos próximos. Esta interacción llamada **fuerza nuclear fuerte** o **fuerza hadrónica** es mucho más intensa que la fuerza electrostática de repulsión que existe entre los protones. La interacción nuclear fuerte es aproximadamente la misma entre dos neutrones, dos protones, o un neutrón y un protón. La interacción nuclear fuerte disminuye rápidamente con la distancia y es despreciable a una distancia mayor de unos pocos femtómetros ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$).

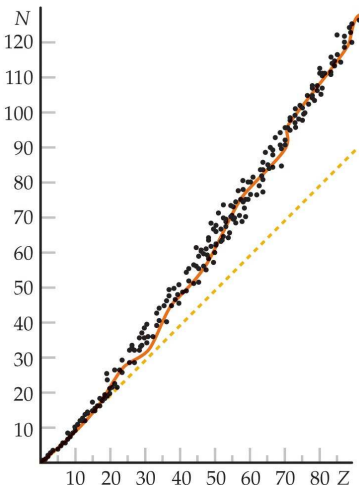


Fig. 8.1 Número de neutrones N en función del número de protones Z para los núclidos estables. La línea de puntos corresponde a $N = Z$.

Tamaño y forma

El tamaño y la forma del núcleo puede determinarse bombardeándolo con partículas de alta energía y observando la dispersión de estas partículas. Los resultados dependen del tipo de experimento. Por ejemplo, si se utilizan electrones como partículas bombardeantes, se obtiene la distribución de carga del núcleo, mientras que si se utilizan neutrones se determina la región de influencia de la interacción fuerte. Una amplia variedad de experimentos sugieren que la mayor parte de los núcleos son aproximadamente esféricos con radios dados por

$$R \approx R_0 A^{1/3} \quad (8.1)$$

donde $R_0 \approx 1.2$ fm. El hecho de que el radio de un núcleo esférico sea proporcional a $A^{1/3}$ sugiere que el volumen nuclear es proporcional a A . Como la masa del núcleo es también aproximadamente proporcional a A , las densidades de todos los núcleos son aproximadamente iguales. Esto es análogo a lo que ocurre en una gota líquida, que también tiene una densidad constante independiente de su tamaño.

Números N y Z

En los núcleos ligeros, la mayor estabilidad se alcanza cuando los números de protones y de neutrones son aproximadamente iguales, $N \approx Z$. En los núcleos más pesados, la inestabilidad provocada por la repulsión electrostática entre protones se minimiza si hay más neutrones que protones. Veamos, por ejemplo, los números N y Z de los isótopos más abundantes de algunos elementos representativos: para el $^{16}_8\text{O}$, $N = 8$ y $Z = 8$; para el $^{40}_{20}\text{Ca}$, $N = 20$ y $Z = 20$; para el $^{56}_{26}\text{Fe}$, $N = 30$ y

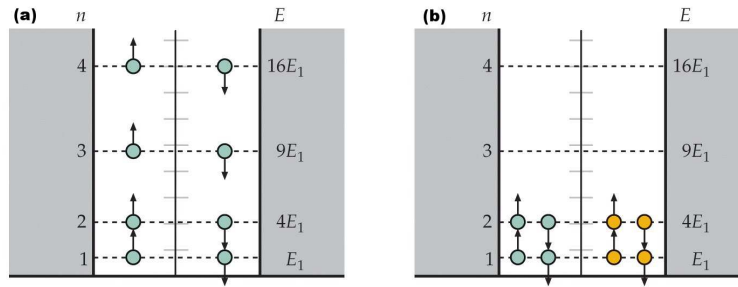


Fig. 8.2 (a) Ocho nucleones en una caja unidimensional. De acuerdo con el principio de exclusión, sólo dos neutrones pueden estar en un nivel energético determinado. (b) Cuatro neutrones y cuatro protones en una caja unidimensional. Como los protones y los neutrones no son partículas idénticas, dos de cada especie pueden encontrarse en el mismo nivel. La energía total en este caso es mucho menor que la correspondiente a (a).

$Z = 26$; para el ${}^{207}_{82}\text{Pb}$, $N = 125$ y $Z = 82$; y para el ${}^{238}_{92}\text{U}$, $N = 146$ y $Z = 92$. (El número atómico Z se ha incluido en estos símbolos en forma de subíndice para enfatizar los ejemplos, pero realmente no es necesario ya que el número atómico viene implícito en el símbolo del átomo.)

La Fig. 8.1 muestra un gráfico de N en función de Z para los núcleos estables conocidos. La curva sigue la línea recta $N = Z$ para valores pequeños de N y Z . Puede entenderse esta tendencia considerando la energía total de A partículas en una caja unidimensional. La Fig. 8.2 muestra los niveles energéticos para ocho neutrones y para cuatro neutrones y cuatro protones. Debido al principio de exclusión de Pauli, sólo dos partículas idénticas (con espines opuestos) pueden encontrarse en el mismo estado espacial. Como los protones y los neutrones no son idénticos entre sí, pueden encontrarse dos de cada especie en un estado, como muestra la Fig. 8.2(b). Así resulta que la energía total de cuatro protones y cuatro neutrones es menor que la de ocho neutrones (u ocho protones) como los de la Fig. 8.2(a). Cuando en este esquema se incluye la energía electrostática de repulsión, que es proporcional a Z^2 , el resultado es algo distinto. Para valores grandes de A y Z la energía total se incrementa menos añadiendo dos neutrones que añadiendo un neutrón y un protón debido a la repulsión electrostática implicada en el último caso. Esto explica por qué $N > Z$ para los núcleos más pesados.

Masa y energía de enlace

La masa de un núcleo es menor que la masa de sus partes en E_e/c^2 , donde E_e es la energía de enlace. Cuando dos o más núcleos se fusionan entre sí para formar un núcleo, la masa total decrece y se libera energía. Inversamente, para dividir un núcleo en sus partes, debe añadirse energía al sistema que se invierte en incrementar la masa en reposo.

Las masas atómicas y nucleares se expresan a menudo en unidades de masa

unificadas (u). La unidad de masa unificada se define como un doceavo de la masa del átomo de ^{12}C neutro. La energía en reposo de una unidad de masa unificada es:

$$1\text{u} = 1.6606 \times 10^{-27} \text{kg} \Rightarrow (1\text{u})c^2 = 931.5 \text{MeV} \quad (8.2)$$

Consideremos el ejemplo del ^4He que consta de dos neutrones y dos protones. La masa de un átomo puede medirse exactamente con un espectrómetro de masas. La masa del átomo ^4He es 4.002603 u. Este valor incluye los dos electrones del átomo. La masa del átomo ^1H es 1.007825 u, y la del neutrón, 1.008665 u. La suma de las masas de dos átomos de ^1H , más dos neutrones es $2(1.007825)\text{u} + 2(1.008665)\text{u} = 4.032980\text{u}$, la cual es mayor que la masa del átomo de ^4He en 0.030377 u. La energía de enlace del núcleo ^4He puede determinarse a partir de esta diferencia de masa, 0.030377 u, utilizando el factor de conversión de masas $(1\text{u})c^2 = 931.5\text{MeV}$. Por lo tanto,

$$(0.030377\text{u})c^2 = (0.030377\text{u})c^2 \times \frac{931.5\text{MeV}/c^2}{1\text{u}} = 28.30\text{MeV}.$$

En general, la energía de enlace del núcleo de un átomo de masa atómica M_A

Tabla 8.1 Masas atómicas del neutrón y de algunos isótopos.

Elemento	Símbolo	Z	Masa atómica (u)	Elemento	Símbolo	Z	Masa atómica (u)
Neutrón	n	0	1.008665	Calcio	^{40}Ca	20	39.962591
Hidrógeno	^1H	1	1.007825		^{41}Ca	20	40.962279
Deuterio	^2H o D	1	2.013553		^{42}Ca	20	41.958618
Tritio	^3H o T	1	3.016049	Hierro	^{56}Fe	26	55.939601
Helio	^3He	2	3.016029	Cobre	^{63}Cu	29	62.929592
	^4He	2	4.002603	Selenio	^{79}Se	34	78.918497
Litio	^6Li	3	6.015122		^{80}Se	34	79.916519
	^7Li	3	7.016004	Bromo	^{80}Br	35	79.918528
Boro	^{10}B	5	10.012937		^{81}Br	35	80.916287
Carbono	^{12}C	6	12.000000	Kriptón	^{80}Kr	36	79.916377
	^{13}C	6	13.003354		^{81}Kr	36	80.916589
	^{14}C	6	14.003242	Plata	^{107}Ag	47	106.905093
Nitrógeno	^{13}N	7	13.005739	Oro	^{197}Au	79	196.966552
	^{14}N	7	14.003074	Talio	^{207}Tl	81	206.977403
Oxígeno	^{16}O	8	15.994915		^{210}Tl	81	209.990057
Sodio	^{23}Na	11	22.989770	Plomo	^{207}Pb	82	206.975871
Cloro	^{35}Cl	17	34.968853		^{208}Pb	82	207.976636
	^{36}Cl	17	35.968307	Bismuto	^{209}Bi	83	208.980374
	^{37}Cl	17	36.965903		^{211}Bi	83	210.987254
Argón	^{39}Ar	18	38.964314	Polonio	^{212}Po	84	211.988852
	^{40}Ar	18	39.962384		^{215}Po	84	214.999418
	^{42}Ar	18	41.963049	Radón	^{222}Rn	86	222.017571
Potasio	^{39}K	19	38.963708	Radio	^{226}Ra	88	226.025403
	^{40}K	19	39.964000	Uranio	^{238}U	92	238.050783
	^{41}K	19	40.961827	Plutonio	^{242}Pu	94	242.058737

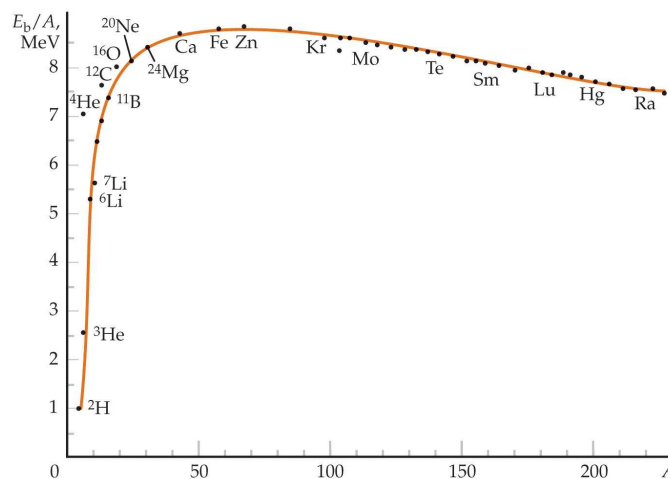


Fig. 8.3 Energía de enlace por nucleón para diversos núcleos como función del número másico A .

que contiene Z protones y N neutrones viene dada por:

$$E_e = (ZM_{\text{H}} + Nm_{\text{n}} - M_{\text{A}})c^2 \quad (8.3)$$

donde M_{H} es la masa del átomo de ^1H y m_{n} la del neutrón. Nótese que la masa de los Z electrones del término ZM_{H} se cancela con la masa de los Z electrones contenida en el término M_{A} . Las masas atómicas de algunos isótopos seleccionados se especifican en la Tabla 8.1.

La Fig. 8.3 muestra la energía de enlace por nucleón E_e/A en función de A . El valor medio es aproximadamente 8.3 MeV. La casi horizontalidad de esta curva para $A > 50$ muestra que E_e es aproximadamente proporcional a A . Esto indica que hay una saturación de las fuerzas nucleares en el núcleo, como sería el caso en que cada nucleón fuera atraído sólo por sus vecinos más próximos. Tal situación conduce también a una densidad nuclear constante compatible con las medidas del radio. Si, por ejemplo, no hubiera saturación y cada nucleón se enlazara con todos los restantes nucleones, existirían $A - 1$ enlaces por cada nucleón y en conjunto $A(A - 1)$ enlaces. La energía de enlace total, que es una medida de la energía necesaria para romper todos esos enlaces, sería entonces proporcional a $A(A - 1)$, y E_e/A no sería aproximadamente constante. La pendiente elevada de la curva para valores bajos de A se debe al incremento de vecinos más próximos y, por tanto, al número creciente de enlaces por nucleón. El decrecimiento gradual para valores elevados de A se debe a la repulsión Coulomb de los protones, que crece con Z^2 y disminuye la energía de enlace. Finalmente, para valores muy grandes de A esta repulsión Coulomb se hace tan grande que un núcleo de A cercano a 300 o mayor es inestable y experimenta fisión espontánea.

Ejemplo 8.1: Determinar la energía de enlace del último neutrón del ^4He .

Solución. La energía de enlace es igual al producto de c^2 por la diferencia de masa del ${}^3\text{He}$ más un neutrón y el ${}^4\text{He}$. Estas masas pueden encontrarse en la Tabla 8.1. Por tanto,

$$M_{{}^3\text{He}} + m_n = 3.016029 \text{ u} + 1.008665 \text{ u} = 4.024694 \text{ u},$$

$$\Delta m = (M_{{}^3\text{He}} + m_n) - M_{{}^4\text{He}} = 4.024694 \text{ u} - 4.002603 \text{ u} = 0.022091 \text{ u},$$

$$E_e = (\Delta m)c^2 = (0.022091 \text{ u})c^2 \times \frac{931.5 \text{ MeV}/c^2}{1 \text{ u}} = 20.58 \text{ MeV}. \quad \square$$

8.2 Radiactividad

En 1896 Henri Becquerel (físico francés) descubrió accidentalmente que unas sales de uranio emitían una radiación invisible que podía ennegrecer placas fotográficas. Después de una serie de experimentos, Becquerel concluyó que la radiación emitida por estas sales era de un nuevo tipo, uno que no requería de ningún estímulo externo y que era tan penetrante que podía oscurecer placas fotográficas protegidas e incluso ionizar gases. Este proceso de emisión espontánea de radiación por uranio recibió el nombre de **radiactividad**. Posteriores experimentos realizados por otros científicos mostraron que otras sustancias eran incluso más radiactivas que el uranio. Marie Curie y su marido Pierre Curie realizaron numerosos experimentos relacionados con el fenómeno de la radiactividad. Estos experimentos condujeron, entre otras cosas, al descubrimiento de nuevos elementos químicos como el radio o el polonio. Experimentos posteriores, incluyendo los famosos trabajos de Rutherford sobre la dispersión de partículas alfa, sugirieron que la radiactividad era el resultado del decaimiento o desintegración de núcleos inestables.

Muchos núcleos son radiactivos, es decir, se desintegran en otros núcleos por emisión de partículas tales como fotones, neutrones o partículas α . Las expresiones desintegración α , β y γ fueron introducidas antes de que se supiera que las partículas α eran núcleos de ${}^4\text{He}$, que las partículas β eran electrones (β^-) o positrones (β^+) y que los rayos γ eran fotones. La actividad de una muestra no es constante en el tiempo, sino que disminuye exponencialmente. Esta dependencia exponencial con el tiempo es característica de todo proceso radiactivo e indica que la desintegración es un proceso estocástico.

Sea N el número de núcleos radiactivos en un cierto instante t . Si la desintegración de un núcleo individual es un suceso aleatorio, es lógico que el número de núcleos que se desintegran en un cierto intervalo dt sea proporcional a N y a dt . A causa de estas desintegraciones, el número N disminuirá. La variación de N viene dada por

$$dN = -\lambda N dt, \quad (8.4)$$

donde λ es la llamada **constante de desintegración**. La variación de N por unidad de tiempo, dN/dt , es proporcional a N . Esta es una característica de la desintegración exponencial. Vamos a resolver la ec. (8.4):

$$\int_{N_0}^N \frac{dN'}{N'} = -\lambda \int_0^t dt' \Rightarrow \ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t. \quad (8.5)$$

Despejando N obtenemos

$$\boxed{N(t) = N_0 e^{-\lambda t}} \quad (8.6)$$

El número de desintegraciones radiactivas por segundo en una muestra se llama **actividad** o **ritmo de desintegración R** y viene dado por:

$$\boxed{R(t) = -\frac{dN}{dt} = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = R_0 e^{-\lambda t}} \quad (8.7)$$

donde $R_0 = \lambda N_0$ es la actividad a $t = 0$. La dependencia de R en el tiempo se determina experimentalmente.

El **tiempo de vida media** τ es el recíproco de la constante de desintegración, es decir, $\tau = 1/\lambda$. Otra escala de tiempo relacionada con τ que se usa en la práctica es el **periodo de semidesintegración** $t_{1/2}$ que se define como el tiempo necesario para que el número de núcleos y el ritmo de desintegración se reduzcan a la mitad. Haciendo $t = t_{1/2}$ y $N = N_0/2$ en la ec (8.6) tenemos que

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda t_{1/2}} \Rightarrow e^{\lambda t_{1/2}} = 2. \quad (8.8)$$

Despejando $t_{1/2}$ llegamos a

$$\boxed{t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda} = 0.693\tau} \quad (8.9)$$

Es fácil demostrar que, transcurridos n periodos de semidesintegración, la actividad será:

$$R = \left(\frac{1}{2}\right)^n R_0. \quad (8.10)$$

Los periodos de semidesintegración varían desde valores muy pequeños (menos de $1 \mu\text{s}$) hasta valores muy grandes (más de 10^6 años). La unidad del SI de actividad radiactiva es el **becquerel** (Bq), definida como una desintegración por segundo:

$$1 \text{ Bq} = 1 \text{ desintegración/s.} \quad (8.11)$$

Una unidad histórica es el **curie** (Ci):

$$1 \text{ Ci} = 3.7 \times 10^{10} \text{ Bq.} \quad (8.12)$$

El curie es la actividad o ritmo de desintegración inicial de 1 g de radio. Es una unidad muy grande y, por ello, se utilizan a menudo el mCi y el μCi .

Ejemplo 8.2: Una fuente radiactiva tiene un periodo de semidesintegración de 1 minuto. En el instante $t = 0$, está situada frente a un detector y la velocidad

de recuento (número de partículas que se desintegran detectadas por unidad de tiempo) es de 2000 cuentas/s. Determinar la velocidad de recuento al cabo de 1 minuto, 2 minutos, 3 minutos y 10 minutos.

Solución. Sabemos que la velocidad de recuento r disminuye en un factor 2 cada minuto. Por tanto,

$$r_1 = \frac{1}{2}r_0 = \frac{1}{2}(2000 \text{ cuentas/s}) = 1000 \text{ cuentas/s al cabo de un minuto.}$$

$$r_2 = \frac{1}{2}r_1 = \frac{1}{2}(1000 \text{ cuentas/s}) = 500 \text{ cuentas/s al cabo de 2 minutos.}$$

$$r_3 = \frac{1}{2}r_2 = 250 \text{ cuentas/s al cabo de 3 minutos.}$$

$$r_{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} r_0 = 1.95 \text{ cuentas/s al cabo de 10 minutos.}$$

□

Ejemplo 8.3: Si la eficiencia de la detección en el ejemplo 8.2 es del 20%, (a) ¿cuántos núcleos radiactivos existen en el instante $t = 0$? (b) ¿Y en el instante $t = 1$ minuto? (c) ¿Cuántos núcleos se desintegran en el primer minuto?

Solución. (a) Sabemos que $R = \lambda N$ y $\lambda = 0.693/t_{1/2} = 0.693/1 \text{ min} = 0.693 \text{ min}^{-1}$. De este modo,

$$R_0 = 5 \times 2000 \text{ cuentas/s} = 10000 \text{ desintegraciones/s,}$$

donde hemos tenido en cuenta que la eficiencia es del 20%. Con la actividad inicial y el valor de la constante de desintegración podemos calcular el número de núcleos que había inicialmente:

$$N_0 = \frac{R_0}{\lambda} = \frac{10000 \text{ s}^{-1}}{0.693 \text{ min}^{-1}} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 8.66 \times 10^5.$$

(b) Transcurrido 1 minuto el número de núcleos se habrá reducido a la mitad:

$$N_1 = \frac{1}{2}(8.66 \times 10^5) = 4.33 \times 10^5.$$

(c) El número de núcleos que se desintegran en el primer minuto viene dado por

$$\Delta N = N_0 - N_1 = 4.33 \times 10^5.$$

□

A continuación discutiremos en cierto detalle los diversos procesos mediante los cuales los núcleos radiactivos se desintegran.

8.2.1 Desintegración alfa

Si un núcleo emite una partícula α (${}^4_2\text{He}$), pierde dos protones y dos neutrones. En consecuencia, el número atómico Z decrece en 2 unidades, el número de masa A decrece en 4 y el número de neutrones decrece en 2. El proceso de desintegración puede expresarse como



donde X se denomina **núcleo padre** e Y se denomina **núcleo hijo**. Por ejemplo, ${}^{238}\text{U}$ y ${}^{226}\text{Ra}$ son emisores alfa que se desintegran según los esquemas



El periodo de semidesintegración del ${}^{238}\text{U}$ es de 4.47×10^9 años y el del ${}^{226}\text{Ra}$ es de 1.60×10^3 años. En una desintegración α se libera energía ya que los productos de la desintegración, en particular la partícula α , están ligados más fuertemente que el núcleo padre.

Para que se produzca una desintegración α se deben dar las siguientes condiciones: (i) la suma de los números másicos A antes y después de la desintegración debe ser igual, (ii) la carga neta debe conservarse en el proceso de desintegración y (iii) deben conservarse la energía y el momento lineal relativistas. Si M_X denota la masa atómica del padre, M_Y denota la masa del hijo y M_α la masa de la partícula α , puede definirse la energía de desintegración Q como

$$Q = (M_X - M_Y - M_\alpha)c^2. \quad (8.16)$$

Nótese que aquí puede usarse la masa atómica en vez de la masa nuclear ya que las masas electrónicas se cancelan al evaluar las diferencias de masas. *Es obvio que para que se produzca la desintegración de forma espontánea se ha de tener que $Q > 0$, es decir, ha de liberarse energía en el proceso.* La energía Q aparece en forma de energía cinética del núcleo hijo y de la partícula α . La cantidad Q también recibe el nombre de **valor Q** de la reacción nuclear.

Normalmente la mayor parte de la energía de desintegración se la lleva las partículas ligeras, en este caso la partícula α . Para comprender esto vamos a calcular la fracción de energía de desintegración que se lleva la partícula α aplicando la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento:

$$Q = K_Y + K_\alpha, \quad (8.17)$$

$$p_Y = p_\alpha, \quad (8.18)$$

donde el subíndice Y se refiere al núcleo hijo. Debido a que la energía cinética total liberada en la desintegración α (varios MeV) es pequeña en comparación con las energías en reposo de la partícula α (3726 MeV) y del núcleo hijo, es posible utilizar las expresiones clásicas para el momento lineal y la energía cinética en las ecuaciones anteriores para demostrar que

$$K_\alpha = \frac{M_Y}{M_Y + M_\alpha}Q, \quad (8.19)$$

donde M_Y y M_α son las masas atómicas del núcleo hijo y de la partícula α . Como habitualmente el núcleo hijo es mucho más masivo que la partícula α , es decir, $M_Y \gg M_\alpha$, de la ecuación anterior vemos que $K_\alpha \approx Q$, lo que implica que la partícula α se lleva casi toda la energía liberada en la desintegración.

Ejemplo 8.4: Calcular el valor Q para la desintegración α del ^{226}Ra descrita en la ec. (8.15). *Nota:* usar las masas atómicas de la Tabla 8.1.

Solución. El valor Q de esta reacción viene dado por

$$Q = (M_X - M_Y - M_\alpha)c^2 = (226.025403 - 222.017571 - 4.002603) \times 931.5 \text{ MeV}$$

$$\Rightarrow Q \approx 4.87 \text{ MeV.}$$

□

Recordemos ahora el mecanismo microscópico de la desintegración α que fue discutido en la sección 4.7.3. Imaginemos que una partícula α se forma de algún modo en el interior del núcleo. La Fig. 8.4 muestra la energía potencial como función de la distancia r desde el núcleo para un típico sistema partícula α -núcleo, donde R es el rango de la fuerza nuclear. La curva representa el efecto combinado de la repulsión Coulomb, que da origen al pico positivo para $r > R$, y la fuerza nuclear atractiva, que es la causa de la parte negativa de la curva para $r < R$. Como hemos visto en el ejemplo 8.4, una típica energía de desintegración es de unos 5 MeV, que es aproximadamente la energía cinética de la partícula α , representada por la línea discontinua en la Fig. 8.4. Clásicamente, la partícula α , inicialmente en el interior del pozo de potencial del núcleo, no tiene energía suficiente para escapar del núcleo. Sin embargo, como demostraron George Gamow en 1928 e independientemente R.W. Gurney y E.U. Condon en 1929, la partícula α puede escapar del núcleo por medio el efecto túnel. A continuación vamos a determinar la correspondiente probabilidad de escape y su dependencia con la energía de la partícula α .

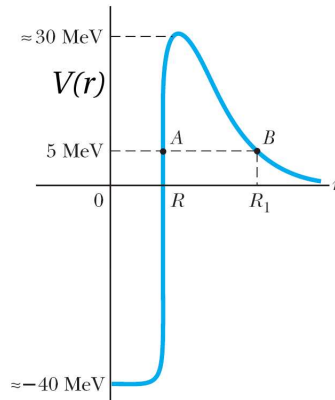


Fig. 8.4 Energía potencial como función de la separación para un sistema partícula α -núcleo.

La probabilidad de escape es simplemente el coeficiente de transmisión $T(E)$ para la barrera Coulomb mostrada en la Fig. 8.4. Como vimos en la sección 4.7, la probabilidad $T(E)$ viene dada aproximadamente por

$$T(E) \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m} \int \sqrt{V(r) - E} dr\right), \quad (8.20)$$

donde la integral se extiende sobre la región clásicamente prohibida donde $E < V$. Para la desintegración α , esta región está acotada por debajo por R (radio del núcleo hijo) y por arriba por $R_1 = 2Zke^2/E$, que corresponde al punto de retorno dado por $E = V(R_1) = 2Zke^2/R_1$ (ver Fig. 8.4). En esta expresión Z es el número atómico del núcleo hijo.

La integral que tenemos que evaluar es

$$\int \sqrt{V(r) - E} dr = \sqrt{E} \int_R^{R_1} \sqrt{\frac{R_1}{r} - 1} dr = R_1 \sqrt{E} \int_{R/R_1}^1 \sqrt{\frac{1}{z} - 1} dz, \quad (8.21)$$

donde $z = r/R_1$. En principio, la integral anterior se puede calcular exactamente, pero aquí vamos a usar la aproximación $R/R_1 \ll 1$, que tiene lugar para la mayor parte de los casos de interés. En este caso, una primera estimación se puede obtener tomando el límite inferior de integración como cero y usando el cambio de variable $z = \cos^2 \theta$, con lo cual

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{z} - 1} dz = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2\theta) d\theta = \frac{\pi}{2}. \quad (8.22)$$

Para mejorar esta aproximación dividimos la integral original en dos y aproximamos la segunda usando $1/z \gg 1$ para z pequeño. De este modo, obtenemos

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{z} - 1} dz - \int_0^{R/R_1} \sqrt{\frac{1}{z} - 1} dz \approx \frac{\pi}{2} - \int_0^{R/R_1} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{R}{R_1}}. \quad (8.23)$$

Combinando este resultado con $R_1 = 2Zke^2/E$, obtenemos finalmente

$$T(E) = \exp\left\{-4\pi Z \sqrt{\frac{E_0}{E}} + 8\sqrt{\frac{ZR}{r_0}}\right\} \quad (8.24)$$

que es precisamente la ec. (4.95). El parámetro $r_0 = \hbar^2/M_\alpha ke^2$ se puede interpretar como el radio de Bohr para la partícula α y tiene un valor de 7.25 fm. La energía E_0 es análoga a la energía de Rydberg en física atómica y está dada por

$$E_0 = \frac{ke^2}{2r_0} = \frac{14.40 \text{ eV} \cdot \text{Å}}{(2)(7.25 \times 10^{-5} \text{ Å})} = 0.0993 \text{ MeV}. \quad (8.25)$$

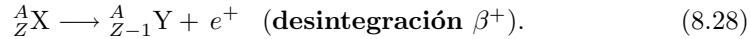
Consideremos el ejemplo de la desintegración α del radio, donde el núcleo hijo es el radón con un número atómico $Z = 86$ y un número másico $A = 222$. De acuerdo con la ec. (8.1), el radio R del núcleo de radón es $R = (1.2\text{fm})(222)^{1/3} = 7.27 \text{ fm}$. De este modo, la probabilidad de desintegración para $E = 5 \text{ MeV}$ es igual a

$$\exp\left\{-4\pi(86)\sqrt{\frac{0.0993}{5}} + 8\sqrt{\frac{(86)(7.27)}{7.25}}\right\} = 1.32 \times 10^{-34}. \quad (8.26)$$

Esta probabilidad es muy pequeña, pero el número real de desintegraciones por segundo es mucho más grande porque la partícula α sufre muchas colisiones por segundo contra la barrera nuclear. Esta frecuencia de colisión f es el recíproco del tiempo de tránsito que tarda la partícula α en cruzar el núcleo, es decir, $f = v/2R$, donde v es la velocidad de la partícula α dentro del núcleo. En muchos casos f es del orden de 10^{21} colisiones por segundo, lo que implica que el ritmo de desintegraciones por segundo es del orden de 10^{-13} , lo que está en buen acuerdo con el resultado experimental de $\lambda = 1.4 \times 10^{-11}$ Hz.

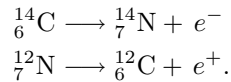
8.2.2 Desintegración beta

Cuando un núcleo radiactivo experimenta una desintegración beta, el núcleo hijo tiene el mismo número de nucleones que el núcleo padre, pero el número atómico se modifica por 1:



Nótese que en ambos procesos se conservan tanto el número de nucleones como la carga eléctrica. Sin embargo, como veremos en breve, estos procesos no están completamente descritos por estas expresiones.

Dos ejemplos típicos de desintegración beta son:



Nótese que en una desintegración beta un neutrón se convierte en un protón (o viceversa). Por otra parte, es importante recalcar que el electrón o el positrón en estas desintegraciones no existían previamente en los núcleos sino que son creados durante la desintegración a partir de la energía en reposo del núcleo padre.

Analizemos ahora la energía del sistema antes y después de la desintegración. Como en el caso de la desintegración α , suponemos que la energía se conserva y que el núcleo hijo (que es relativamente pesado) se lleva una parte despreciable de la energía cinética. Experimentalmente, se encuentra que las partículas beta que son emitidas por los núcleos tienen una energía cinética que varía de forma continua en un cierto rango hasta una energía máxima K_{\max} (ver Fig. 8.5). La energía cinética del sistema después de la desintegración es igual al decrecimiento de la masa en reposo del sistema, es decir, es igual al valor Q de la reacción. En este sentido, uno esperaría que la energía cinética de la partícula beta tomara un valor definido (el valor Q), en lugar de variar de experimento en experimento. Da la sensación de que en este tipo de desintegración la conservación de la energía se está violando. De hecho, un análisis más detallado de las desintegración descritas en las ecs. (8.27) y (8.28) muestra que también se violan los principios de conservación del momento angular de espín y del momento lineal.

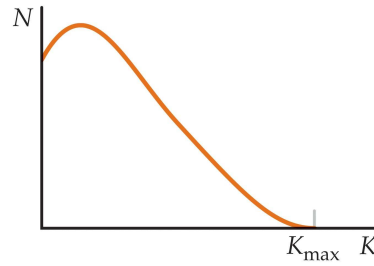
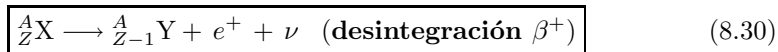
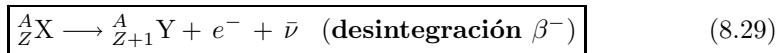


Fig. 8.5 Número de electrones emitidos en la desintegración β^- en función de la energía cinética. El hecho de que todos los electrones no tengan la misma energía cinética sugiere la existencia de otra partícula que comparte con el electrón la energía disponible en la desintegración.

Para resolver este misterio, Wolfgang Pauli propuso en 1930 que debería haber una tercera partícula en estos procesos que se llevara la energía y el momento “perdidos”. Enrico Fermi bautizó posteriormente a esta partícula como **neutrino** porque no tenía carga eléctrica y tenía muy poca masa en reposo (inicialmente se pensó que no tenía masa en absoluto). Esta partícula no se descubrió hasta 1956 y hoy sabemos que tiene las siguientes propiedades:

- No tiene carga eléctrica.
- Su masa en reposo es mucho más pequeña que la del electrón. Experimentos recientes muestran que la masa del neutrino no es 0, pero es menor que $2.8 \text{ eV}/c^2$.
- Tiene espín $1/2$, lo cual satisface la ley de conservación del momento angular en la desintegración beta.
- Interactúa muy débilmente con la materia, lo que la hace ser muy difícil de detectar.

Así pues, la descripción completa de las desintegraciones beta viene dada por las siguientes expresiones:



donde el símbolo ν representa un neutrino y el símbolo $\bar{\nu}$ representa un **antineutrino**, que es la antipartícula del neutrino.¹ Como en el caso de la desintegración alfa, las desintegraciones beta se analizan mediante la conservación de la energía y del momento lineal, aunque en este caso se deben utilizar las expresiones relativistas porque las energías cinéticas del electrón y del neutrino no son despreciables frente a sus energías en reposo.

Un proceso que compite con la desintegración β^+ es la **captura electrónica**. Este proceso tiene lugar cuando un núcleo padre captura uno de los electrones del

¹Las antipartículas serán discutidas en el próximo capítulo.

átomo y emite un neutrino. El producto final de la desintegración es un núcleo cuya carga es $Z - 1$:



Habitualmente, el electrón capturado por el núcleo padre corresponde a la capa más interna (capa K) y uno habla de captura K . Un ejemplo de este proceso es la captura de un electrón por parte del ${}^7_4\text{Be}$ para convertirse en ${}^7_3\text{Li}$:



Finalmente, es importante hablar de los valores Q para los diversos procesos beta. El valor Q para una desintegración β^- y para una captura electrónica viene dado por $Q = (M_X - M_Y)c^2$, mientras que el valor Q para la desintegración β^+ viene dado por $Q = (M_X - M_Y - 2m_e)c^2$, donde M_X y M_Y son las masas de los átomos neutros. Estas expresiones nos permiten determinar si un proceso beta puede o no tener lugar. Nótese que para calcular el valor Q de una desintegración β^+ es necesario tener en cuenta la masa de dos electrones. ¿Sabrías decir por qué?

Datación por ${}^{14}\text{C}$

La desintegración beta del ${}^{14}\text{C}$ suele usarse para fechar muestras orgánicas. Los rayos cósmicos en la atmósfera superior provocan reacciones nucleares que producen ${}^{14}\text{C}$. De hecho, el ratio entre ${}^{14}\text{C}$ y ${}^{12}\text{C}$ en las moléculas de CO_2 de la atmósfera tiene un valor constante aproximadamente igual a 1.3×10^{-12} . Todos los organismos vivos poseen esta misma razón del ${}^{14}\text{C}$ al ${}^{12}\text{C}$ porque intercambian de manera continua dióxido de carbono con su entorno. Cuando un organismo muere, deja de absorber ${}^{14}\text{C}$ de la atmósfera, y así la razón ${}^{14}\text{C}/{}^{12}\text{C}$ decrece como resultado de la desintegración beta del ${}^{14}\text{C}$, cuyo periodo de semidesintegración es de 5730 años. En consecuencia, es posible medir la antigüedad de un material si se mide su actividad por unidad de masa provocada por la desintegración del ${}^{14}\text{C}$. Utilizando esta técnica, se han podido identificar muestras de madera, carbón, huesos y conchas que vivieron hace entre 1000 y 25000 años. Este conocimiento ha ayudado a reconstruir la historia de los organismos vivos, incluyendo los humanos, durante ese periodo.

Ejemplo 8.5: Queremos datar la edad de un hueso que contiene 200 g de carbono y detectamos 400 desintegraciones beta por minuto. ¿Cuál es su edad? *Nota:* en un organismo vivo la actividad del ${}^{14}\text{C}$ es de unas 15 desintegraciones/minuto por cada gramo.

Solución. Para hacer el cálculo preciso hacemos uso de la expresión de la actividad después de n periodos de semidesintegración:

$$R_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n R_0,$$

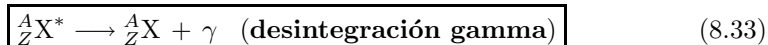
donde $R_0 = (15 \text{ desint/min} \cdot \text{g}) \times (200 \text{ g}) = 3000 \text{ desint/min}$. Por tanto,

$$400 \text{ desint/min} = \left(\frac{1}{2}\right)^n 3000 \text{ desint/min} \Rightarrow n = \frac{\ln 7.5}{\ln 2} = 2.91.$$

De este modo, la edad será $t = nt_{1/2} = 2.91 \times (5730 \text{ años}) = 1.67 \times 10^4 \text{ años}$. \square

8.2.3 Desintegración gamma

Muy a menudo, un núcleo que experimenta un decaimiento radiactivo queda en un estado energético excitado. Luego, puede experimentar un segundo decaimiento hacia un estado de menor energía, quizá el estado fundamental, al emitir un fotón de alta energía:



donde X^* indica un núcleo en un estado excitado. El periodo de semidesintegración de un estado nuclear excitado es del orden de 10^{-10} s. Los fotones emitidos tienen una energía muy alta (en el intervalo entre 1 MeV y 1 GeV). Recordemos que la energía de los fotones emitidos (o absorbidos) por un átomo es igual a la diferencia en energía entre los dos estados electrónicos implicados en la transición. De manera semejante, un fotón de un rayo gamma posee una energía hf que es igual a la diferencia en energía ΔE entre dos niveles energéticos nucleares. Cuando un núcleo decae al emitir un rayo gamma, el núcleo no cambia ni su masa atómica ni su número atómico.

Un núcleo puede llegar a un estado excitado como resultado de una colisión violenta con otra partícula. También es muy común que un núcleo esté en un estado excitado después de experimentar una desintegración alfa o beta. La siguiente secuencia de eventos representa una situación típica en la que se presenta una desintegración gamma:

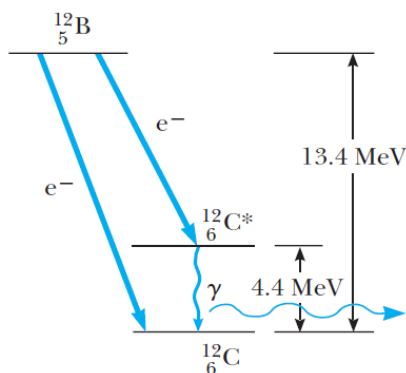


Fig. 8.6 Diagrama de niveles energéticos que muestra el estado nuclear inicial de un núcleo de ${}^{12}\text{B}$ y dos estados energéticos inferiores posibles del núcleo de ${}^{12}\text{C}$. La desintegración beta del ${}^{12}\text{B}$ puede resultar en una de las dos situaciones siguientes: el núcleo de ${}^{12}\text{C}$ se encuentra en el estado fundamental o en el estado excitado, en cuyo caso el núcleo se denota por ${}^{12}\text{C}^*$. En este último caso, la desintegración beta a ${}^{12}\text{C}^*$ es seguida por una desintegración gamma a ${}^{12}\text{C}$ cuando el núcleo excitado realiza un transición al estado fundamental.

En la Fig. 8.6 se muestra el esquema de desintegración del ^{12}B , que experimenta un decaimiento beta con un periodo de semidesintegración de 20.4 ms hacia cualquiera de los dos niveles del ^{12}C . Puede decaer directamente al estado fundamental del ^{12}C emitiendo un electrón de 13.4 MeV, o bien, puede experimentar una desintegración β^- a un estado excitado del $^{12}\text{C}^*$, seguida de una desintegración gamma hacia el estado fundamental. El último proceso resulta en la emisión de un electrón de 9 MeV y un fotón de 4.4 MeV.

8.2.4 Radiactividad natural

Los núcleos radiactivos suelen clasificarse en dos grupos: (i) núcleos inestables que se encuentran en la naturaleza, que originan lo que se denomina **radiactividad natural** y (ii) núcleos producidos en el laboratorio a través de reacciones nucleares, que exhiben **radiactividad artificial**. Hay tres series de núcleos radiactivos que existen en la naturaleza (ver Tabla 8.2). Cada serie empieza con un isótopo radiactivo específico de larga duración, cuyo periodo de semidesintegración excede el de cualquiera de sus descendientes. Las tres series naturales empiezan con los isótopos ^{238}U (**serie del uranio**), ^{235}Ac (**serie del actinio**) y ^{232}Th (**serie del torio**). Los productos estables finales correspondientes son tres isótopos del plomo: ^{206}Pb , ^{207}Pb y ^{208}Pb . La cuarta serie en la Tabla 8.2 es una serie radiactiva denominada **serie del neptunio**, ya que este elemento es el miembro de mayor duración de la serie aparte de su producto final estable, el ^{209}Bi . El ^{237}Np es un elemento que no se encuentra en la naturaleza ya que su periodo de semidesintegración (2.14×10^6 años) es mucho menor que la edad de la tierra y hace tiempo que se agotó.

En la Fig. 8.7 se muestran los decaimientos sucesivos para la serie del ^{232}Th . Nótese que el ^{232}Th primero experimenta una desintegración α para transformarse en ^{228}Ra . Luego, el ^{228}Ra experimenta dos desintegraciones β consecutivas hasta el ^{228}Th . La serie continúa y finalmente se bifurca cuando llega al ^{212}Bi . En este punto hay dos posibilidades de desintegración. El fin de la serie es el isótopo estable ^{208}Pb .

Tabla 8.2 Las cuatro series radiactivas.

Serie	Isótopo inicial	$t_{1/2}$ (años)	Isótopo estable final
Uranio	^{238}U	4.47×10^9	^{206}Pb
Actinio	^{235}U	7.04×10^8	^{207}Pb
Torio	^{232}Th	1.41×10^{10}	^{208}Pb
Neptunio	$^{237}\text{Np}^a$	2.14×10^6	^{209}Bi

^a Este es el miembro más longevo de la serie. En realidad, el isótopo inicial es el ^{241}Pu .

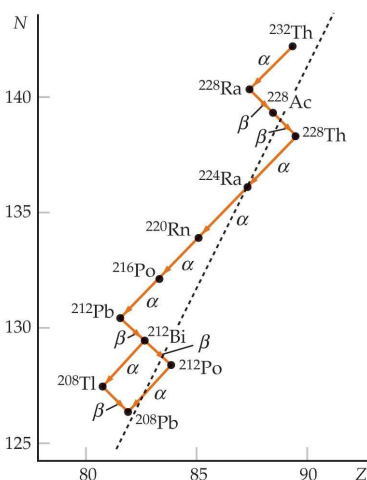


Fig. 8.7 Sucesivas desintegraciones en la serie del torio.

8.3 Reacciones nucleares

Es posible modificar la estructura de los núcleos al bombardearlos con partículas muy energéticas. Tales colisiones que cambian la identidad de los núcleos blanco se denominan **reacciones nucleares**. El primero en observarlas fue Rutherford en 1919, usando como partículas de bombardeo fuentes radiactivas que existen en la naturaleza. Desde entonces se han observado miles de reacciones nucleares, en especial después del desarrollo de los aceleradores de partículas cargadas en la década de los 1930. Con la tecnología actual en los aceleradores de partículas es posible proporcionar a las partículas energías de $1000 \text{ GeV} = 1 \text{ TeV}$ o más.

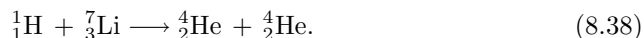
Consideremos una reacción en la que un núcleo X se bombardea con una partícula a, resultando un núcleo Y y una partícula b:



Algunas veces esta reacción se describe de una forma más abreviada como



Un ejemplo de reacción nuclear es ${}^7\text{Li}(p, \alpha){}^4\text{He}$, o bien,



Cockroft y Walton fueron los primeros en observar esta reacción en 1932, usando protones acelerados a 600 keV. Una reacción nuclear como ésta, y de hecho cualquier reacción, sólo puede ocurrir si satisface ciertas leyes de conservación. Las leyes de conservación para las reacciones nucleares son:

- *Conservación del número de másico, A.* El número total de nucleones debe ser el mismo antes y después de la reacción. Para la reacción anterior tenemos que $A_{\text{antes}} = 1 + 7 = A_{\text{despues}} = 4 + 4$.

- *Conservación de la carga, q .* Aquí las partículas nucleares cargadas son protones y $q_{\text{antes}} = 1 + 3 = q_{\text{despues}} = 2 + 2$.
- *Conservación de la energía, momento lineal y momento angular.* Estas cantidades se conservan debido a que una reacción nuclear sólo involucra fuerzas internas entre un núcleo blanco y una partícula proyectil, y no hay fuerzas externas.

A continuación aplicaremos la conservación de la energía a una reacción de la forma de la ec. (8.36) para calcular la energía cinética total liberada (o absorbida) en la reacción, que se denomina **energía de reacción** o **valor Q de la reacción**. Supongamos que el núcleo blanco X está inicialmente en reposo, que la partícula proyectil a tiene una energía cinética K_a y que los productos de la reacción b e Y tienen energías cinéticas K_b y K_Y . Aplicando la conservación de la energía,

$$M_X c^2 + K_a + M_a c^2 = M_Y c^2 + K_Y + M_b c^2 + K_b. \quad (8.39)$$

Debido a que la energía cinética total liberada en la reacción, Q , es igual a la diferencia entre la energía cinética de las partículas finales y la de las partículas iniciales, se encuentra que

$$Q = (K_Y + K_b) - K_a = (M_X + M_a - M_Y - M_b)c^2. \quad (8.40)$$

Una reacción para la cual Q es positiva transforma la masa nuclear en energía cinética de los productos Y y b y se denomina **reacción exotérmica**. Para que ocurra una reacción en la cual Q es negativa, de entrada se requiere una energía cinética mínima de la partícula proyectil. Una reacción así se denomina **endotérmica**. Para que tenga lugar una reacción endotérmica, la partícula incidente debe poseer una energía cinética mínima denominada **energía umbral**, K_u . Debido a que K_u debe no sólo suministrar $|Q|$, la masa-energía en exceso de los productos, sino también algo de energía cinética a los productos a fin de conservar la cantidad de movimiento, K_u es mayor que $|Q|$.

Para reacciones de baja energía, donde las energías cinéticas de todas las partículas interactuantes son pequeñas en comparación con sus energías en reposo, es posible aplicar las expresiones no relativistas $K = (1/2)mv^2$ y $p = mv$ para encontrar la energía umbral. Se deja como problema demostrar que en una reacción de baja energía con Q negativa la energía umbral viene dada por

$$K_u = -Q \left(1 + \frac{M_a}{M_X} \right). \quad (8.41)$$

Ejemplo 8.6: Determinar el valor Q de la reacción de la ec. (8.38) e indicar si la reacción es exotérmica o endotérmica.

Solución. El valor Q de esta reacción viene dado por

$$Q = (M_{1\text{H}} + M_{3\text{Li}} - M_{2\text{He}} - M_{2\text{He}})c^2 = (1.007825 \text{ u} + 7.016004 \text{ u} - 2 \times 4.002603 \text{ u})c^2.$$

Por tanto, $Q = 17.35 \text{ MeV}$ y como $Q > 0$ esta reacción es exotérmica. \square

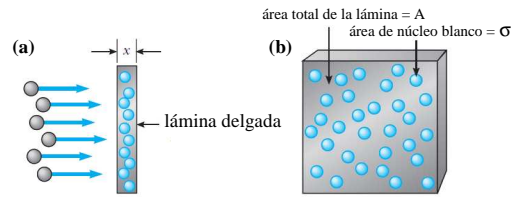


Fig. 8.8 (a) Un haz de partículas incide en una lámina delgada de grosor x . (b) Vista frontal de la lámina, donde los círculos representan los núcleos blanco.

8.3.1 Sección eficaz de una reacción nuclear

El objetivo de esta subsección es describir el concepto de **sección eficaz**, que proporciona una medida de la probabilidad de que una reacción nuclear tenga lugar.

Cuando un haz de partículas incide sobre un blanco en la forma de una lámina delgada, no todas las partículas interactúan con uno de los núcleos del blanco. La probabilidad de que una interacción ocurra depende del cociente entre el “área efectiva” del núcleo blanco y el área total de la lámina delgada. La situación es análoga a cuando se lanzan dardos de forma aleatoria sobre una pared en la que hemos colocado una serie de globos hinchados. En este caso, existe una cierta probabilidad de que acertemos a un globo cuando lanzemos el dardo. Además, si lanzamos dardos con un ritmo R_0 , el ritmo R con que se explotan los globos será menor que R_0 . De hecho, la probabilidad de explotar un globo será R/R_0 . El cociente R/R_0 dependerá del número de globos N en la pared, del área σ de cada globo y del área de la pared. Ya que el área transversal total ocupada por los globos es $N\sigma$, la probabilidad R/R_0 será igual al cociente $N\sigma/A$.

Con esta analogía podemos entender el concepto de sección eficaz en el contexto de las reacciones nucleares. Supongamos que un haz de partículas incide sobre una lámina delgada, como se muestra en la Fig. 8.8(a). Cada núcleo blanco X tiene un área efectiva σ llamada **sección eficaz**. Podemos pensar en σ como en el área efectiva del núcleo que ofrece a las partículas incidentes cuando éstas se aproximan frontalmente al blanco (ver Fig. 8.8(b)). Sin embargo, la sección eficaz de una reacción puede ser mayor, igual o menor que la sección transversal real del núcleo en cuestión. Se supone que la reacción $X(a, b)Y$ ocurrirá sólo si la partícula incidente golpea en el área σ . Por tanto, la probabilidad de que ocurra una colisión es proporcional a σ . En general, el valor de σ para una reacción puede también depender de la energía de la partícula incidente.

Profundicemos en el concepto de sección eficaz. A continuación consideraremos una lámina de grosor x y área A . Además, usaremos la siguiente notación:

- R_0 = ritmo con el cual las partículas incidentes golpean la lámina (partículas/s).
- R = ritmo con el que tienen lugar las reacciones nucleares (reacciones/s).
- n = número de núcleos blanco que existen por unidad de volumen

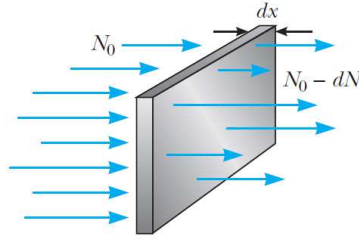


Fig. 8.9 Si N_0 es el número de partículas incidentes en un blanco de grosor dx en un cierto intervalo de tiempo, el número de partículas que atraviesan el blanco es $N_0 - dN$.

(partículas/m³).

Como el número total de núcleos blanco en la película es nAx , el área total expuesta al haz incidente es σnAx . El cociente entre el ritmo con el que se producen las reacciones y el ritmo con el que inciden las partículas, R/R_0 , debe ser igual al cociente entre el área σnAx y el área total A de la lámina, en analogía con el ejemplo de los dardos. De este modo,

$$\frac{R}{R_0} = \frac{\sigma nAx}{A} = \sigma nx. \quad (8.42)$$

Este resultado muestra que la probabilidad de que ocurra una reacción nuclear es proporcional a la sección eficaz σ , a la densidad de núcleos n y al grosor del blanco x . Por tanto, el valor de σ para una reacción nuclear dada se puede obtener midiendo R , R_0 , n y x y usando la ec. (8.42).

Podemos usar el mismo razonamiento para obtener una expresión para el número de partículas que penetran en la lámina sin sufrir ninguna reacción. Supongamos que N_0 partículas inciden en una lámina de grosor dx y que dN es el número de partículas que interactúan con los núcleos blanco (ver Fig. 8.9). El cociente entre el número de partículas que interactúan y el número de partículas que inciden en el blanco (después de haber atravesado un grosor x), dN/N , es igual al cociente entre la sección eficaz total del blanco, $nA\sigma dx$, y el área total de la lámina, A . Es decir,

$$-\frac{dN}{N} = \frac{nA\sigma dx}{A} = n\sigma dx, \quad (8.43)$$

donde el signo menos indica que las partículas están siendo removidas del haz. Al integrar esta expresión y tomar $N = N_0$ en $x = 0$,

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -n\sigma \int_0^x dx \Rightarrow \ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -n\sigma x \Rightarrow \boxed{N = N_0 e^{-n\sigma x}} \quad (8.44)$$

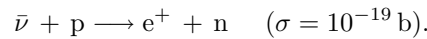
Es decir, si N_0 es el número de partículas incidentes, el número de ellas que salen de la lámina, N , decrece exponencialmente con el grosor del blanco.

Las secciones eficaces nucleares, cuyas dimensiones son de área, por lo común son del orden del cuadrado del radio nuclear, es decir aproximadamente 10^{-28} m².

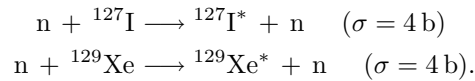
Por esta razón, se usa habitualmente la unidad de 10^{-28} m^2 para medir las secciones eficaces nucleares. Esta unidad recibe el nombre de **barn** (b) y se define como

$$1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2. \quad (8.45)$$

En realidad, el concepto de sección eficaz en física nuclear tiene poco que ver con la verdadera área geométrica de los núcleos blanco. De hecho, las secciones eficaces varían con la reacción específica considerada y con la energía cinética de la partícula incidente. Por ejemplo, la sección eficaz para que un antineutrino interactúe con un protón a través de la interacción débil es de sólo alrededor de 10^{-19} b en la reacción



Las secciones eficaces para la dispersión inelástica de neutrones con yodo y xenón por medio de la interacción nuclear, sin embargo, son del orden de 4 barns en las siguientes reacciones:



Por último, un ejemplo de reacción nuclear con una gran sección eficaz (10^4 barns), así como con una sección eficaz bastante dependiente de la energía, lo constituye la reacción de captura de neutrones siguiente:



En esta reacción, que tiene una alta probabilidad de ocurrir sólo para neutrones de baja energía, el blanco de cadmio incorpora un neutrón extra en su núcleo, pasa a un estado excitado, y emite su exceso de energía en forma de un fotón (desintegración gamma). En la Fig. 8.10 se muestra la enorme dependencia de la sección eficaz con la energía del neutrón incidente en este caso.

8.3.2 Reacciones nucleares que involucran neutrones

A fin de comprender el proceso de fisión nuclear y el funcionamiento de un reactor nuclear, primero es necesario entender la forma en la que los neutrones interactúan con los núcleos. Como ya se mencionó, debido a que no poseen carga eléctrica, los neutrones no están sujetos a la fuerza de Coulomb. Debido a que los neutrones interactúan muy débilmente con los electrones, para los neutrones la materia parece bastante transparente. En general, se encuentra que las secciones eficaces típicas para reacciones inducidas por neutrones aumentan cuando se incrementa la energía del neutrón. Los neutrones libres experimentan decaimiento beta con un periodo de semidesintegración de 10 minutos. Por otra parte, los neutrones en la materia suelen ser absorbidos por los núcleos antes de decaer.

Cuando un neutrón rápido (uno cuya energía es mayor que aproximadamente 1 MeV) se desplaza a través de la materia, experimenta eventos de dispersión con los núcleos. En cada uno de esos eventos, el neutrón cede algo de su energía cinética a

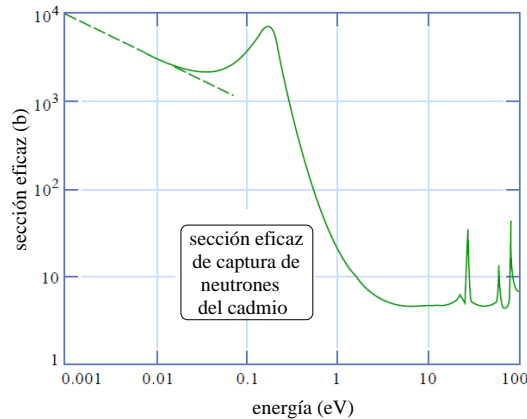
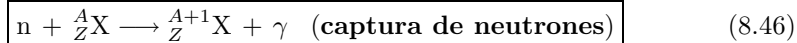


Fig. 8.10 Sección eficaz de captura de neutrones para el cadmio como función de la energía de los neutrones incidentes.

un núcleo. El neutrón continúa experimentando colisiones hasta que su energía es del orden de la energía térmica $k_B T$, donde k_B es la constante de Boltzmann y T es la temperatura absoluta. A esta baja energía, hay una alta probabilidad de que el neutrón sea capturado por un núcleo, como puede verse para el caso del Cd en la Fig. 8.10. Este proceso de **captura de neutrones** puede describirse como



Aunque no se indique aquí, el núcleo X está en un estado excitado X^* durante un breve espacio de tiempo y después sufre una desintegración gamma. Además, si el núcleo ${}^A_Z X$ es radiactivo, también puede sufrir una desintegración α o β .

La sección eficaz del proceso de captura de neutrones descrito en el párrafo anterior depende de la naturaleza del núcleo blanco y de la energía del neutrón incidente. Para algunos materiales y para neutrones rápidos, la sección eficaz es tan pequeña que las colisiones elásticas dominan.² Los materiales para los que esto ocurre reciben el nombre de **moderadores**, ya que frenan (o moderan) de forma muy eficiente a los neutrones que originalmente eran muy energéticos. El boro, el grafito o el agua son buenos ejemplos de materiales moderadores.

Durante una colisión elástica de dos partículas, la máxima energía cinética se transfiere de una a otra cuando ambas tienen la misma masa. De este modo, un neutrón pierde toda su energía cinética cuando choca frontalmente contra un protón. Si la colisión es oblicua, el neutrón pierde sólo parte de su energía cinética. Por esta razón, los materiales en los que abunda el hidrógeno, como la parafina o el agua, son buenos moderadores de neutrones.

En algún momento, muchos de los neutrones en un moderador se convierten en neutrones térmicos, que son neutrones en equilibrio térmico con el material

²Por colisión elástica se entiende en este contexto aquella en la que el neutrón no es capturado por un núcleo, sino que simplemente rebota y continúa su camino.

moderador. Su energía cinética promedio a temperatura ambiente es

$$K_{\text{prom}} = \frac{3}{2}k_{\text{B}}T \approx 0.04 \text{ eV}, \quad (8.47)$$

que corresponde a un neutrón con una velocidad media de unos 2800 m/s. Los neutrones térmicos tienen una distribución de velocidades como la de las moléculas en un contenedor de gas. Un neutrón de alta energía, con varios MeV, termalizará en menos de 1 ms cuando incida sobre un moderador como grafito o agua.

Ejemplo 8.7: Una lámina de aluminio de 0.3 mm de grosor se bombardea con neutrones. Los núcleos de aluminio sufren captura de neutrones siguiendo la reacción: $^{27}\text{Al}(n,\gamma)^{28}\text{Al}$, con una sección eficaz medida de $\sigma = 2.0 \times 10^{-31} \text{ b} = 2.0 \times 10^{-31} \text{ m}^2$. Suponiendo que el flujo de neutrones incidente es de 5.0×10^{12} neutrones/cm²·s, calcular el número de neutrones capturados por segundo por 1.0 cm² de la lámina. *Nota:* usar que la densidad del aluminio es 2.7 g/cm³.

Solución. Para resolver este problema debemos calcular en primer lugar la densidad de núcleos n , que es igual a la densidad de átomos. Ya que la densidad del aluminio es 2.7 g/cm³ y $A = 27$, tenemos que

$$n = \frac{6.02 \times 10^{23} \text{ núcleos/mol}}{27 \text{ g/mol}} \times 2.7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 6.02 \times 10^{28} \text{ núcleos/m}^3.$$

Ahora podemos calcular el ritmo de captura R del siguiente modo:

$$\frac{R}{R_0} = \sigma n x = (2.0 \times 10^{-31} \text{ m}^2)(6.02 \times 10^{28} \text{ núcleos/m}^3)(0.3 \times 10^{-3} \text{ m}) = 3.6 \times 10^{-6}.$$

Como $R_0 = 5.0 \times 10^{12}$ neutrones/cm²·s, tenemos que $R = 1.8 \times 10^7$ neutrones/cm²·s. Por tanto, el número de neutrones capturados por 1.0 cm²/s es sólo 1.8×10^7 neutrones, mientras que el número de neutrones incidentes es de 5.0×10^{12} . Esto es, sólo aproximadamente 4 de cada millón de neutrones es capturado. \square

8.4 Fisión y fusión

Un análisis de la diferencia de masa nuclear por nucleón, es decir de $(M - Zm_{\text{p}} - Nm_{\text{n}})/A$, revela que la masa por nucleón de los núclidos muy pesados ($A > 200$) y de los núclidos muy ligeros ($A < 20$) es mayor que la correspondiente a los núclidos de masa intermedia (ver Fig. 8.11). Por lo tanto, cuando un núcleo pesado como el ^{235}U se separa en dos núcleos más ligeros, proceso conocido como de **fisión**, se libera una gran cantidad de energía. Tan bien se libera mucha energía cuando los núcleos muy ligeros, como el ^2H y el ^3H , se fusionan entre sí para formar un núcleo de masa mayor, proceso conocido como de **fusión**. En esta sección describiremos en detalle estos dos procesos nucleares.

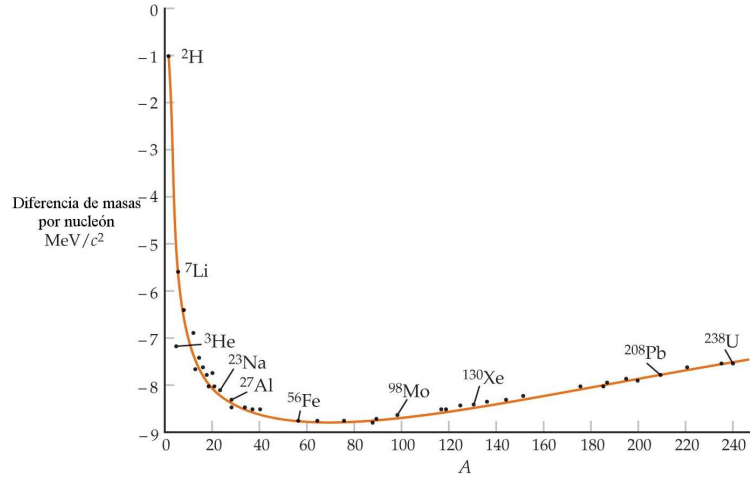


Fig. 8.11 Diferencia de masa por nucleón $(M - Zm_p - Nm_n)/A$ en unidades de MeV/c^2 en función de A . La masa por nucleón es menor para los núcleos de masa intermedia que para los muy ligeros o muy pesados.

8.4.1 Fisión nuclear

Los núcleos muy pesados ($Z > 92$) están expuestos a fisión espontánea, rompiéndose en dos núcleos más pequeños que se separan incluso en ausencia de una perturbación externa. La fisión establece un límite superior al tamaño de un núcleo y, por tanto, al número de elementos posibles de la tabla periódica.

Ciertos núcleos pesados, en particular el uranio y el plutonio, pueden ser inducidos a fisión por captura de un neutrón. Así, en la fisión del ${}^{235}\text{U}$, por ejemplo, el núcleo de uranio se excita por la captura de un neutrón, originando su división en dos núcleos y emitiendo varios neutrones. La fuerza de Coulomb separa los fragmentos de la fisión y la energía desprendida aparece finalmente en forma de energía térmica. Consideremos, por ejemplo, la fisión de un núcleo de número másico $A = 200$ que origina dos núcleos con $A = 100$. Como la energía en reposo para $A = 200$ es aproximadamente 1 MeV por nucleón mayor que para $A = 100$, se liberan aproximadamente 200 MeV por núcleo en dicha fisión. Esto supone una cantidad enorme de energía. Por comparación, digamos que en la reacción química de la combustión se liberan del orden de 4 eV por molécula de oxígeno consumida.

Ejemplo 8.8: Calcular la energía total en kWh liberada en la fisión de 1 g de ${}^{235}\text{U}$, suponiendo que se liberan 200 MeV por cada fisión nuclear.

Solución. El número de núcleos involucrados viene dado por

$$N = \frac{N_A \times 1 \text{ g}}{235 \text{ g/mol}} = \frac{6.02 \times 10^{23} \text{ núcleos/mol}}{235 \text{ g/mol}} \times 1 \text{ g} = 2.56 \times 10^{21} \text{ núcleos.}$$

Por tanto, la energía total será

$$E = NE_{\text{nucleo}} = (2.56 \times 10^{21} \text{ núcleos}) \times \frac{200 \times 10^6 \text{ eV}}{\text{núcleo}} = 5.12 \times 10^{29} \text{ eV} =$$

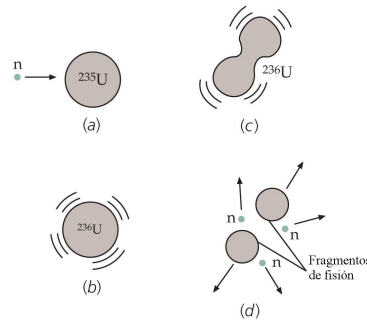


Fig. 8.12 Ilustración esquemática de la fisión nuclear. (a) La captura de un neutrón por parte del ^{235}U conduce a (b) ^{236}U en un estado excitado. En (c) la oscilación del ^{236}U se hace inestable. (d) El núcleo se divide en dos fragmentos que son núcleos de masa intermedia y emite varios neutrones que pueden producir la fisión de otros núcleos de uranio.

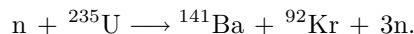
$$8.19 \times 10^{10} \text{ J} = 8.19 \times 10^7 \text{ kW} \cdot \text{s} = 2.28 \times 10^4 \text{ kW} \cdot \text{h}.$$

□

La fisión del uranio fue descubierta en 1938 por Otto Hahn y Fritz Strassman, quienes determinaron por análisis químico que en el bombardeo de uranio con neutrones se producían elementos de masa intermedia (tales como el bario o el lantano). El descubrimiento de que en el proceso de fisión se emitían varios neutrones sustentó la posibilidad de utilizar estas partículas para obtener nuevas fisiones y, así, producir una reacción en cadena. Cuando el ^{235}U captura un neutrón, el núcleo resultante de ^{236}U está inicialmente excitado y pasa al estado fundamental emitiendo rayos γ aproximadamente el 15% de las veces y experimenta la fisión el 85% de las veces restantes. El proceso de fisión es análogo a la oscilación de una gota líquida, como se indica en la Fig. 8.12. Si las oscilaciones son suficientemente violentas, la gota se divide en dos. Utilizando el modelo de la gota líquida, Niels Bohr y John Wheeler calcularon la energía cinética crítica K_c necesaria para que el núcleo de ^{236}U experimentara una fisión. Para este núcleo, la energía crítica es 5.3 MeV, la cual es menor que la energía de excitación, 6.4 MeV, producida cuando el ^{235}U captura un neutrón. Por lo tanto, la captura de un neutrón por parte del ^{235}U produce un estado excitado del ^{236}U que posee una energía superior a la necesaria para romperse en dos fragmentos. Por otra parte, la energía crítica de fisión del ^{239}U es 5.9 MeV. La captura de un neutrón por un núcleo de ^{238}U produce una energía de excitación de sólo 5.2 MeV. Por lo tanto, cuando un neutrón es capturado por el ^{238}U para formar el ^{239}U , la energía de excitación es insuficiente para que tenga lugar la fisión. En este caso, el núcleo excitado ^{239}U pasa al estado fundamental por emisión γ y se desintegra por emisión β en ^{239}Np y luego en ^{239}Pu por una nueva emisión β .

Cuando un núcleo experimenta fisión puede romperse en dos fragmentos distintos. Según la reacción producida, 1, 2 ó 3 neutrones pueden ser emitidos. Una

reacción típica es



8.4.2 Reactores nucleares de fisión

Hemos comentado que cuando el ${}^{235}\text{U}$ se fisiona, se emite un promedio de 2.5 neutrones por evento. A su vez, estos neutrones pueden activar la fisión de otros núcleos, con la posibilidad de generar una reacción en cadena. Cálculos muestran que si la reacción en cadena no se controla (es decir, si no procede lentamente), puede resultar en una explosión violenta, con la liberación de una enorme cantidad de energía. Por ejemplo, si se libera la energía de 1 kg de ${}^{235}\text{U}$, equivaldría a detonar alrededor de 20000 toneladas de TNT. Este es el principio de la bomba atómica, es decir, una reacción de fisión no controlada.

Un reactor nuclear es un sistema diseñado para mantener lo que se denomina como **reacción en cadena autosostenida**. Este importante proceso fue logrado por primera vez en 1942 por Enrico Fermi en la Universidad de Chicago, con uranio natural como combustible. La mayor parte de los reactores actualmente en operación también utilizan uranio como combustible. En el uranio natural sólo el 0.7% corresponde al isótopo radiactivo ${}^{235}\text{U}$ y el 99.3% restante está compuesto por el ${}^{238}\text{U}$ que casi nunca se fisiona. En vez de ello, el ${}^{238}\text{U}$ tiende a absorber neutrones, produciendo neptunio y plutonio. Por esta razón, los combustibles para los reactores deben enriquecerse artificialmente a fin de que contengan por lo menos un pequeño porcentaje de ${}^{235}\text{U}$.

Para lograr una reacción en cadena autosostenida, en promedio uno de los neutrones emitidos en la fisión de ${}^{235}\text{U}$ debe ser capturado por otro núcleo de ${}^{235}\text{U}$ y hacer que experimente fisión. Un parámetro de utilidad para describir el nivel de operación del reactor es la **constante de reproducción** k , definida como el número medio de neutrones de cada evento de fisión que realmente provocan otro evento de fisión. Como se ha visto, k puede tener un valor máximo de 2.5 en la fisión del uranio. Sin embargo, en la práctica, k es menor que eso debido a varios factores que serán analizados.

Una reacción en cadena autosostenida se logra cuando $k = 1$. Cuando esta condición se cumple, se dice que el reactor es **crítico**. Cuando $k < 1$, el reactor es subcrítico y la reacción se extingue. Cuando k es substancialmente mayor que la unidad, se dice que el reactor es supercrítico y ocurre una reacción **fuera de control**. En un reactor comercial se mantiene k ligeramente por encima de la unidad. En la Fig. 8.13 se muestran los componentes básicos del núcleo de un reactor nuclear. Los elementos combustibles consisten en uranio enriquecido. A continuación se describirá la función de las partes restantes del reactor.

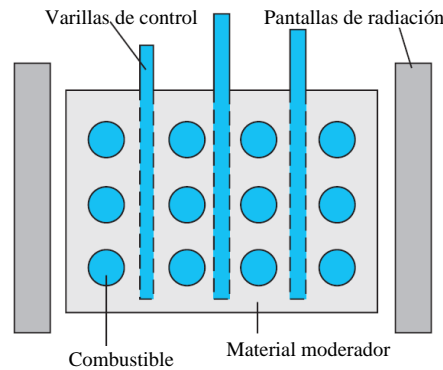


Fig. 8.13 Sección transversal del núcleo de un reactor que muestra las varillas de control, los elementos de combustible y el material moderador rodeado por una protección contra la radiación.

Fuga de neutrones

En cualquier reactor, una fracción de neutrones producidos por fisión se fugan del núcleo antes de inducir otros eventos de fisión. Si la fracción que se fuga es demasiado grande, el reactor no opera. El porcentaje de pérdida es grande si el reactor es muy pequeño debido a que la fuga es una función de la razón del área superficial al volumen. En consecuencia, una característica crítica del diseño de un reactor es elegir la razón superficie-volumen correcta de modo que sea posible obtener una reacción sostenida.

Regulación de la energía de los neutrones

Los neutrones liberados en eventos de fisión son muy energéticos (con energías del orden de 2 MeV). Por esta razón, es necesario aminorar la velocidad de estos neutrones hasta alcanzar energías térmicas para permitir que sean capturados y que produzcan la fisión de otros núcleos de ^{235}U . Esto se debe al hecho de que la probabilidad de fisión aumenta con la disminución de la energía de los neutrones, como se muestra en la Fig. 8.14.

Captura de neutrones

En el proceso de disminución de su velocidad, los neutrones pueden ser capturados por núcleos que no se fisionan. El evento más común de este tipo es la captura de neutrones por el ^{238}U . La probabilidad de captura de un neutrón por el ^{238}U es muy alta cuando los neutrones poseen energías cinéticas altas y muy baja cuando las energías cinéticas de los neutrones son bajas. Así, la disminución de la velocidad de los neutrones por los moderadores sirve al objetivo secundario de hacer que estén disponibles para la reacción con ^{235}U y disminuir sus posibilidades de ser capturados por el ^{238}U .

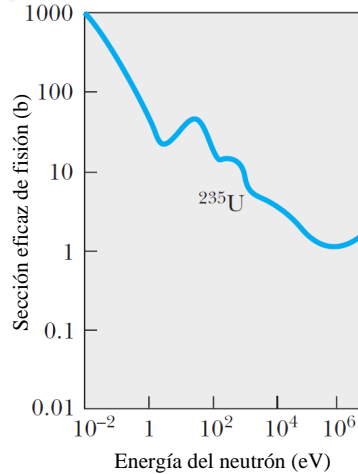


Fig. 8.14 Sección eficaz de fisión del ^{235}U por captura de un neutrón como función de la energía del neutrón. La sección eficaz media para neutrones térmicos (a temperatura ambiente) es de 500 b.

Control del nivel de potencia

Es posible que un reactor alcance la etapa crítica ($k = 1$) después de que se minimizen todas las pérdidas de neutrones que acaban de describirse. Sin embargo, para mantener un valor de k próximo a la unidad se requiere un método de control. Si k subiera por encima de este valor, el calor producido en la reacción de fuga fundiría el reactor. Para controlar el nivel de potencia, en el núcleo del reactor se insertan varillas de control (ver Fig. 8.13). Estas varillas están hechas de materiales como el cadmio, que absorben neutrones de manera eficiente. Ajustando el número y la posición de esas varillas de control en el núcleo del reactor el valor de k puede variarse y de este modo, se puede controlar el nivel de potencia.

Aunque hay varios tipos de reactores de potencia que convierten la energía cinética de los fragmentos de fisión en energía eléctrica, el más común es el reactor de agua a presión (ver Fig. 8.15). Sus partes principales son comunes en todos los diseños. Los eventos de fisión en el núcleo del reactor proporcionan calor al agua contenida en el circuito primario, que se mantiene a altas presiones para evitar que hierva. Este agua sirve a su vez como moderador. El agua caliente se bombea a través de un intercambiador de calor para transferir el calor al agua del circuito secundario. El agua caliente en el circuito secundario se convierte entonces en vapor, que posteriormente se va a expandir en una turbina creando energía eléctrica. Nótese que el agua en el circuito secundario está aislada del agua del circuito primario para evitar la contaminación procedente de los núcleos radiactivos en el núcleo del reactor.

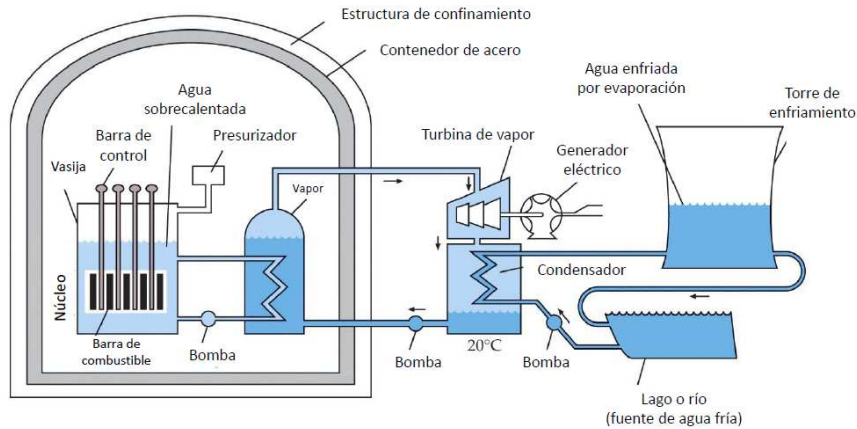
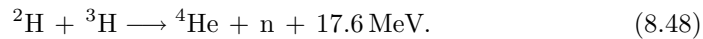


Fig. 8.15 Esquema de un reactor de agua a presión. El agua que está en contacto con el núcleo del reactor se utiliza simultáneamente como moderador y como material transmisor del calor. Está aislada del agua (fuente de agua fría) utilizada para producir el vapor que impulsa las turbinas. Muchas características, tales como los mecanismos de enfriamiento de retroalimentación, no se muestran aquí.

8.4.3 Fusión nuclear

En la fusión nuclear, dos núcleos ligeros, tales como el deuterio (^2H) y el tritio (^3H) se fusionan conjuntamente para formar un núcleo más pesado. Una reacción típica es



Aunque el valor de la energía liberada es inferior al correspondiente a una reacción de fisión, realmente se trata de una cantidad superior de energía por unidad de masa.

Debido a la repulsión Coulomb entre los núcleos de ^2H y ^3H , se necesitan energías cinéticas grandes, del orden de 1 MeV, para que los núcleos se aproximen suficientemente de modo que sean efectivas las fuerzas nucleares atractivas y originen la fusión. Estas energías pueden obtenerse en un acelerador, pero como la dispersión de un núcleo por parte de otro es mucho más probable que la fusión, la energía requerida en el acelerador es superior a la que podría recuperarse. Para obtener energía mediante la fusión se deberá elevar la temperatura suficientemente de modo que la reacción de fusión tenga lugar como consecuencia de las colisiones térmicas aleatorias. Una temperatura adecuada sería del orden de $k_{\text{B}}T \approx 10 \text{ keV}$, es decir, $T \approx 10^8 \text{ K}$. Tales temperaturas tienen lugar en el interior de las estrellas, donde estas reacciones son corrientes.³ A estas temperaturas, un gas está formado por iones positivos y electrones y se denomina **plasma**. Uno de los problemas que

³La producción de energía en las estrellas y las reacciones nucleares de fusión que tienen lugar en sus núcleos serán discutidas en el Capítulo 10.

surgen al intentar producir reacciones de fusión controladas es la del confinamiento del plasma un tiempo suficiente para que estas reacciones tengan lugar.

La energía requerida para elevar la temperatura de un plasma es proporcional a la densidad de sus iones n , mientras que el número de colisiones por unidad de tiempo es proporcional a n^2 , el cuadrado de la densidad. Si τ es el tiempo de confinamiento, la producción de energía es proporcional a $n^2\tau$. Si la energía de salida debe exceder a la de entrada, se ha de cumplir que

$$C_1 n^2 \tau > C_2 n, \quad (8.49)$$

donde C_1 y C_2 son constantes. En 1957 el físico británico J.D. Lawson evaluó estas constantes a partir de los rendimientos de diversos reactores hipotéticos de fusión y dedujo la siguiente relación entre densidad y tiempo de confinamiento llamada **criterio de Lawson**:

$$n\tau > 10^{20} \text{partículas} \cdot \text{s/m}^3 \quad (\text{criterio de Lawson}) \quad (8.50)$$

Si el criterio de Lawson se cumple y la energía térmica de los iones es suficientemente grande ($k_B T \approx 10$ keV), la energía liberada por un reactor de fusión será justamente igual a la energía consumida. Para que el reactor sea práctico debe liberarse mucha más energía.

Actualmente se siguen dos esquemas distintos de investigación para alcanzar el criterio de Lawson. Uno de ellos, el **confinamiento magnético**, utiliza un campo magnético para confinar el plasma. En el dispositivo más corriente, desarrollado por primera vez en la antigua URSS, llamado Tokamak, el plasma está confinado en un gran recipiente toroidal. El campo magnético es una combinación del campo toroidal debido a los arrollamientos del toro y del propio campo debido a la corriente de plasma que circula en su interior. El balance energético equilibrado se ha alcanzado recientemente con el confinamiento magnético, pero estamos todavía muy lejos de la construcción de un reactor de fusión práctico.

En un segundo esquema, llamado **confinamiento inercial**, una masa comprimida de deuterio y tritio sólidos en forma de microesferas se bombardea en todas direcciones mediante haces láser en pulsos cortos con energías del orden de 10^4 J a intervalos de 10^{-8} s. Los estudios de simulación por ordenador indican que la microesfera debería comprimirse hasta unas 10^4 veces su densidad normal y su temperatura debería alcanzar valores superiores a 10^8 K. Estas condiciones producirían aproximadamente unos 10^6 J de energía de fusión en 10^{-11} s, un tiempo tan breve que el confinamiento se alcanza sólo por inercia.

Los resultados precarios obtenidos con el método de fusión por confinamiento magnético y los múltiples problemas prácticos que plantea la construcción de un reactor de fusión, todavía sin resolver, nos llevan a la conclusión de que esta fuente de energía no estará disponible antes de varias décadas. Sin embargo, la fusión sigue siendo una de las grandes promesas energéticas del futuro.

Ejemplo 8.9: La separación entre dos deuterones (o núcleos de deuterio) debe de ser del orden de 1.0×10^{-14} m para que la fuerza nuclear atractiva pueda vencer

a la repulsión Coulomb. (a) Calcular la altura de la barrera de potencial debida a la fuerza repulsiva de Coulomb. (b) Estimar la temperatura efectiva requerida para que un deuterón supere la barrera de potencial. Para ello, supóngase que un deuterón posee una energía igual a $(3/2)k_B T$.

Solución. (a) La energía potencial asociada con dos cargas separadas una distancia r es

$$V = k \frac{q_1 q_2}{r},$$

donde k es la constante de Coulomb. Para el caso de dos deuterones, $q_1 = q_2 = +e$, de modo que

$$V = k \frac{e^2}{r} = \left(8.99 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \right) \frac{(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{1.0 \times 10^{-14} \text{ m}} = 2.3 \times 10^{-14} \text{ J} = 0.14 \text{ MeV}.$$

(b) Como la energía Coulomb del par de deuterones es 0.14 MeV, la energía Coulomb por deuterón es $0.07 \text{ MeV} = 1.1 \times 10^{-14} \text{ J}$. Igualando esta energía a la energía térmica promedio, tenemos que

$$\frac{3}{2} k_B T = 1.1 \times 10^{-14} \text{ J} \Rightarrow T = \frac{2 \times (1.1 \times 10^{-14} \text{ J})}{3 \times (1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K})} = 5.3 \times 10^8 \text{ K}. \quad \square$$

8.5 Bibliografía recomendada

Este capítulo está basado en las siguientes tres referencias:

- Capítulo 40 de “Física para la ciencia y la tecnología, Vol. 2C” (5ª edición) de Tipler y Mosca, editorial Reverté.
- Capítulos 13 y 14 de “Modern Physics” (3rd edition) de R.A. Serway, C.J. Moses and C.A. Moyer, Thomson/Brook Cole (2005).
- Capítulo 11 de “Modern Physics” (5th edition) de Tipler y Llewellyn, W.H. Freeman.

Existen muchos aspectos interesantes de la física de nuclear que no hemos abordado aquí por problemas de espacio. Por ejemplo, no hemos tratado temas como los modelos básicos de la estructura nuclear, la interacción de la radiación (entendida aquí como los productos de las desintegraciones) con la materia o aplicaciones tan importantes como la resonancia magnética nuclear. Para aquellos interesados en estos temas, les recomiendo las dos últimas referencias mencionadas arriba.

Aquellos que quieran profundizar en la física de nuclear pueden tomar como punto de partida la referencia:

- Capítulos 15 y 16 de “Física Cuántica” de Robert Eisberg y Robert Resnick, editorial Limusa (1988),

y si alguno está seguro de que la física de nuclear es la historia de su vida, le recomiendo que se atreva con la biblia en este tema:

- “Introductory Nuclear Physics” de Kenneth S. Krane, (Wiley, 1987).

Una última recomendación. Si quieres leer un poco más sobre la fusión nuclear y los esfuerzos por convertirla en una fuente de energía viable, visita la página web del proyecto internacional ITER: <http://www.iter.org/>.

8.6 Ejercicios del Capítulo 8

Cuestiones

- (1) El isótopo estable del sodio es ^{23}Na . ¿Qué tipo de radiactividad deben experimentar el (a) ^{22}Na y (b) el ^{24}Na ?
- (2) Calcular la energía de enlace y su valor por nucleón a partir de sus masas para (a) ^{12}C , (b) ^{56}Fe y (c) ^{238}U . *Nota:* usar la tabla de masas atómicas.
- (3) ¿Es el núcleo de ^{211}Bi un emisor α ? Explicar por qué.
- (4) Calcular la energía cinética máxima de los electrones en la desintegración β^- del ^3H .
- (5) En un proceso de fisión, un núcleo de ^{239}Pu se fragmenta en dos núcleos cuyos números másicos están en relación de 3 a 1. Calcular el radio de los núcleos así formados.
- (6) La velocidad de recuento correspondiente a una fuente radiactiva es de 8000 cuentas/s en el instante $t = 0$ y 10 minutos después es de 1000 cuentas/s. (a) ¿Cuál es su periodo de semidesintegración? (b) ¿Cuál es su constante de desintegración? (c) ¿Cuál es su velocidad de recuento al cabo de 20 minutos?
- (7) El periodo de semidesintegración del radio es 1620 años. Calcular el número de desintegraciones por segundo de 1 g de radio y demostrar que el ritmo de desintegración o actividad es aproximadamente 1 Ci.
- (8) Usando la tabla de masas atómicas, determinar los valores Q de las siguientes reacciones: (a) $^1\text{H} + ^3\text{H} \rightarrow ^3\text{He} + n + Q$ y (b) $^2\text{H} + ^2\text{H} \rightarrow ^3\text{He} + n + Q$.
- (9) Suponiendo una energía media de 200 MeV por fisión, calcular el número de fisiones por segundo necesario para el funcionamiento de un reactor de 500 MW.
- (10) Según el departamento de energía de los Estados Unidos, ese país consume unos 10^{20} julios anuales de energía. Estimar la masa (en kg) del (a) uranio necesario para producir esta energía por fisión nuclear y del (b) deuterio y tritio que se necesitarían para producirla por fusión nuclear.

Problemas

- (11) En 1920, doce años antes de que se descubriera el neutrón, Ernest Rutherford sugirió que podían existir pares protón-electrón en el interior del núcleo para explicar así que el número másico A fuera mayor que el número atómico Z . También sugirió que estos pares podían ser la fuente de electrones en las desin-

tegraciones beta. El experimento de dispersión de Rutherford mostró en 1910 que el diámetro del núcleo era de unos 10 fm. Usando este diámetro nuclear, el principio de indeterminación y el hecho de que los electrones salen con energías entre 0.02 MeV y 3.40 MeV, demostrar que los electrones no pueden estar en el interior del núcleo.

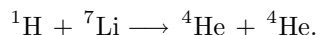
- (12) Considerar un núcleo inicial A_ZX que es un emisor alfa y está en reposo. Este núcleo se desintegra en un núcleo final y una partícula alfa así: ${}^A_ZX \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + \alpha + Q$. (a) Comprobar que ignorando las correcciones relativistas, la energía cinética de la partícula alfa viene dada por $(A-4)Q/A$. (b) Comprobar que la energía cinética del núcleo final es $4Q/A$.
- (13) El material fisionable ${}^{239}\text{Pu}$ es un emisor alfa. Sabiendo que las masas del ${}^{239}\text{Pu}$, ${}^{235}\text{U}$ y la partícula alfa son, respectivamente, 239.052156 u, 235.043923 u y 4.002603 u, usar las relaciones del problema anterior para calcular las energías cinéticas de la partícula alfa y del uranio producidos en el decaimiento alfa de núcleo ${}^{239}\text{Pu}$.
- (14) Un subproducto en algunos reactores de fisión es el isótopo ${}^{239}\text{Pu}$ que es un emisor alfa con un periodo de semidesintegración de 24000 años: ${}^{239}\text{Pu} \rightarrow {}^{235}\text{U} + \alpha$. Considérese una muestra de 1 kg de ${}^{239}\text{Pu}$ puro en $t = 0$. Calcular (a) el número de núcleos presentes en $t = 0$, (b) la actividad inicial de la muestra, y (c) el tiempo necesario para que la actividad se reduzca a una desintegración/s. *Nota:* La masa atómica del ${}^{239}\text{Pu}$ es de 239.052158 u.
- (15) Se supone que un ataúd de madera tiene 18000 años. ¿Cuánto carbono tendríamos que tomar de este objeto para obtener un ritmo de recuento que no fuera inferior a 5 cuentas/s?
- (16) Se encuentra en un yacimiento arqueológico una muestra de hueso animal que contiene 175 g de carbono. Si se mide que la actividad del ${}^{14}\text{C}$ es de 8.1 Bq, ¿cuál es la edad del hueso? *Nota:* en un organismo vivo la actividad del ${}^{14}\text{C}$ es de unas 15 desintegraciones/minuto por cada gramo de carbono y el periodo de semidesintegración del ${}^{14}\text{C}$ es de 5730 años.
- (17) El carbón vegetal de una hoguera hallada en un viejo campamento indio tiene una actividad de 0.0048 μCi por kilogramo (1 Ci = 3.7×10^{10} desintegraciones/segundo). Calcular cuánto tiempo hace que se utilizó por última vez el campamento. *Nota:* en un organismo vivo la actividad del ${}^{14}\text{C}$ es de unas 15 desintegraciones/minuto por cada gramo de carbono y el periodo de semidesintegración del ${}^{14}\text{C}$ es de 5730 años.
- (18) Un isótopo de rubidio ${}^{87}\text{Rb}$ es un emisor beta con un periodo de semidesintegración de 4.9×10^{10} años que se desintegra en ${}^{87}\text{Sr}$. Se utiliza para determinar la edad de rocas y fósiles. Unas rocas con fósiles de animales primitivos presentan una relación de ${}^{87}\text{Sr}$ a ${}^{87}\text{Rb}$ de 0.01. Suponiendo que no existía ${}^{87}\text{Sr}$ cuando se formaron las rocas, calcular la edad de estos fósiles.
- (19) (a) Calcular la energía liberada en la desintegración α del ${}^{238}\text{U}$. *Nota:* la masa atómica del ${}^{234}\text{Th}$ es 234.043593 u. (b) ¿Es posible que el ${}^{40}\text{Ca}$ sufra una

desintegración β^+ ?

- (20) ¿Qué tipos de desintegración β puede sufrir el ^{80}Br ? Explicar por qué y escribir la ecuación de la desintegración en cada caso.
- (21) ¿Qué tipo de desintegraciones puede sufrir el ^{40}K ? Explicar por qué y escribir la ecuación de la desintegración en cada caso.
- (22) (a) Utilizar las masas atómicas $m = 13.00574$ u para el ^{13}N y $m = 13.003354$ u para el ^{13}C y calcular el valor Q (en MeV) para la emisión beta: $^{13}\text{N} \rightarrow ^{13}\text{C} + \beta^+ + \nu_e$. (b) Explicar por qué es necesario sumar dos masas electrónicas a la masa del ^{13}C para el cálculo de Q en esta reacción.
- (23) (a) La primera reacción nuclear artificial fue realizada por Rutherford en 1919 cuando bombardeó átomos de nitrógeno con partículas α emitidas por el isótopo ^{214}Bi . La reacción es



¿Cuál es el valor Q de la reacción? y ¿cuál es la energía umbral para que se produzca? *Nota:* la masa atómica del ^{17}O es de 16.999131 u y las masas del resto de productos se pueden encontrar en la Tabla 8.1 de las notas del curso. (b) Cockroft y Walton realizaron la primera reacción nuclear utilizando un acelerador de partículas. En este caso, se aceleraron protones para bombardear núcleos de litio, dando lugar a la reacción



Como las masas de las partículas involucradas en la reacción eran bien conocidas, esta reacción se usó para demostrar la relación masa-energía de Einstein. Calcular el valor Q de esta reacción. *Nota:* usar la Tabla 8.1 de masas atómicas.

- (24) Considerar la siguiente reacción nuclear de fisión: $^{235}\text{U} + n \rightarrow ^{95}\text{Mo} + ^{139}\text{La} + 2n$. Las masas del neutrón, U, Mo y La son 1.008665 u, 235.043293 u, 94.905842 u y 138.906348 u, respectivamente. (a) Calcular el valor de Q de esta reacción de fisión en MeV. (b) Comparar el resultado con la energía potencial electrostática de los productos finales cuando los núcleos de ^{95}Mo y de ^{139}La se están tocando en un solo punto.
- (25) La reacción de fusión entre ^2H y ^3H es: $^3\text{H} + ^2\text{H} \rightarrow ^4\text{He} + n + 17.6$ MeV. Utilizando el principio de conservación del momento lineal y el valor de Q dado, determinar las energías finales del núcleo ^4He y del neutrón, suponiendo que el momento lineal inicial del sistema es cero.
- (26) Un núcleo inicialmente en reposo se fragmenta espontáneamente en dos núcleos de masas m_1 y m_2 . Demostrar que las energías cinéticas que adquieren estos núcleos vienen dadas por

$$\frac{K_1}{K_{\text{tot}}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{y} \quad \frac{K_2}{K_{\text{tot}}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2},$$

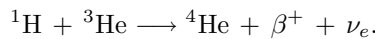
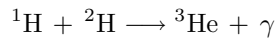
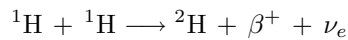
donde K_{tot} es la energía cinética total de los dos núcleos. *Nota:* ignorar las correcciones relativistas. (b) Aplicar este resultado para determinar las

energías cinéticas de los productos resultantes de la siguiente fisión espontánea: $^{236}\text{U} \longrightarrow ^{87}\text{Br} + ^{149}\text{La}$. *Nota:* las masas atómicas requeridas son 86.920710 u para el ^{87}Br , 148.934370 u para el ^{149}La y 236.045562 u para el ^{236}U .

- (27) En un pozo rectangular infinito y unidimensional de longitud $L = 3$ fm tenemos 12 nucleones. (a) Suponiendo por simplicidad que la masa de un nucleón es 1 u, determinar la energía mínima del nucleón en el pozo. Expresar la respuesta en MeV. ¿Cuál es la energía del estado fundamental del sistema de 12 nucleones en el pozo si (b) todos ellos son neutrones y (c) 6 de los nucleones son neutrones y 6 son protones? (Despreciar la energía de repulsión de Coulomb de los protones.)
- (28) Derivar la ec. (8.41).

Problemas avanzados

- (29) En el Sol y otras estrellas la energía se genera en sus núcleos por fusión nuclear. Uno de los ciclos de fusión, el ciclo protón-protón, consta de las siguientes tres reacciones:



- (a) Demostrar que el efecto neto de estas reacciones es $4^1\text{H} \longrightarrow ^4\text{He} + 2\beta^+ + 2\nu_e + \gamma$ y demostrar que la energía en reposo liberada en este ciclo es 26.7 MeV. (b) Si el Sol radia con una potencia aproximada de 4×10^{26} W, ¿cuál es el número de protones consumidos por segundo en el Sol? (c) ¿Cuándo se extinguirá el Sol si continua radiando al ritmo actual? (Suponer que los protones constituyen aproximadamente la mitad de la masa total de 1.99×10^{30} kg del Sol.)
- (30) Considérese un neutrón de masa m que se mueve con una velocidad v_L y realiza una colisión frontal elástica con un núcleo de masa M que está en reposo en el sistema de referencia del laboratorio. (a) Demostrar que la velocidad del centro de masas en el sistema de laboratorio es $V = mv_L/(m + M)$. (b) ¿Cuál es la velocidad del núcleo en el sistema de referencia del centro de masas antes de la colisión? ¿Y después de la colisión? (c) ¿Cuál es la velocidad del núcleo en el sistema de referencia del laboratorio después de la colisión? (d) Demostrar que la energía del núcleo después de la colisión en el sistema del laboratorio es

$$\frac{1}{2}M(2V)^2 = \frac{4mM}{(m + M)^2} \left(\frac{1}{2}mv_L^2 \right).$$

- (e) Demostrar que la fracción de energía perdida por el neutrón en esta colisión elástica es

$$\frac{-\Delta E}{E} = \frac{4mM}{(m + M)^2} = \frac{4m/M}{(1 + m/M)^2}.$$

(f) Utilizar los resultados de los apartados anteriores para demostrar que después de N colisiones frontales de un neutrón con núcleos de carbono en reposo, la energía del neutrón es aproximadamente $(0.714)^N E_0$, donde E_0 es la energía original. (g) ¿Cuántas colisiones frontales se requirieren para reducir la energía del neutrón de 2 MeV a 0.02 eV, suponiendo que los núcleos de carbono están en reposo?

Capítulo 9

Física de partículas

En este capítulo haremos un breve acercamiento a la física de partículas. En concreto, repasaremos la lista de partículas elementales, describiremos las interacciones fundamentales entre ellas, discutiremos las leyes de conservación básicas que rigen las reacciones entre partículas y presentaremos el modelo estándar de la física de partículas. Acabaremos este capítulo mencionando algunas de las teorías que van más allá del modelo estándar y que tratan de abordar algunos de los retos pendientes de esta disciplina.

9.1 Partículas elementales

Todas las distintas fuerzas observadas en la naturaleza se reducen a cuatro interacciones básicas: (1) la interacción nuclear fuerte (llamada también interacción hadrónica), (2) la interacción electromagnética, (3) la interacción nuclear débil y (4) la interacción gravitatoria. Las cuatro interacciones fundamentales proporcionan una forma conveniente de clasificar las partículas. Algunas partículas participan en las cuatro interacciones, pero otras sólo participan en algunas de ellas. Por ejemplo, todas las partículas son influidas por la gravedad, la más débil de las interacciones. En cambio, sólo las partículas que poseen carga eléctrica o momento magnético participan en la interacción electromagnética.

Hadrones

Las partículas que interactúan por medio de la fuerza nuclear fuerte se denominan **hadrones**. Hay dos tipos de hadrones: los **bariones**, de espín semientero ($1/2$, $3/2$, $5/2$, etc.) y los **mesones**, de espín cero o entero. Los bariones, que incluyen los nucleones, se consideraban las partículas más masivas. Los mesones inicialmente descubiertos tenían masas intermedias entre la masa del electrón y la del protón. Las partículas que se desintegran por medio de la interacción fuerte poseen vidas medias muy cortas, del orden de 10^{-23} s, que es aproximadamente el tiempo que tarda la luz en recorrer una distancia igual al diámetro de un núcleo. En cambio, las partículas que

Tabla 9.1 Hadrones estables frente a la desintegración vía la interacción nuclear fuerte.

Nombre	Símbolo	Masa, MeV/c ²	Espín, \hbar	Carga, e	Vida media, s	Productos de desintegración
Bariones						
Nucleón	p (protón)	938.3	1/2	+1	infinito	
	n (neutrón)	939.6	1/2	0	930	$p+e^- + \bar{\nu}_e$
Lambda	Λ^0	1116	1/2	0	2.5×10^{-10}	$p+\pi^-$
	Sigma	Σ^+	1189	1/2	+1	0.8×10^{-10}
		Σ^0	1193	1/2	0	10^{-20}
Xi	Σ^-	1197	1/2	-1	1.7×10^{-10}	$n+\pi^-$
	Ξ^0	1315	1/2	0	3.0×10^{-10}	$\Lambda^0 + \pi^0$
Omega	Ξ^-	1321	1/2	-1	1.7×10^{-10}	$\Lambda^0 + \pi^-$
	Ω^-	1672	3/2	-1	1.3×10^{-10}	$\Xi^0 + \pi^-$
Mesones						
Pión	π^+	139.6	0	+1	2.6×10^{-8}	$\mu^+ + \nu_\mu$
	π^0	135	0	0	0.8×10^{-16}	$\gamma + \gamma$
Kaón	π^-	139.6	0	-1	2.6×10^{-8}	$\mu^- + \bar{\nu}_\mu$
	K^+	493.7	0	+1	1.2×10^{-8}	$\pi^+ + \pi^0$
	K^0	493.7	0	0	0.88×10^{-10}	$\pi^+ + \pi^-$
Eta					5.2×10^{-8}	$\pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e$
	η	549	0	0	2×10^{-19}	$\gamma + \gamma$

En la última columna se presentan algunos modos de desintegración típicos, pero no son los únicos existentes. El K^0 posee dos vidas medias distintas. Todas las demás partículas tienen una sola vida media.

se desintegran por vía de la interacción débil tienen vidas medias muy superiores, del orden de 10^{-10} s. La Tabla 9.1 presenta algunas de las propiedades de aquellos hadrones que son estables frente a la desintegración vía la interacción fuerte.

Los hadrones no son realmente partículas elementales, en el sentido de que están formadas por otras. Hoy en día sabemos que todos los hadrones están constituidos por entidades más fundamentales llamadas *quarks*, que son realmente partículas elementales.

Leptones

Las partículas que participan en la interacción débil, pero no en la interacción fuerte, se llaman **leptones**. Tales son los electrones, muones y neutrinos, todos ellos menos masivos que el hadrón más ligero. La palabra leptón, que significa “partícula ligera”, fue elegida para reflejar la masa relativamente pequeña de estas partículas. Sin embargo, la partícula tau, último leptón descubierto en 1975, posee una masa de $1784 \text{ MeV}/c^2$, casi el doble que la del protón, de modo que ahora tenemos un leptón pesado. Por lo que sabemos hasta ahora, los leptones son partículas puntuales sin estructura y pueden considerarse como partículas realmente elementales en el sentido de que no están compuestas por otras partículas.

Existen seis leptones agrupados en tres *generaciones*. Ellos son el electrón y el

Tabla 9.2 Leptones.

	Nombre	Símbolo	Masa, MeV/ c^2	Espín, \hbar	Carga, e	Vida media, s
1ª Generación	electrón	e	0.511	1/2	-1	estable
	neutrino electrónico	ν_e	≤ 2.2 eV/ c^2	1/2	0	estable
2ª Generación	muón	μ	105.659	1/2	-1	2.2×10^{-6}
	neutrino muónico	ν_μ	≤ 3.5 eV/ c^2	1/2	0	estable
3ª Generación	tau	τ	1784	1/2	-1	3.3×10^{-13}
	neutrino tauónico	ν_τ	≤ 8.4 eV/ c^2	1/2	0	estable

neutrino electrónico, el muón y el neutrino muónico, y la partícula tau y el neutrino tauónico. La lista de leptones con sus propiedades básicas se detalla en la Tabla 9.2. Las masas del electrón, el muón y el tau son muy diferentes. La masa del electrón es 0.511 MeV/ c^2 , la del muón 106 MeV/ c^2 y la del tau 1784 MeV/ c^2 . El modelo estándar consideraba que los neutrinos, al igual que los fotones, carecen de masa. Sin embargo, experimentos recientes muestran que aunque la masa de los neutrinos es muy pequeña, no es realmente nula.

Quarks

Como los leptones, hay seis quarks que están agrupados en tres generaciones. Todos tienen una carga eléctrica fraccionaria. Como veremos más adelante, los quarks y los antiquarks se combinan en una multitud de formas para dar lugar a más de 200 partículas, que forman la mayor parte de la materia visible en el universo. Los estados ligados de los quarks y antiquarks son los hadrones. En concreto, los mesones están formados por una combinación de un quark y un antiquark, mientras que los bariones son el resultado de la combinación de tres quarks. Por razones que discutiremos más adelante, los quarks libres no pueden ser observados. La Tabla 9.3 presenta los seis quarks con sus propiedades básicas.

Cada quark de la tabla tiene una propiedad adicional, análoga a la carga eléctrica que se llama *color*, o *carga de color*. El color tiene tres posibles valores: rojo, azul y verde. Así por ejemplo, hay tres quarks u diferentes: u_r , u_b y u_g .

Antipartículas

Las partículas de espín 1/2 están descritas por la ecuación de Dirac, que es una versión relativista de la ecuación de Schrödinger. Una característica de la teoría de Dirac, propuesta en 1927, es la predicción de la existencia de antipartículas.

Tabla 9.3 Quarks.

	Nombre	Símbolo	Masa, MeV/c ²	Espín, \hbar	Carga, e	Número bariónico
1ª Generación	up	u	336	1/2	2/3	1/3
	down	d	338	1/2	-1/3	1/3
2ª Generación	charm	c	1500	1/2	2/3	1/3
	strange	s	540	1/2	-1/3	1/3
3ª Generación	top	t	170900	1/2	2/3	1/3
	bottom	b	5000	1/2	-1/3	1/3

En relatividad especial, la energía de una partícula está relacionada con la masa y el momento lineal de la partícula mediante la relación: $E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$. Normalmente escogemos la solución positiva y despreciamos la solución negativa con un argumento físico. Sin embargo, la ecuación de Dirac requiere la existencia de funciones de onda que corresponden a los estados de energía negativa. Dirac soslayó esta dificultad postulando que todos los estados de energía negativa estaban completos y, por tanto, no eran observables. Únicamente se observarían huecos en el “mar infinito” de estados de energía negativa. Por ejemplo, un hueco en el mar de estados energéticos negativos del electrón aparecería como una partícula idéntica al electrón pero con carga positiva. Cuando tal partícula se encontrase en la vecindad de un electrón, las dos partículas se aniquilarían, liberando una energía $2m_e c^2$, siendo m_e la masa del electrón. Esta interpretación recibió poca atención hasta que el positrón, que poseía justamente estas propiedades, fue descubierto en 1932 por Carl Anderson.

Las antipartículas nunca se crean aisladamente, sino siempre en forma de pares partícula-antipartícula. En la creación de un par electrón-positrón a partir de un fotón, la energía de éste debe ser mayor que la energía en reposo del electrón más el positrón, es decir, mayor que $2m_e c^2 = 1.02$ MeV. Aunque el positrón es estable, su existencia en nuestro universo es muy corta a causa del gran número de electrones que hay en la materia. El destino de un positrón es la aniquilación de acuerdo con la reacción:

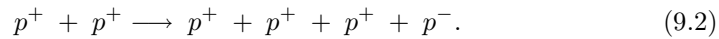


La probabilidad de esta reacción es grande sólo si el positrón está en reposo o casi en reposo. En el sistema de referencia del centro de masas, el momento de las dos partículas antes de la aniquilación es cero, de modo que se requieren dos fotones moviéndose en sentidos opuestos para que se conserve el momento lineal.

El hecho de que llamemos *partículas* a los electrones y *antipartículas* a los positrones no significa que estos últimos sean menos fundamentales que los electrones. Simplemente refleja la naturaleza de nuestro universo. Si nuestra materia

estuviera formada por protones negativos y electrones positivos, entonces los protones positivos y los electrones negativos experimentarían una aniquilación rápida y los llamaríamos antipartículas.

El antiprotón (p^- o \bar{p}) fue descubierto en 1955 por Emilio Segré y Owen Chamberlain mediante un haz de protones acelerados para producir la reacción:



La creación de un par protón-antiprotón requiere al menos la energía cinética $2m_p c^2 = 1877 \text{ MeV}/c^2$ en el sistema de referencia de momento lineal cero (sistema de centro de masas), en el cual los dos protones se aproximan el uno al otro con momentos lineales iguales y opuestos. En el sistema del laboratorio, en el cual uno de los protones se encuentra inicialmente en reposo, la energía cinética del protón incidente debe ser por lo menos $6m_p c^2 = 5.63 \text{ GeV}$. Esta energía no pudo conseguirse en los laboratorios hasta que se desarrollaron los aceleradores de alta energía durante los años 1950. Los antiprotones se aniquilan con los protones ordinarios produciendo varios mesones o dos rayos gamma en una reacción similar a la de la ec. (9.1).

9.2 Interacciones fundamentales

Todas las fuerzas de la naturaleza se pueden entender en términos de las cuatro interacciones fundamentales que tienen lugar entre las partículas elementales. En orden decreciente de intensidad, estas fuerzas son:

- (1) La interacción fuerte.
- (2) La interacción electromagnética.
- (3) La interacción débil.
- (4) La interacción gravitatoria.

Las fuerzas moleculares y la mayor parte de las fuerzas cotidianas que observamos entre objetos macroscópicos (como por ejemplo la fricción, las fuerzas de contacto y las fuerzas ejercidas por cuerdas y muelles) son manifestaciones complejas de la interacción electromagnética, que ocurre entre todas las partículas que tienen carga eléctrica. Aunque la gravedad, la interacción entre todas las partículas con masa, juega un papel fundamental en nuestras vidas, es tan débil comparada con las otras fuerzas que su papel en las interacciones entre partículas elementales es despreciable. La interacción débil actúa entre las partículas que tienen *carga débil* y es responsable, entre otras cosas, de la interacción entre electrones o positrones y nucleones que da lugar a la desintegración beta, que discutimos en el capítulo anterior. La interacción fuerte actúa entre las partículas que tienen carga de color y es responsable, por ejemplo, de la fuerza entre nucleones que mantiene los núcleos unidos. Algunas partículas participan en las cuatro interacciones, mientras que otras participan en sólo algunas de ellas.

El término “intensidad” de las interacciones se refiere específicamente a las magnitudes relativas de las **constantes de acoplo** adimensionales que multiplican a la parte dependiente de la distancia del potencial cuyo gradiente determina la fuerza particular. Las intensidades relativas que mencionaremos en esta sección son aproximadas, ya que no hay forma única de comparar dichas interacciones. Consideremos, por ejemplo, el potencial de Coulomb para dos cargas eléctricas que viene dado por: $V(r) = -(1/4\pi\epsilon_0)e^2/r$. El prefactor que multiplica a la función $1/r$ se puede hacer adimensional dividiendo ambos lados de la ecuación por la cantidad $\hbar c$:

$$V'(r) = V(r)/\hbar c = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \frac{1}{r}, \quad (9.3)$$

donde $V'(r)$ tiene dimensiones de distancia a la menos uno. La cantidad $e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$ es la constante de estructura fina ($\alpha \approx 1/137$) que nos encontramos en el contexto de la física atómica. La constante de estructura fina es pues la constante de acoplo de la interacción electromagnética.

Otro concepto importante en la física de partículas es el de **mediador** o **mensajero** de una interacción. Según el modelo estándar de física de partículas, todas las interacciones están mediadas por partículas mensajeras que son portadores de la fuerza. Todos los mediadores son bosones y poseen propiedades específicas de cada fuerza.

Aparte de su intensidad, cada fuerza está caracterizada por su **rango** o **alcance**, R , que es una medida de hasta donde se extiende su influencia. Para ilustrar cómo se puede estimar el alcance de una fuerza, y a su vez explicar el papel de un mediador, consideremos las fuerzas eléctricas. Clásicamente, cualquier distribución de cargas produce un campo eléctrico \vec{E} y la fuerza que siente otra carga q colocada en presencia del campo es $q\vec{E}$. Cualquier cambio en la distribución de las cargas cambia el campo \vec{E} ; sin embargo, la información de que un cambio ha ocurrido no aparece de forma instantánea en todas partes, sino que se propaga a la velocidad de la luz. Cambios temporales en la distribución de cargas crean cambios temporales en \vec{E} , esto es, radiación electromagnética u ondas. Hemos visto que la versión corpuscular de la radiación electromagnética es el fotón. En mecánica cuántica, cada carga está constantemente emitiendo y absorbiendo fotones, incluso cuando no se mueven. A estos fotones se les llama *virtuales*, lo que significa que no son directamente observables. Una carga puede emitir un fotón virtual de energía hf sin cambiar su energía o sin retroceder, es decir, sin violar la conservación de la energía y del momento lineal, siempre y cuando el fotón exista durante un tiempo inferior a $\Delta t = \hbar/E$, donde $E = hf$, como impone el principio de incertidumbre energía-tiempo. La distancia que el fotón virtual puede recorrer durante el intervalo de tiempo Δt es precisamente el rango o alcance y viene dado por

$$R = c\Delta t = c\hbar/\Delta E, \quad (9.4)$$

y substituyendo ΔE ,

$$R = c\hbar/hf = c/2\pi f = \lambda/2\pi. \quad (9.5)$$

Una segunda carga localizada a una distancia R de la primera puede absorber el fotón y un fotón similar emitido por la segunda carga puede ser absorbido por la primera, todo esto sin violar los principios de conservación de la energía y del momento lineal. Es este intercambio de fotones el responsable en mecánica cuántica de la interacción electrostática (o de Coulomb) entre dos cargas estacionarias. Nótese que como no hay límite para la longitud de onda de un fotón (puede ser arbitrariamente grande), el rango R de la fuerza de Coulomb es infinito, como ya sabíamos. Como veremos más adelante, si el mediador de una fuerza es una partícula masiva (es decir, tiene una cierta masa en reposo), entonces el alcance de la interacción es finito (esto es lo que ocurre con las fuerzas nucleares, tanto fuerte como débil).

A continuación describiremos las características básicas de las cuatro interacciones fundamentales.

Interacción fuerte

Todos los hadrones interactúan via la interacción fuerte. El rango de la interacción fuerte es del orden de 10^{-15} m (1 fm). La constante de acoplamiento α_s de la interacción fuerte es aproximadamente 1, es decir, 100 veces mayor que la constante de estructura fina α de la interacción electromagnética. Dentro del marco del modelo estándar, la interacción fuerte se debe a la carga de color, que juega un papel análogo al de la carga eléctrica en el electromagnetismo. El mediador de la fuerza fuerte es el **gluón**, que es una partícula sin masa. Como los quarks, los gluones poseen carga de color, pero hay una diferencia. Cada quark tiene una unidad de una de las tres cargas de color, mientras que cada gluón posee una unidad de una de las tres cargas de color y una unidad de una de las cargas de anticolor. Ya que hay nueve combinaciones de rojo, azul y verde con antirrojo, antiazul y antiverde, uno esperaría nueve gluones. Sin embargo, por razones un poco técnicas el número se reduce a ocho. Una consecuencia del hecho de que los gluones poseen carga de color es que la emisión de un gluón por parte de un quark puede cambiar el color (pero no el sabor)¹ del quark. Otra consecuencia es que los gluones interactúan entre sí, contrariamente a los fotones. Como los leptones no tienen carga de color, no intervienen en la interacción fuerte.

El tiempo característico de interacción de la fuerza fuerte es muy pequeño, del orden de 10^{-23} s. De este modo, para que la probabilidad de que dos partículas interactúen via la fuerza fuerte por intercambio de una partícula virtual, las dos deben estar dentro del rango de la interacción fuerte durante al menos 10^{-23} s. Análogamente, las partículas que se convierten en otras mediante su desintegración via la interacción fuerte, lo hacen en un tiempo del orden de 10^{-23} s. Este es el tiempo que tarda la luz en recorrer una distancia igual al diámetro de un núcleo.

¹Por sabor se entiende el tipo de quark, como up, down, etc.

Interacción electromagnética

Esta es la interacción dominante a escalas mayores que la subatómica, donde domina la interacción fuerte, y a escalas menores que la astronómica, donde reina la gravedad. Todas las partículas que tienen carga eléctrica o momento magnético sufren la interacción electromagnética. Como discutimos anteriormente, el alcance de esta interacción es infinito y su constante de acoplo es $1/137$ veces más pequeña que la de la fuerza fuerte. Su tiempo característico de interacción es del orden de 10^{-18} s. Según la electrodinámica cuántica, que es la teoría que describe esta interacción, el mediador o portador de la fuerza electromagnética es el fotón, un bosón no masivo con espín 1 y que no tiene carga eléctrica. Las desintegraciones via la interacción electromagnética involucran por lo general la emisión de uno o más fotones.

Interacción débil

Todos los quarks y los leptones sufren la interacción débil. El alcance de la fuerza débil es del orden de 10^{-18} m, considerablemente más pequeño que el correspondiente a la fuerza fuerte. Su tiempo característico de interacción está entre unos 10^{-16} s y 10^{-10} s. La fuente de la fuerza débil no recibe ningún nombre particular, aunque a veces se habla de carga débil o de carga de sabor. La intensidad de la interacción débil es del orden de 10^{-5} . La fuerza débil es transmitida por tres partículas: W^+ y W^- , con cargas $+e$ y $-e$ respectivamente, y la Z^0 , que es una partícula neutra. Las tres son bosones masivos con espín 1. Un aspecto muy importante de la fuerza débil es que las interacciones mediadas por las partículas W^\pm convierten un quark en otro (lo cambian de sabor). Sin embargo, la interacción débil no cambia el sabor de los leptones (no los cambia de tipo).

Los mediadores o portadores de la interacción débil fueron descubiertos en 1983 por Carlo Rubbia y una gran colaboración internacional en el CERN. La partícula Z^0 es la segunda partícula conocida más masiva, con una masa de $91 \text{ GeV}/c^2$ (aproximadamente 100 más masiva que el protón). Las W^\pm tienen una masa de $80 \text{ GeV}/c^2$.

Ejemplo 9.1: La masa del Z^0 es exactamente $91.16 \text{ GeV}/c^2$. Calcular el rango o alcance de la interacción débil mediada por esta partícula.

Solución. El alcance R , es decir, la distancia recorrida en el tiempo $\Delta t = \hbar/\Delta E$ por una partícula que se mueve a la velocidad de la luz, viene dado por la ec. (9.4) con $\Delta E = mc^2$, donde m es en este caso la masa de la partícula Z^0 . De este modo,

$$R = \frac{\hbar}{mc} = \frac{\hbar c}{mc^2},$$

y por tanto,

$$R = \frac{197.3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{(91.16 \text{ GeV})(10^9 \text{ eV/GeV})(10^9 \text{ nm/m})} = 2.17 \times 10^{-18} \text{ m}. \quad \square$$

Interacción gravitatoria

Todas las partículas participan de la interacción gravitatoria, pero esta interacción es tan débil que no juega ningún papel en la física de partículas. Su intensidad relativa a la de la fuerza fuerte es de 10^{-38} . El mediador de esta fuerza es el **gravitón**, que se cree que no tiene carga ni masa y posee un espín igual a 2. Esta partícula aún no ha sido observada. La interacción gravitatoria se debe a la masa.

9.3 Leyes de conservación

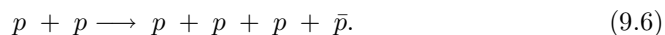
Una de las máximas de la naturaleza, a veces conocida como principio totalitario, es que “cualquier cosa que puede ocurrir, ocurre”. Si una posible reacción o desintegración no ocurre, debe de haber una razón para ello. La razón se expresa habitualmente en términos de una ley de conservación. A estas alturas ya estamos familiarizados con algunas de ellas. La **conservación de la energía** nos dice, en particular, que la suma de las masas en reposo de las partículas resultantes en una desintegración no puede ser superior a la masa de la partícula que se desintegra. La **conservación del momento lineal** se verifica en todas las reacciones en la física de partículas, al igual que la **conservación del momento angular**. Una cuarta ley de conservación que restringe las posibles reacciones es el de la **conservación de la carga eléctrica**, que nos dice que la carga eléctrica total antes de una reacción debe ser igual a la carga eléctrica total después de la misma. A continuación vamos a discutir algunas leyes de conservación adicionales que son específicas de la física de partículas.

Conservación del número bariónico

A cada barión se le asigna un número cuántico, llamado **número bariónico**, $B = +1$ y cada antibarión tiene $B = -1$. El principio de conservación del número bariónico establece que:

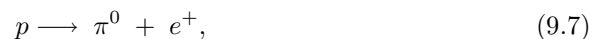
En cualquier reacción de partículas el número bariónico se conserva.

Esto requiere que el número bariónico total antes de una reacción o desintegración sea igual al número bariónico total después de dicho proceso. Como ejemplo de esta ley de conservación podemos considerar la siguiente reacción:



El número bariónico es $B = +2$ antes y después de la producción del antiprotón y, por tanto, esta reacción es posible.

La ley de conservación del número bariónico, junto con la conservación de la energía, implica que el protón, que es el barión más ligero, es estable. Por ejemplo, la reacción:



que no viola las leyes de conservación dinámicas ni la de la carga eléctrica, no puede tener lugar porque viola la ley de conservación del número bariónico.

Conservación del número leptónico

A cada generación de leptones se le asigna un número cuántico, conocido como **número leptónico**. Al electrón y al neutrino electrónico se les asigna $L_e = +1$, y al positrón y al antineutrino electrónico $L_e = -1$. Todas las otras partículas, incluyendo los otros leptones, tienen $L_e = 0$. De forma similar, existe un número leptónico L_μ para la generación muónica y un número leptónico L_τ para la generación de la partícula τ . La ley de conservación del número leptónico establece que:

El número leptónico para cada sabor de los leptones se conserva de forma independiente en toda reacción de partículas.

Para entender cómo funciona la ley de conservación del número leptónico, consideremos las siguientes desintegraciones:

$$p \longrightarrow \pi^0 + e^+, \quad (9.8)$$

$$\mu^+ \longrightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu, \quad (9.9)$$

$$\mu^+ \longrightarrow e^+ + \gamma, \quad (9.10)$$

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e. \quad (9.11)$$

En la primera reacción se conservan la energía, la carga, el momento angular y el momento lineal, pero no ha sido observada. La razón es que viola tanto la conservación del número bariónico B como la del número leptónico L_e . La ec. (9.9) describe la desintegración del μ^+ , que se convierte en un positrón más un neutrino electrónico y un antineutrino muónico. El μ^+ tiene $L_\mu = -1$ y $L_e = 0$. Los productos de la desintegración también tienen $L_\mu = -1$ (el $\bar{\nu}_\mu$) y $L_e = -1 + 1 = 0$ (el e^+ y el ν_e). Por tanto, esta es una reacción posible y, de hecho, ha sido observada experimentalmente. La desintegración de la ec. (9.10) ha sido buscada por muchos grupos, pero no ha sido observada. Su ausencia fue el primer indicador de que los números L_e y L_μ se conservan por separado. La ec. (9.11) muestra la desintegración de un neutrón libre, donde se conserva tanto B como L_e . La conservación del número leptónico implica que el neutrino emitido en la desintegración beta del neutrón libre es un antineutrino electrónico.

Ejemplo 9.2: ¿Qué leyes de conservación se violan (si es que se viola alguna) en las siguientes desintegraciones? (a) $n \longrightarrow p + \pi^-$, (b) $\Lambda^0 \longrightarrow \bar{p} + \pi^+$ y (c) $\pi^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$.

Solución. (a) $n \longrightarrow p + \pi^-$. (i) Conservación de la energía: $m_n = 939.6 \text{ MeV}/c^2$, $m_p = 938.3 \text{ MeV}/c^2$ y $m_{\pi^-} = 139.6 \text{ MeV}/c^2$, lo que implica que $m_n > m_p + m_{\pi^-}$ y, por tanto, la energía no se conserva. (ii) Carga eléctrica: $Q_i = 0 = Q_f \Rightarrow$ la carga se conserva. (iii) Número bariónico: $B_i = 1 = B_f \Rightarrow$ el número

bariónico se conserva. (iv) Número leptónico: $L_i = 0 = L_f \Rightarrow$ (para las tres generaciones) el número leptónico se conserva.

(b) $\Lambda^0 \longrightarrow \bar{p} + \pi^+$. (i) Como $m_{\Lambda^0} = 1116 \text{ MeV}/c^2$, $m_{\bar{p}} = 938.3 \text{ MeV}/c^2$ y $m_{\pi^+} = 139.6 \text{ MeV}/c^2$, la energía se conserva. (ii) La carga eléctrica se conserva ($Q_i = 0 = Q_f$). (iii) El número bariónico no se conserva: $B_i = 1$ y $B_f = -1$. (iv) El número leptónico se conserva (la reacción no involucra leptones).

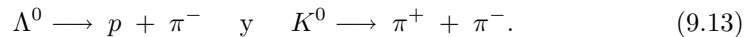
(c) $\pi^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$. (i) Teniendo en cuenta que $m_{\pi^-} = 139.6 \text{ MeV}/c^2$, $m_{\mu^-} = 105.659 \text{ MeV}/c^2$ y el antineutrino no tiene prácticamente masa, la energía se conserva en esta desintegración. (ii) La carga eléctrica se conserva ($Q_i = -1 = Q_f$). (iii) El número bariónico se conserva: $B_i = 0 = B_f$. (iv) El número leptónico de muón se conserva: $L_\mu^{(i)} = 0 = L_\mu^{(f)}$. Como se satisfacen todas las leyes de conservación, esta desintegración es posible. \square

Más leyes de conservación: extrañeza

Existen leyes de conservación que no son universales, sino que sólo se aplican a ciertos tipos de interacciones. En particular, hay magnitudes que se conservan en desintegraciones y reacciones que ocurren por vía de la interacción fuerte, pero no en aquellos procesos que tienen lugar por vía de la interacción débil. Una de estas magnitudes particularmente importante es la **extrañeza**, introducida por M. Gell-Mann y K. Nishijima en 1952 para explicar el comportamiento de algunos bariones y mesones pesados. Consideremos la reacción



El protón y el pión interactúan por medio de la interacción fuerte. Tanto el Λ^0 como el K^0 se desintegran en hadrones



Sin embargo, los tiempos de desintegración de ambos, Λ^0 y K^0 , son del orden de 10^{-10} s, lo cual es característico de la interacción débil, en lugar de 10^{-23} s, típico de la interacción fuerte. Otras partículas que muestran una conducta semejante fueron llamadas **partículas extrañas**. Estas partículas se producen siempre por pares y nunca aisladamente, aún cuando se cumplan todas las restantes leyes de conservación. Este comportamiento se explica asignando a estas partículas una nueva propiedad llamada extrañeza. En las reacciones y desintegraciones que se verifican por vía de la interacción fuerte, la extrañeza se conserva. Si se verifican por vía de la interacción débil, la extrañeza cambia en ± 1 . La extrañeza de los hadrones ordinarios, nucleones y piones, se tomó arbitrariamente igual a cero. La extrañeza del K^0 se eligió igual a $+1$. La extrañeza del Λ^0 debe ser entonces -1 para que esta magnitud se conserve en la reacción de la ec. (9.12). La extrañeza de otras partículas puede asignarse observando sus distintas reacciones y desintegraciones. En aquellas que tienen lugar por vía de la interacción débil, la extrañeza puede cambiar en ± 1 .

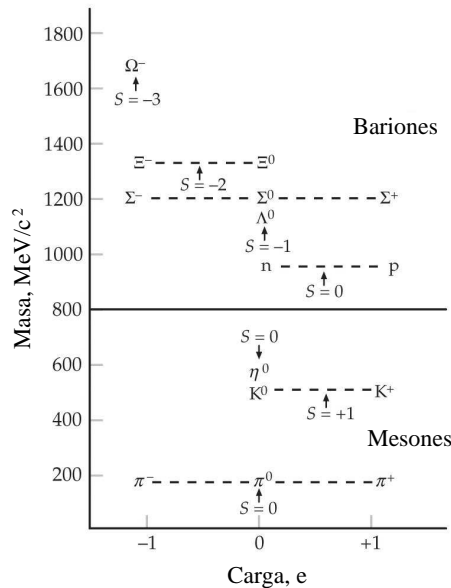


Fig. 9.1 La extrañeza de los hadrones se muestra en un gráfico de la masa en función de la carga.

La Fig. 9.1 muestra las masas de los bariones y mesones que son estables frente a la desintegración por vía de la interacción fuerte en función de su extrañeza. La figura muestra que estas partículas se agrupan en multipletes de una, dos o tres partículas de masa aproximadamente igual y que la extrañeza de un multiplete de partículas está relacionada con el centro de carga del multiplete.

Ejemplo 9.3: Determinar si las siguientes desintegraciones pueden ocurrir por vía de la interacción fuerte, de la interacción débil o no pueden ocurrir de ningún modo: (a) $\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0$ y (b) $\Xi^0 \rightarrow n + \pi^0$.

Solución. (a) $\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0$. Exploremos las diversas leyes de conservación. (i) Carga eléctrica: $Q_i = 1 = Q_f$, se conserva. (ii) Número bariónico: $B_i = 1 = B_f$, se conserva. (iii) Número leptónico: $L_i = L_f = 0$ (para las tres generaciones), se conserva. (iv) Extrañeza: $S_i = -1$, $S_f = 0$, no se conserva. Como $\Delta S = S_f - S_i = +1$, la desintegración se debe a la interacción débil.

(b) $\Xi^0 \rightarrow n + \pi^0$. Se conservan la carga eléctrica, el número bariónico y el número leptónico. Extrañeza: $S_i = -2$, $S_f = 0$, no se conserva. Como $\Delta S = S_f - S_i = +2$, la desintegración no es posible. \square

Es importante remarcar que los números cuánticos y las correspondientes leyes de conservación de los hadrones surgen de forma lógica de la combinación de los llamados *números cuánticos internos* de los quarks. Estos números se pueden ver en la Tabla 9.4. Estos números cuánticos son la carga Q , el número bariónico B , la extrañeza S , el encanto (o charm) C , el bottomness B' y el topness T . En la próxima

Tabla 9.4 Números cuánticos internos de los quarks.

Quark	Q	B	U	D	C	S	T	B'
u	2/3	1/3	1	0	0	0	0	0
d	-1/3	1/3	0	-1	0	0	0	0
c	2/3	1/3	0	0	1	0	0	0
s	-1/3	1/3	0	0	0	-1	0	0
t	2/3	1/3	0	0	0	0	1	0
b	-1/3	1/3	0	0	0	0	0	-1

Q = carga, B = número bariónico, U = upness, D = downness, C = charmness, S = extrañeza, T = topness, B' = bottomness.

sección veremos que el hecho de que un hadrón posea una extrañeza distinta de cero tiene que ver con el hecho de que está compuesto por uno o más quarks extraño. La carga y el número bariónico de los quarks se conservan en todas las interacciones. La extrañeza, el encanto (o charmness), el bottomness y el topness se conservan en la interacción fuerte y en la electromagnética, pero no se conservan en la interacción débil.

9.4 Detección de partículas elementales

Cuando repasamos las propiedades de las partículas elementales vemos que la mayor parte de ellas son inestables y tienen tiempos de vida media incluso por debajo de 10^{-20} s. En este sentido, uno se pregunta cómo es posible detectar estas partículas y medir sus propiedades básicas. El objeto de esta sección es contestar esta pregunta en términos sencillos.

La mayor parte de las partículas elementales son creadas en colisiones de alta energía que tienen lugar en los aceleradores. En estas colisiones se utilizan habitualmente haces muy energéticos de partículas estables y cargadas como los electrones o los protones, ya que se requiere un tiempo considerable para acelerar las partículas hasta altas energías con campos electromagnéticos. De forma similar, los blancos deben ser simples y estables, y el blanco más simple es hidrógeno, que se suele utilizar tanto de blanco como de detector. En una cámara de burbujas con hidrógeno líquido, que es básicamente un contenedor con hidrógeno cerca de su punto de ebullición, los átomos se ionizan al paso de una partícula cargada dejando un rastro visible de pequeñas burbujas. El hidrógeno líquido también sirve como una fuente eficiente de protones blanco, con una densidad suficiente para asegurar que tengan lugar muchas colisiones con las partículas incidentes en un tiempo razonable.

La Fig. 9.2 muestra un típico evento en el que una cámara de burbujas ha servido tanto de blanco como de detector. En esta figura se pueden apreciar muchas trazas de piones negativos entrando en la fotografía desde abajo. Uno de los piones

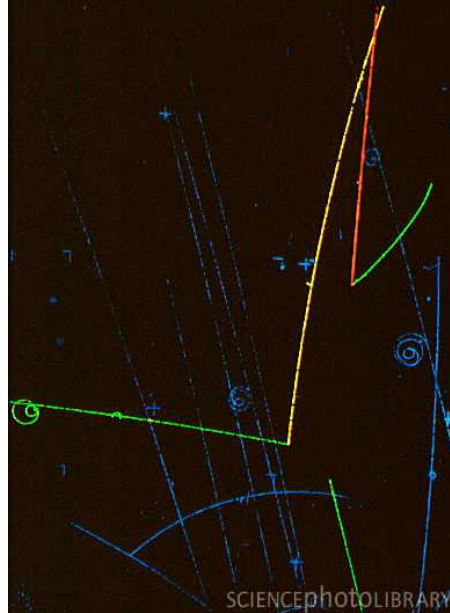
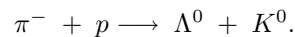


Fig. 9.2 Fotografía de una cámara de burbujas (con colores falseados) que muestra la producción de dos partículas extrañas (partículas que contienen un quark extraño). El pión negativo (línea verde) entra por abajo y interactúa con un protón del líquido que llena la cámara de burbujas y produce dos partículas extrañas: Λ^0 y K^0 . Como estas dos partículas son neutras, no dejan ninguna traza, pero su existencia se hace visible cuando se desintegran. La partícula Λ^0 se convierte en un protón (línea roja) y un pión negativo (línea verde), mientras que el kaón K^0 se desintegra en un pión positivo (línea amarilla) y un pión negativo (línea verde). Las líneas azules son trazas de otras partículas que no están involucradas en esta interacción.

ha chocado con un protón blanco en el hidrógeno y ha producido dos partículas extrañas, Λ^0 y K^0 , de acuerdo con la reacción



Como las partículas extrañas son neutras no dejan trazas en la cámara. Sin embargo, dichas partículas se desintegran en otras partículas cargadas que sí pueden ser detectadas, como se muestra en la Fig. 9.2. Un campo magnético dirigido hacia dentro del plano de la fotografía curva la trayectoria de las partículas cargadas y sus momentos lineales pueden ser determinados a partir de la carga y del radio de curvatura. Si la masa y el momento de la partícula incidente son conocidos, podemos calcular la masa de la partícula producida, su energía cinética y su velocidad usando la conservación de la energía y del momento. Finalmente, combinando la velocidad de la partícula con una medición de la longitud de la traza, se puede calcular también la vida media de la partícula. La Fig. 9.2 muestra que a veces se puede usar esta técnica para medir la vida media de partículas neutras, que no dejan trazas. Siempre y cuando se conozca la velocidad de la partícula, así como el comienzo y el final de la traza, se puede inferir la longitud de la traza “invisible” y

encontrar la vida media de la partícula neutra.

Resonancias

Con técnicas experimentales avanzadas se pueden medir longitudes de trazas de incluso $1 \mu\text{m}$. Esto significa que tiempos de vida media tan pequeños como 10^{-16} s pueden ser medidos con esta técnica en el caso de partículas muy energéticas viajando a velocidades cercanas a la de la luz. Así por ejemplo, si suponemos que un partícula viaja $1 \mu\text{m}$ en el sistema del laboratorio a $0.99c$, tendremos que su tiempo de vida media será $\tau_{\text{lab}} = 10^{-6} \text{m}/0.99c \approx 0.33 \times 10^{-14}$ s. Como el tiempo de vida apropiado es en realidad aquel medido en el sistema propio de la partícula, dicho tiempo τ_{propio} será menor que τ_{lab} en un factor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ y, por tanto, podremos medir realmente tiempos de vida media del orden de:

$$\tau_{\text{propio}} = \tau_{\text{lab}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = (0.33 \times 10^{-14} \text{ s}) \sqrt{1 - \frac{(0.99c)^2}{c^2}} = 4 \times 10^{-16} \text{ s}.$$

Desgraciadamente, todavía estamos varios órdenes de magnitud por encima de un tiempo de vida medio de un hadrón, que es del orden de 10^{-23} s para aquellos que se desintegran vía la interacción fuerte. ¿Cómo podemos entonces detectar la presencia de estas partículas? Como veremos a continuación, las masas, tiempos de vida media y la existencia de estas partículas tan inestables, conocidas como **resonancias**, se pueden inferir de los picos (o resonancias) en las gráficas de la sección eficaz como función de la energía que describen la desintegración de estas partículas.

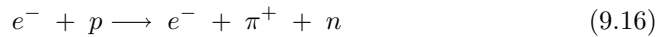
Analizemos esta idea en más detalle considerando el caso de la resonancia (o partícula inestable) conocida como Δ^+ , que tiene una masa de $1231 \text{ MeV}/c^2$ y un tiempo de vida media de 6×10^{-24} s. El Δ^+ se produce en la reacción



que es seguida 6×10^{-24} s después por la desintegración



Como el tiempo de vida media de la partícula Δ^+ es tanto corto, no deja traza visible y podría parecer que la cadena de reacciones dada por las ecs. (9.14) y (9.15) es indistinguible la reacción directa:



donde no se produce la partícula Δ^+ . Afortunadamente, sí que podemos saber si se produjo una partícula Δ^+ midiendo el momento y la energía de los productos de la desintegración que sospechamos (pión y neutrón), y usando la conservación del momento y de la energía podemos ver si esos valores se combinan para dar la masa del Δ^+ ($1231 \text{ MeV}/c^2$).

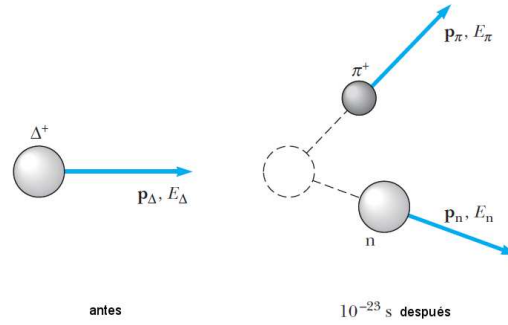


Fig. 9.3 Desintegración de una partícula Δ^+ en un pión positivo y un neutrón.

Para entender esta idea en detalle consideremos la desintegración del Δ^+ mostrada en la Fig. 9.3. La energía y el momento del Δ^+ deben satisfacer la relación

$$E_{\Delta}^2 = (p_{\Delta}c)^2 + (m_{\Delta}c^2)^2 \Rightarrow m_{\Delta}c^2 = \sqrt{E_{\Delta}^2 - (p_{\Delta}c)^2}, \quad (9.17)$$

donde m_{Δ} es la masa del Δ^+ . Aunque no podemos medir directamente E_{Δ} y \vec{p}_{Δ} , ya que la partícula Δ^+ no deja traza visible, podemos medir las energías y momentos de las partículas resultantes, es decir, E_{π} , \vec{p}_{π} , E_n y \vec{p}_n . Usando la conservación de la energía y del momento podemos entonces encontrar una expresión para $m_{\Delta}c^2$ en términos de las cantidades medidas. De este modo, tenemos $E_{\Delta} = E_{\pi} + E_n$ y $\vec{p}_{\Delta} = \vec{p}_{\pi} + \vec{p}_n$, y substituyendo en la ec. (9.17) se obtiene que

$$m_{\Delta}c^2 = \sqrt{(E_{\pi} + E_n) - (\vec{p}_{\pi} + \vec{p}_n)^2 c^2}. \quad (9.18)$$

Esta expresión se satisface para todos los eventos en los que una partícula Δ^+ se forme y se desintegre. Esto es, para todos los valores diferentes de E_{π} , \vec{p}_{π} , E_n y \vec{p}_n que se encuentren en los diversos experimentos, siempre encontraremos el mismo valor para la cantidad $m_{\Delta}c^2 = 1231$ MeV dentro del error experimental, siempre y cuando la desintegración del Δ^+ esté involucrada. Por otra parte, si la desintegración del Δ^+ no ha tenido lugar y la reacción directa $e^- + p \rightarrow e^- + \pi^+ + n$ ha ocurrido, entonces $\sqrt{(E_{\pi} + E_n) - (\vec{p}_{\pi} + \vec{p}_n)^2 c^2}$ no será igual a 1231 MeV, sino que adoptará un amplio rango de valores. El método habitual para mostrar la existencia de la resonancia (o partícula inestable) involucra el cálculo de la cantidad $Z = \sqrt{(E_{\pi} + E_n) - (\vec{p}_{\pi} + \vec{p}_n)^2 c^2}$ para un gran número de eventos en los que un π^+ y un neutrón han sido producidos. Cuando se pinta el valor de Z en forma de histograma, se obtiene una curva que varía lentamente y que tiene picos superimpuestos, que son en realidad la demostración de la existencia de la partícula. La Fig. 9.4 muestra un ejemplo de este tipo de histograma para el Δ^+ . El fondo suave (descrito por una línea de trazos) se debe a eventos en los cuales no se ha creado ninguna partícula Δ^+ , mientras que el pico cerca de $Z = 1230$ MeV, que contiene muchos eventos, se debe a los casos en los que una partícula Δ^+

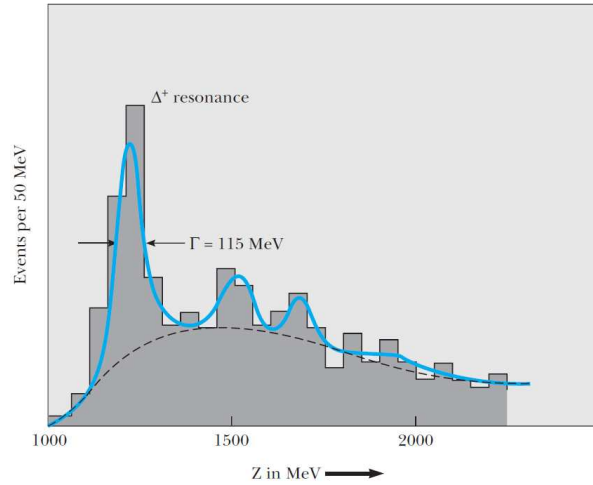


Fig. 9.4 Evidencia experimental de la existencia de la partícula Δ^+ . El pico cerca de 1230 MeV se debe a eventos donde se ha formado una partícula Δ^+ y se ha desintegrado a continuación dando lugar a un pión y a un neutrón.

se ha formado primero y se ha desintegrado después en un pión y en un neutrón. Los otros picos que se pueden ver en la figura corresponden a otras resonancias o partículas más masivas que la Δ^+ .

Histogramas como el de la Fig. 9.4 nos dan información no sólo sobre la masa de las partículas inestables sino también sobre el tiempo de vida de la partícula, que se puede inferir de la anchura de los picos, denotada por Γ en la Fig. 9.4. La anchura Γ es igual a dos veces la incertidumbre en la energía en reposo de la partícula Δ^+ , ($\Gamma = 2\Delta E$), y podemos usar el principio de incertidumbre energía-tiempo, $\Delta E \Delta t \approx \hbar/2$, para inferir el tiempo de vida media de la partícula, Δt

$$\Delta t \approx \frac{\hbar}{2\Delta E} = \frac{\hbar}{\Gamma}. \quad (9.19)$$

El valor medido de Γ es de 115 MeV, lo que nos da un tiempo de vida media de

$$\Delta t \approx \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{6.6 \times 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s}}{115 \times 10^6 \text{ eV}} = 5.7 \times 10^{-24} \text{ s}. \quad (9.20)$$

Nótese que en este tiempo de vida tan corto, incluso si la partícula Δ^+ se moviera a la velocidad de luz, sólo podría viajar una distancia del orden de 10^{-15} m, que es del orden de un diámetro nuclear.

Consideraciones energéticas en la producción de partículas

Otro aspecto importante en la producción de partículas elementales es el de la energía mínima (o energía umbral) que se requiere para llevarla a cabo. A continuación vamos a determinar dicha energía y para ello analizaremos el siguiente proceso de

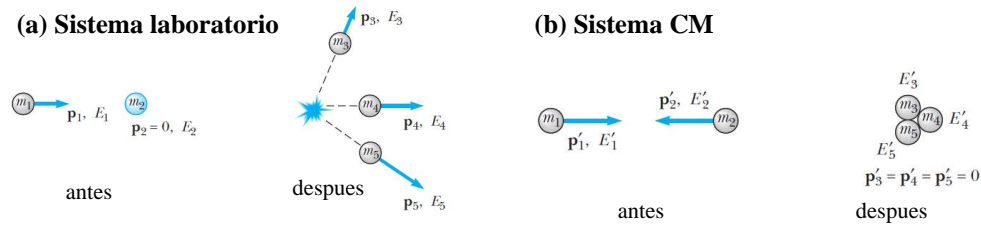
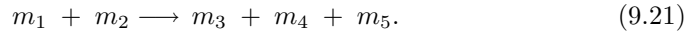


Fig. 9.5 (a) La reacción $m_1 + m_2 \longrightarrow m_3 + m_4 + m_5$ vista desde el sistema de referencia del laboratorio, donde m_2 está inicialmente en reposo y las energías son las energías totales relativistas (cinética más energía en reposo). (b) La misma reacción, pero vista desde el sistema de referencia del centro de masas y suponiendo que m_1 tiene la energía cinética umbral requerida para producir m_3, m_4 y m_5 . En este caso las partículas 3, 4 y 5 se crean en reposo.

producción de partículas:



En este caso, m_1 es la masa de la partícula incidente, m_2 es la masa de la partícula blanco que se encuentra en reposo en el sistema del laboratorio y m_3, m_4 y m_5 son las masas de los productos de la reacción. La Fig. 9.5(a) muestra esta reacción desde el punto de vista del sistema de referencia del laboratorio. A primera vista, uno podría pensar que la energía total de m_1 y m_2 , es decir, $E_1 + E_2$, se podría convertir completamente en la energía en reposo de las partículas 3, 4 y 5. Sin embargo, ya sabemos que parte de la energía inicial se debe utilizar para conservar el momento total de la colisión. Esto significa que no toda la energía inicial se puede emplear en crear las nuevas partículas. La cuestión ahora es averiguar cuanto de la energía se puede utilizar en crear las masas m_3, m_4 y m_5 . En definitiva, queremos calcular la energía cinética mínima o **energía cinética umbral** K_u que m_1 debe tener para crear las partículas con masas m_3, m_4 y m_5 y conservar el momento lineal total de la reacción.

Una pista importante para encontrar K_u es darse cuenta de que si pudieramos arreglar las cosas para tener un momento inicial nulo, toda la energía inicial se podría utilizar en crear las nuevas partículas. Así pues, lo que podemos hacer es determinar primero K_u en el sistema de referencia del centro de masas y después transformar el resultado al sistema de referencia del laboratorio. La Fig. 9.5(b) muestra la reacción que estamos considerando, pero ahora desde el punto de vista del sistema de referencia del centro de masas y suponiendo además que la partícula 1 tiene justo la energía cinética umbral K_u , lo que implica que las partículas creadas están en reposo.

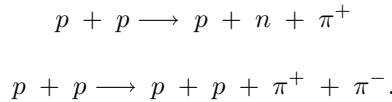
Para determinar la expresión de K_u podemos hacer uso de la invariancia de la cantidad $E^2 - p^2 c^2$ que se discute en problema 2.39. Esta cantidad vale lo mismo en todos los sistemas de referencia inerciales y su uso nos permite relacionar la energía y el momento en el sistema del centro de masas (CM) con los del sistema del laboratorio (lab) del siguiente modo:

$$E_{\text{CM}}^2 - p_{\text{CM}}^2 c^2 = E_{\text{lab}}^2 - p_{\text{lab}}^2 c^2. \quad (9.22)$$

Aquí, E y p corresponden a la energía y al momento totales de las partículas m_1 y m_2 . Teniendo en cuenta que $p_{\text{CM}} = 0$ y que $E_{\text{CM}} = (m_3 + m_4 + m_5)c^2$ (ya que las partículas se crean en reposo), es fácil demostrar (ver problema 2.40) que la energía umbral que andamos buscando se puede expresar como

$$K_u = \frac{(m_3 + m_4 + m_5)^2 c^2 - (m_1 + m_2)^2 c^2}{2m_2} \quad (9.23)$$

Ejemplo 9.4: Los piones se pueden crear en las colisiones entre protones. Dos ejemplos son las reacciones:



Calcular la energía cinética umbral para estas reacciones.

Solución. Usando las masas en reposo de estas partículas (ver Tabla 9.1) y la ec. (9.23), se obtiene que $K_u \approx 292$ MeV para la primera reacción y $K_u \approx 600$ MeV para la segunda. \square

9.5 El modelo estándar

El **Modelo Estándar** es actualmente (desde 1978) la teoría aceptada de la física de partículas elementales. Este modelo incluye el *modelo de quarks* de la estructura de los hadrones, la teoría unificada de las interacciones débil y electromagnética, llamada la *teoría electrodébil*, y su análogo para la interacción fuerte que se conoce con el nombre de *cromodinámica cuántica*. En esta sección discutiremos de forma cualitativa estas tres piezas que constituyen la base del modelo estándar.

9.5.1 El modelo de quarks

El avance más importante respecto a la comprensión de las partículas elementales ha sido el modelo de quarks propuesto por Gell-Mann y G. Zweig en 1963, según el cual todos los hadrones están formados por combinaciones de dos o tres quarks. En el modelo original había tres tipos de quarks asociados a distintos sabores con los símbolos u , d y s (up, down y strange). Una propiedad no usual de los quarks es que poseen cargas fraccionarias. La carga del quark u es $+(2/3)e$ y la de los quarks d y s es $-(1/3)e$. Cada quark tiene espín $1/2$ y número bariónico $1/3$. La extrañeza de los quarks u y d es 0 y la del quark s es -1 . Cada quark tiene un antiquark con carga eléctrica, número bariónico y extrañeza de signo opuesto. Los bariones constan de tres quarks (o tres antiquarks para las antipartículas), mientras los mesones constan de un quark y un antiquark, lo que les da un número bariónico $B = 0$. El protón consta de la combinación uud y el neutrón, udd . Los bariones de extrañeza $S = -1$ contienen un quark s .

La fortaleza del modelo de los quarks reside en que todas las combinaciones permitidas de tres quarks o de pares quark-antiquark dan lugar a todos los hadrones conocidos. Mediante experimentos de dispersión de alta energía (*dispersión inelástica profunda*) se ha conseguido poner de manifiesto la existencia de los quarks dentro de un nucleón. En estos experimentos, un nucleón se bombardea con electrones, muones, o neutrinos de energías entre 15 y 200 GeV. Los análisis de las partículas bombardeantes dispersadas a grandes ángulos indican la existencia dentro del nucleón de 3 partículas de espín $1/2$ de tamaño mucho más pequeño que el del nucleón. Estos experimentos son análogos a la dispersión de Rutherford de partículas alfa por parte de átomos, mediante la cual se demostró la presencia del pequeñísimo núcleo atómico, gracias a la dispersión de ángulo grande de las partículas bombardeantes.

En 1967 se propuso un cuarto quark para explicar ciertas discrepancias entre los datos experimentales de unos ritmos de desintegración y los cálculos teóricos basados en el modelo de quarks. Este cuarto quark se denominó **charm** (encanto) y se denota con el símbolo c . Como la extrañeza, la propiedad charm (o charmness) se conserva en las interacciones fuertes, pero cambia en ± 1 en las interacciones débiles. En 1974 se descubrió un nuevo mesón pesado llamado partícula J/ψ , cuyas propiedades eran las de una combinación $c\bar{c}$. Desde entonces se han descubierto otros mesones con combinaciones tales como $c\bar{d}$ y $\bar{c}d$, así como bariones que contienen el quark encanto. Durante los años 1970 se propusieron dos nuevos quarks llamados top, t , y bottom, b . En 1977 se descubrió un nuevo mesón masivo llamado mesón Y , al que se le atribuyó la estructura $b\bar{b}$. El quark top fue observado por primera vez en 1995.

Uno de los problemas del modelo original de quarks era que era inconsistente con el principio de exclusión de Pauli. Por ejemplo, la partícula $\Delta^{++}(1232)$ tiene un espín $3/2$ y de este modo tiene tres quarks u con los mismos números cuánticos. La solución la propuso O.W. Greenberg, quien postuló que cada quark (sabor) viene en tres colores. La carga de color de un quark tiene tres posibles valores: rojo, azul y verde. En todas las partículas existentes, estos tres colores se combinan de modo que la partícula no tiene color: (i) la cantidad de color es cero (esto es lo que ocurre en los mesones) o (ii) hay cantidades iguales de los tres colores (esto es lo que ocurre en los bariones).

Ejemplo 9.5: ¿Cuáles son las propiedades de las partículas formadas por los siguientes quarks? (a) $u\bar{d}$, (b) $\bar{u}d$, (c) dds y (d) uss .

Solución. (a) La partícula formada por la combinación de quarks $u\bar{d}$ tiene una carga eléctrica $Q/e = 2/3 + 1/3 = 1$. Como es una combinación de quark y antiquark se trata de un mesón y, por tanto, tiene espín $S = 0$. Esta partícula se trata de un π^+ .

(b) Carga eléctrica: $Q/e = -1$; mesón; $S = 0$. La partícula es un π^- .

(c) Carga eléctrica: $Q/e = -1/3 - 1/3 - 1/3 = -1$; barión; $S = -1$. La partícula es un Σ^- .

Tabla 9.5 Composición de quarks de algunos hadrones seleccionados.

Barión	Quark	Mesón	Quark
p	uud	π^+	$u\bar{d}$
n	udd	π^-	$\bar{u}d$
Λ^0	uds	K^+	$u\bar{s}$
Δ^{++}	uuu	K^0	$d\bar{s}$
Σ^+	uus	\bar{K}^0	$s\bar{d}$
Σ^0	uds	K^-	$s\bar{u}$
Σ^-	dds	K^-	$s\bar{u}$
Ξ^0	uss	D^+	$c\bar{d}$
Ξ^-	dss	D^0	$c\bar{u}$
Ω^-	sss	D_s^+	$c\bar{s}$
Λ_c^-	udc	B^+	$u\bar{b}$
Σ_c^{++}	uuc	\bar{B}^0	$d\bar{b}$
Σ_c^+	udc	B^0	$d\bar{b}$
Ξ_c^+	usc	B^-	$\bar{u}b$

(d) Carga eléctrica: $Q/e = 2/3 - 1/3 - 1/3 = 0$; barión; $S = -2$. La partícula es un Ξ^0 . \square

En la Tabla 9.5 se presentan algunos ejemplos de las combinaciones de quarks que dan lugar a diversos hadrones (tanto bariones como mesones).

Ejemplo 9.6: Describir la desintegración beta de un neutrón libre en términos de una reacción entre quarks.

Solución. La desintegración de un neutrón libre viene dado por

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e,$$

que teniendo en cuenta la composición del neutrón y del protón en términos de quarks se puede escribir como

$$udd \longrightarrow uud + e^- + \bar{\nu}_e.$$

De este modo, vemos que debido a la interacción débil un quark d se ha convertido en un quark u . Esta interacción está mediada por la partícula W^- que finalmente se desintegra en un electrón y en un antineutrino electrónico. \square

9.5.2 Cromodinámica cuántica (QCD)

La **cromodinámica cuántica (QCD)** es la moderna teoría que describe la interacción fuerte entre quarks. Como ya dijimos, la partícula que media la interacción fuerte quark-quark es el gluón. Los gluones poseen carga de color. De hecho, los gluones tienen una unidad de carga de color y otra de carga de anticolor. Esto hace

que los quarks puedan cambiar de color, pero no de sabor, por medio de la interacción fuerte. Como los gluones tienen carga de color, también sufren la interacción fuerte.

La interacción entre gluones hace que a muy cortas distancias ($< 10^{-18}$ m) la interacción entre los quarks se anule y estos se mueven como partículas libres. Esta propiedad recibe el nombre de *libertad asintótica*. Uno de los posibles potenciales para la interacción fuerte tiene la forma:

$$V_{\text{QCD}}(r) = -\frac{4\alpha_s}{3r} + kr. \quad (9.24)$$

Esto implica que a grandes distancias la fuerza entre quarks se hace constante, en lugar de irse a cero. Esto impide que los quarks se alejen los unos de los otros, permaneciendo en el interior de los hadrones. A este fenómeno se lo conoce con el nombre de *confinamiento de los quarks*.

9.5.3 La teoría electrodébil

En la **teoría electrodébil**, las interacciones débil y electromagnética se consideran como dos manifestaciones distintas de una interacción más fundamental, la electrodébil. A energías muy grandes ($\gg 100$ GeV), la interacción electrodébil tiene como mediadores cuatro bosones. Por consideraciones de simetría, estos bosones deberían ser un triplete formado por W^+ , W^0 y W^- , todas de igual masa, y un singlete B^0 de masa distinta. Tanto W^0 como B^0 no serían observables directamente, pero una combinación lineal de W^0 y B^0 daría lugar al Z^0 y otra daría lugar al fotón. A energías ordinarias, la simetría se rompe y se produce la separación de la interacción electromagnética mediada por el fotón sin masa y la interacción débil mediada por las partículas W^+ , W^- y Z^0 . El hecho de que el fotón carezca de masa y que las partículas W y Z tengan masas del orden de $100 \text{ GeV}/c^2$ muestra que la simetría supuesta en la teoría electrodébil no existe a bajas energías.

El mecanismo de ruptura de la simetría se denomina *mecanismo de Higgs*, el cual requiere un nuevo bosón, el *bosón de Higgs*, cuya energía en reposo se cree que es del orden de 1 TeV. El bosón de Higgs no ha sido detectado todavía y su descubrimiento es uno de los grandes objetivos del acelerador LHC en el CERN.

9.6 Más allá del modelo estándar

El modelo estándar ha sido hasta ahora tremendamente exitoso explicando las observaciones experimentales. Sin embargo, recientes experimentos (relacionados con la física de neutrinos), así como argumentos teóricos, indican que este modelo no es completo. Para acabar este capítulo, describiremos en esta sección algunas de las ideas básicas que se están explorando para generalizar el modelo estándar. En particular, comenzaremos con una breve discusión de los experimentos recientes sobre neutrinos que ya han mostrado la necesidad de modificar dicho modelo.

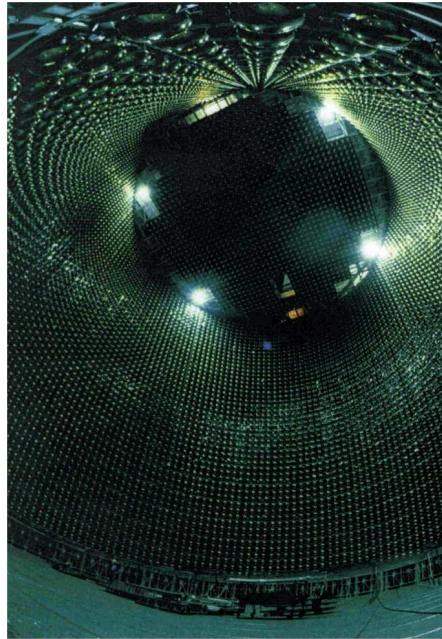
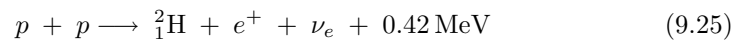


Fig. 9.6 El detector Super-Kamiokande, construido en Japón en 1996 para un experimento conjunto japonés-estadounidense, consiste en un tanque de agua del tamaño de una gran catedral instalado en una mina de zinc a una milla de profundidad dentro de una montaña. Cuando los neutrinos atraviesan el tanque, uno de ellos puede chocar con un átomo produciendo una luz azulada que se registra mediante una red de detectores. Esta es la imagen de una pared y de la cubierta del detector, con unos 9000 fotomultiplicadores para registrar el paso de los neutrinos. Los resultados experimentales registrados en junio de 1998 indican que la masa del neutrino no puede ser cero.

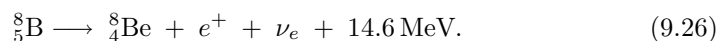
9.6.1 *Neutrinos masivos*

Experimentos recientes realizados en el “Sudbury Neutrino Observatory” (SNO) en Canadá y en el detector Super-Kamiokande de Japón (ver Fig. 9.6) han mostrado de forma concluyente que los neutrinos pueden cambiar de un tipo (o sabor) a otro y que éstos poseen una masa finita, contrariamente a lo que se creía desde los tiempos de Wolfgang Pauli. Estos descubrimientos, además, han ayudado a resolver un antiguo problema (*el problema de los neutrinos solares*) relacionado con la producción de energía en el sol.

La luz del sol que recibimos en la tierra está acompañada por billones de neutrinos por centímetro cuadrado y por segundo. En particular, neutrinos electrónicos son producidos en las reacciones de fusión en el núcleo del sol en reacciones como



y la desintegración del boro



Medidas del flujo de ν_e procedentes del sol realizadas en los años 1960 mostraron que sólo llegan a la tierra un tercio de los neutrinos esperados en el modelo estándar del sol. Durante muchos años no se supo si estos resultados debían interpretarse como que nuestro modelo de generación de energía en sol era incorrecto, o que había algún problema en el modelo estándar de partículas, en el sentido de que no describe correctamente la física de los neutrinos. Una de las soluciones que se propuso para este misterio fue que quizá algunos de los neutrinos electrónicos podían convertirse en neutrinos muónicos o tauónicos durante su viaje desde el sol a la tierra, y estos neutrinos (ν_μ y ν_τ) no habrían sido detectados por los experimentos originales porque estaban diseñados para detectar exclusivamente neutrinos electrónicos. Nótese que esta propuesta significa, en particular, que el número leptónico no se conserva en estos procesos.

La idea básica es que el cambio de un ν_e a, digamos, un ν_μ no sería permanente, sino que sería sólo parte de una oscilación entre ν_e y ν_μ (conversión periódica de uno a otro). Algo muy importante es que la frecuencia de oscilación dependería de las masas de los neutrinos. De este modo, una medida de la frecuencia de las **oscilaciones de neutrino** podría de forma indirecta determinar las masas de los neutrinos, que son muy pequeñas y difíciles de medir de forma directa. Podemos pensar que cada sabor (o tipo) de neutrino (ν_e , ν_μ y ν_τ) es una combinación lineal de otros tres neutrinos ν_1 , ν_2 y ν_3 , cada uno con una masa diferente y con una energía distinta dada por su momento lineal. Ya que la dependencia temporal de cada estado ν_1 , ν_2 , ν_3 es oscilatoria y tiene la forma $\exp(-iEt/\hbar)$, con el tiempo los estados ν_1 , ν_2 , ν_3 pueden interferir entre ellos, produciendo una oscilación entre los diversos sabores. En el problema avanzado 41 al final de este capítulo se explora cómo calcular la probabilidad de que un ν_μ oscile (o se convierta) a un ν_τ .

Los últimos descubrimientos en el SNO, que ahora usa una técnica nueva de detección sensible a los neutrinos de los tres tipos, muestran claramente que los neutrinos electrónicos “péridos” se deben a oscilaciones a neutrinos muónicos y tauónicos. Los nuevos planes de este detector son estudiar cómo dependen las oscilaciones de neutrino del paso de estas partículas a través de la materia.

9.6.2 Teorías de gran unificación y supersimetría

A pesar de los grandes éxitos del modelo estándar, aún existen preguntas muy fundamentales por responder. Por ejemplo, aún no comprendemos por qué hay cuatro interacciones fundamentales en la naturaleza y por qué éstas son tan distintas. El éxito de la teoría electrodébil unificando la interacción débil y el electromagnetismo ha animado a muchos investigadores a tratar de unificar esas dos fuerzas con, al menos, la interacción fuerte, y con la gravedad como último gran objetivo. A estas teorías se las conoce con el nombre de **teorías de gran unificación** (GUT).² Como en la teoría electrodébil, las diferentes intensidades de las interacciones a energías

²GUT proviene de *grand unification theory*.

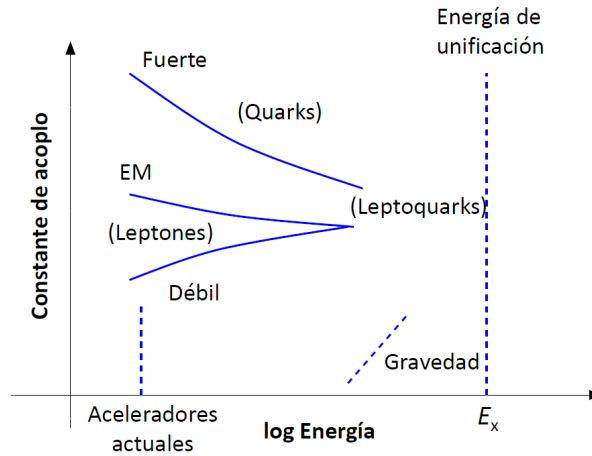


Fig. 9.7 Las constantes de acoplamiento de las cuatro interacciones fundamentales parecen aproximarse a un valor común a una energía en el rango de 10^{18} GeV. Como la energía disponible en el acelerador más potente que existe (LHC) sólo puede alcanzar del orden de 14 TeV, la extrapolación a la energía de unificación E_x es muy incierta.

muy por debajo de las energías en reposo de los bosones mediadores se explicarían en términos de una rotura espontánea de simetría. Estas teorías también explicarían la igualdad de la carga del electrón y del protón.

Una idea central de las GUTs es que las constantes de acoplamiento de las cuatro interacciones se aproximan al mismo valor, que corresponde aproximadamente al valor de la constante de estructura fina α , a muy altas energías. Es notable que los valores experimentales de los que disponemos hasta ahora realmente muestran que los valores de las constantes de acoplamiento parecen tender a un mismo valor a medida que aumenta la energía. Desgraciadamente, para que converjan los diversos valores de las constantes de acoplamiento debemos extrapolar los resultados existentes sobre muchos órdenes de magnitud. De hecho, la energía de unificación (donde convergerían las diversas constantes de acoplamiento) sería del orden de 10^{16} GeV, a comparar con los 10^4 GeV que se pueden alcanzar en el LHC del CERN, ver Fig. 9.7. Es difícil de creer que no haya sorpresas (en forma de física nueva) en el enorme rango de energías entre las energías alcanzables actualmente en los acelerados de partículas y la energía de unificación.

Un gran número de GUTs incluyen una nueva simetría, a parte de las simetrías subyacentes en el modelo estándar, que se conoce con el nombre de **supersimetría** (y se usa el acrónimo SUSY). Esta simetría asigna a cada partícula elemental un *supercompañero*. El supercompañero es idéntico a la partícula original, salvo por el espín. Los leptones y los quarks, ambos fermiones con espín $1/2$, tienen supercompañeros con espín 0. Los bosones de espín 1 tienen como supercompañeros a fermiones de espín $1/2$. Los supercompañeros de los fermiones reciben nombres

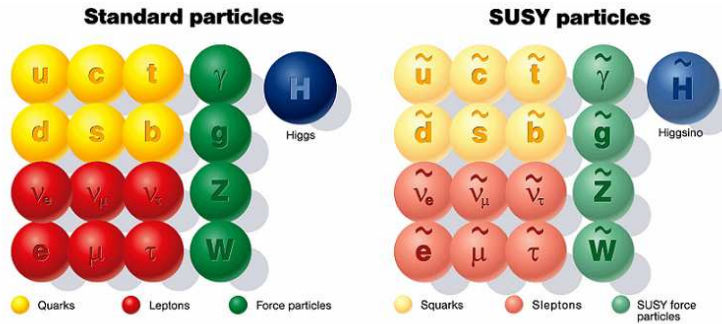


Fig. 9.8 Partículas elementales y sus supercompañeros (o compañeros supersimétricos).

similares, pero con el prefijo “s”. Por ejemplo, el supercompañero del electrón es conocido por el nombre selectrón. Los supercompañeros de los bosones tienen nombres con sufijos “ino”. Así por ejemplo, el supercompañero del gluón es el gluino. Las partículas y sus supercompañeros se muestran en la Fig. 9.8.

Si la supersimetría fuera exacta, las masas de las partículas y sus supercompañeros serían iguales. Sin embargo, esto no resulta ser así, de lo contrario estas nuevas partículas habrían sido detectadas hace mucho tiempo. De este modo, SUSY se modifica para tener en cuenta esta ausencia de partículas ligeras estableciendo que los supercompañeros más ligeros tendrían masas del orden de las masas de las partículas W^\pm y Z^0 . Con estos ajustes, SUSY predice que la energía de unificación es próxima a los valores que se obtienen de la extrapolación de los datos conocidos, predice que el protón tiene una vida media que está de acuerdo con las cotas mínimas establecidas por los experimentos y predice un valor de la constante de acoplamiento unificada de acuerdo con las teorías GUT. Un objetivo muy importante del *Large Hadron Collider* (LHC) en el CERN es comprobar las predicciones de las teorías supersimétricas. Digamos por último que SUSY es también un ingrediente importante en las teorías de cuerdas que discutiremos a continuación.

9.6.3 Teoría de cuerdas

La **teoría de cuerdas** representa un esfuerzo por unificar las cuatro interacciones fundamentales modelando todas las partículas como los modos de vibración de una única entidad, una cuerda increíblemente pequeña. La longitud de esa cuerda sería del orden de 10^{-35} m, conocida como la **longitud de Planck**. En la teoría de cuerdas, los modos de vibración de la cuerda estarían cuantizados y corresponderían a las diferentes partículas del modelo estándar.

Una de las complicaciones de la teoría de cuerdas es que requiere que el espacio-tiempo tenga 10 dimensiones. A pesar de las dificultades teóricas y conceptuales de tratar con 10 dimensiones, la teoría de cuerdas es muy prometedora porque

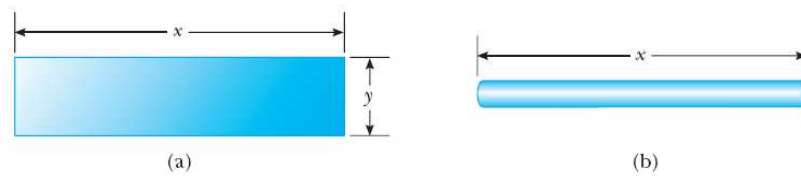


Fig. 9.9 (a) Un trozo de papel se corta en una forma rectangular. Como rectángulo, la forma tiene dos dimensiones. (b) El papel se enrolla en una pajita. Desde lejos, la pajita parece ser unidimensional. La dimensión enrollada (o compactificada) no es visible cuando se observa la pajita desde una distancia mucho mayor que el diámetro de la pajita.

incorpora la gravedad junto con las otras fuerzas fundamentales. Cuatro de las 10 dimensiones son visibles para nosotros y las otras 6 estarían “compactificadas”, es decir, las 6 dimensiones extra estarían enrolladas de una forma tan compacta que no serían visibles en el mundo macroscópico.

Para entender el concepto de compactificación, consideremos el ejemplo de una pajita de refresco. Podemos construir una pajita cortando una pieza rectangular con una hoja de papel, que tiene dos dimensiones (ver Fig. 9.9(a)), y enrollándola en un pequeño tubo (ver Fig. 9.9(b)). Desde lejos la pajita aparece como una línea recta unidimensional. La segunda dimensión ha sido enrollada y no es visible. La teoría de cuerdas nos dice que las 6 dimensiones extra han sido enrolladas de forma análoga y poseen un tamaño del orden de la longitud de Planck, lo que las hace invisibles desde nuestro punto de vista.

Otra complicación relacionada con la teoría de cuerdas es que es muy difícil hacer predicciones que sean comprobables experimentalmente. La longitud de Planck es tan pequeña que es imposible diseñar experimentos que prueben de forma directa la existencia de cuerdas. Así pues, la aplicación de las teorías de cuerdas se restringe de momento a comparar con los resultados conocidos para comprobar su consistencia interna. Mencionemos para acabar, que muchos teóricos están trabajando hoy en día en la llamada **teoría M**, que es una teoría en 11 dimensiones basada en membranas, en lugar de en cuerdas.

9.7 Bibliografía recomendada

Este capítulo está basado en las siguientes tres referencias:

- Capítulo 41 de “Física para la ciencia y la tecnología, Vol. 2C” (5ª edición) de Tipler y Mosca, editorial Reverté.
- Capítulo 12 de “Modern Physics” (5th edition) de Tipler y Llewellyn, W.H. Freeman.
- Capítulo 15 de “Modern Physics” (3rd edition) de R.A. Serway, C.J. Moses and C.A. Moyer, Thomson/Brook Cole (2005).

Tanto el libro de Tipler y Llewellyn como el Serway y compañía contienen una discusión más detallada que la nuestra sobre diversos temas, pero en particular sobre el modelo de quarks y algunas leyes de conservación relacionadas con los número cuánticos de los hadrones.

Para aquellos que quieran aprender más acerca de la fascinante historia de la física de partículas, les recomiendo encarecidamente el libro de divulgación del profesor Yndurain (antiguo profesor de nuestra universidad que falleció recientemente):

- “Electrones, neutrinos y quarks”, Francisco José Yndurain, Crítica 2006.

Otro libro tremendamente didáctico y muy recomendable para un estudiante de física que comienza el grado es:

- “Quarks, Leptons and the Big Bang” (2nd edition), Jonathan Allday, IOP Publishing.

9.8 Ejercicios del Capítulo 9

Cuestiones

- (1) Cuando un protón o un pión de alta energía que se desplaza casi a la velocidad de la luz choca contra un núcleo, recorre una distancia de 3×10^{-15} m antes de interactuar. Con esta información, calcular el tiempo necesario para que ocurra la interacción fuerte.
- (2) El mesón neutro ρ^0 se desintegra por la interacción fuerte en dos piones según $\rho^0 \longrightarrow \pi^+ + \pi^-$, con una vida media aproximada de 10^{-23} s. El mesón neutro K^0 también se desintegra en dos piones según $K^0 \longrightarrow \pi^+ + \pi^-$, pero con una vida media mucho más larga de aproximadamente 10^{-10} s. ¿Cómo se explica esta diferencia tan grande en las vidas medias?
- (3) Dos piones en reposo se aniquilan según la reacción $\pi^+ + \pi^- \longrightarrow \gamma + \gamma$. (a) ¿Por qué deben ser iguales las energías de los dos rayos γ ? (b) Determinar la energía de cada rayo γ . (c) Determinar la longitud de onda de cada rayo γ .
- (4) Determinar la energía mínima del fotón necesaria para las siguientes reacciones de producción de pares: (a) $\gamma \longrightarrow \pi^+ + \pi^-$, (b) $\gamma \longrightarrow p + p^-$ y (c) $\gamma \longrightarrow \mu^+ + \mu^-$.
- (5) Cuando un protón y un antiprotón se aniquilan entre sí se producen dos fotones. ¿Cuáles son la frecuencia mínima y la longitud de onda correspondiente de cada fotón?
- (6) Muones de alta energía chocan ocasionalmente con electrones y producen dos neutrinos según la reacción $\mu^+ + e^- \longrightarrow 2\nu$. ¿De qué tipo de neutrino se trata?
- (7) Establecer cuáles de las siguientes desintegraciones o reacciones violan una o más leyes de conservación, especificando su nombre en cada caso: (a) $p \longrightarrow n + e^+ + \bar{\nu}_e$, (b) $n \longrightarrow p + \pi^-$, (c) $e^+ + e^- \longrightarrow \gamma$, (d) $p + p^- \longrightarrow \gamma + \gamma$

y (e) $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$.

- (8) ¿Cuáles de las siguientes desintegraciones están permitidas y cuáles están prohibidas? Si una desintegración está prohibida, explicar qué ley o leyes de conservación se violan.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \pi^- \rightarrow e^- + \gamma, & \text{(b)} \pi^+ \rightarrow e^- + e^+ + \mu^+ + \nu_\mu \\ \text{(c)} \Lambda^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-, & \text{(d)} \pi^0 \rightarrow e^- + e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_e. \end{array}$$

- (9) (a) Demostrar que el número bariónico y la carga se conservan en las siguientes reacciones de un pión con un protón:

$$\pi^- + p \rightarrow K^- + \Sigma^+,$$

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^- + \Sigma^+.$$

(b) La primera reacción se observa, pero la segunda no ocurre jamás. Explicar por qué.

- (10) Las siguientes reacciones o desintegraciones implican uno o más neutrinos. Escribir el nombre de los neutrinos que faltan (ν_e , ν_μ o ν_τ). (a) $\pi^- \rightarrow \mu^- + ?$, (b) $K^+ \rightarrow \mu^+ + ?$, (c) $? + p \rightarrow n + e^+$, (d) $? + n \rightarrow p + e^-$, (e) $? + n \rightarrow p + \mu^-$, (f) $\mu^- \rightarrow e^- + ? + ?$.
- (11) Determinar el cambio de extrañeza que tiene lugar en cada una de las siguientes reacciones y establecer si la reacción puede estar asociada a la interacción fuerte, a la débil o a ninguna de ellas: (a) $\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^-$, (b) $\Xi^0 \rightarrow p + \pi^- + \pi^0$, (c) $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$, (d) $\Omega^- \rightarrow \Lambda^0 + K^-$, (e) $\Xi^0 \rightarrow p + \pi^-$, (f) $\Omega^- \rightarrow \Lambda^0 + \bar{\nu}_e + e^-$ y (g) $\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0$.
- (12) (a) ¿Cuál de las siguientes desintegraciones de la partícula τ es posible?

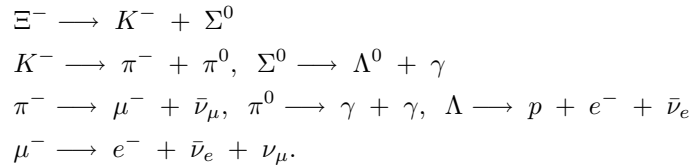
$$\tau \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau$$

$$\tau \rightarrow \mu^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_\tau.$$

(b) Explicar por qué la otra no es posible. (c) Calcular la energía cinética de los productos de desintegración del proceso posible.

- (13) Determinar el número bariónico, la carga y la extrañeza de las siguientes combinaciones de quarks e identificar el hadrón correspondiente: (a) uud , (b) udd , (c) uus , (d) dds , (e) uss y (f) dss .
- (14) Repetir el problema anterior para las siguientes combinaciones de quarks: (a) $u\bar{d}$, (b) $\bar{u}d$, (c) $u\bar{s}$ y (d) $\bar{u}s$.
- (15) La partícula Δ^{++} es un barión que se desintegra por vía de la interacción fuerte. Su extrañeza, encanto, número de cima (top) y número de fondo (bottom) son todos iguales a cero. ¿Qué combinación de quarks forma esta partícula para que posea dichas propiedades?
- (16) Determinar una posible combinación de quarks que ofrezca los valores correctos para la carga eléctrica, número bariónico y extrañeza de las partículas (a) K^+ y (b) K^0 .

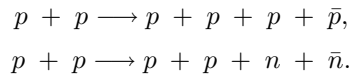
- (17) El mesón D^+ no tiene extrañeza pero su encanto es +1. (a) ¿Cuál es la combinación posible de quarks que nos da las propiedades correctas de esta partícula? (b) Repetir (a) para el mesón D^- , que es la antipartícula de D^+ .
- (18) Una partícula Σ^0 que se desplaza por la materia choca contra un protón, y surgen una partícula Σ^+ y un rayo gamma, así como una tercera partícula. Usar el modelo de quarks para determinar la identidad de la tercera partícula.
- (19) Las composiciones de quarks de las partículas K^0 y Λ^0 son $d\bar{s}$ y uds , respectivamente. Demostrar que la carga, el número bariónico y la extrañeza de estas partículas son iguales a las sumas de estos números para los quarks constituyentes.
- (20) Ignorar las energías de enlace y calcular las masas de los quarks u y d a partir de las masas del protón y del neutrón.
- (21) La desintegración completa de la partícula Ξ^- se produce mediante la siguiente secuencia:



Sabiendo el contenido en quarks de los distintos hadrones (ver Tabla 9.5), clasificar los diversos procesos según el tipo de interacción (fuerte, electromagnética o débil).

Problemas

- (22) Se considera la desintegración de una partícula de masa M en dos partículas de masas m_1 y m_2 . (a) Calcular la energía y el momento de las partículas resultantes de la desintegración. (b) Aplicar el resultado del apartado anterior a las desintegraciones $\Lambda \longrightarrow p + \pi^+$ y $K^0 \longrightarrow \pi^+ + \pi^-$.
- (23) Deducir la energía de los fotones producidos en la desintegración $\pi^0 \longrightarrow \gamma + \gamma$ en función de la energía del pión en el sistema del laboratorio (E_π) y del ángulo θ entre la dirección del π^0 y la del fotón emitido, en el sistema propio del pión.
- (24) En 1959 Emilio Segrè y Owen Chamberlain fueron galardonados con el premio Nobel de física por haber demostrado la existencia del antiprotón. En una serie de experimentos iniciados en 1955, usando el acelerador Bevatrón en Berkeley, produjeron tanto antiprotones como antineutrones en las siguientes reacciones:



- (a) Calcular la energía cinética mínima (o umbral) del protón incidente (protón blanco fijo) necesaria para la producción de un antiprotón. (b) Para las mismas condiciones iniciales, calcular la energía cinética umbral necesaria para la producción de un antineutrón.

- (25) Calcular la energía umbral para la producción de partículas extrañas en las siguientes reacciones. Suponer que la primera partícula está en movimiento y que la segunda está en reposo.

$$(a) \quad p + p \longrightarrow n + \Sigma^+ + K^0 + \pi^+.$$

$$(b) \quad \pi^- + p \longrightarrow \Sigma^0 + K^0.$$

- (26) Considerar la siguiente cadena de desintegración:

$$\Omega^- \longrightarrow \Xi^0 + \pi^-$$

$$\Xi^0 \longrightarrow \Sigma^+ + e^- + \bar{\nu}_e$$

$$\pi^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

$$\Sigma^+ \longrightarrow n + \pi^+$$

$$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

$$\mu^+ \longrightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e$$

$$\mu^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu.$$

- (a) ¿Son estables todos los productos finales? Si no lo son, terminar la cadena de desintegración. (b) Escribir la reacción global de desintegración para Ω^- hasta los productos finales. (c) Comprobar que la reacción de desintegración global respeta la conservación de la carga eléctrica, número bariónico, número leptónico y extrañeza.
- (27) Comprobar si en las siguientes desintegraciones existe violación de la conservación de la energía, carga eléctrica, número bariónico y número leptónico: (a) $n \longrightarrow \pi^+ + \pi^- + \mu^+ + \mu^-$ y (b) $\pi^0 \longrightarrow e^+ + e^- + \gamma$. Suponer que el momento lineal y el momento angular se conservan. Indicar qué leyes de conservación (si las hay) se violan en cada desintegración.
- (28) Determinar una combinación posible de quarks para las siguientes partículas: (a) Λ^0 , (b) p^- y (c) Σ^- .
- (29) Establecer las propiedades de las partículas formadas por los siguientes quarks: (a) ddd , (b) $u\bar{c}$, (c) $u\bar{b}$ y (d) $\bar{s}\bar{s}\bar{s}$.
- (30) Considerar la reacción $\pi^0 \longrightarrow \gamma + \gamma$. (a) Indicar cómo puede producirse dicha reacción en términos del modelo de quarks. (b) ¿Por qué el número de fotones producidos es, como mínimo, dos?
- (31) Usando las leyes de conservación de la carga, número bariónico, extrañeza y espín, identificar la partícula desconocida en cada una de las siguientes reacciones mediadas por la interacción fuerte: (a) $p + \pi^- \longrightarrow \Sigma^0 + ?$, (b) $p + p \longrightarrow \pi^+ + n + K^+ + ?$ y (c) $p + K^- \longrightarrow \Xi^- + ?$
- (32) (a) Calcular la energía cinética total de los productos de desintegración del proceso $\Lambda^0 \longrightarrow p + \pi^-$. Suponer que Λ^0 está inicialmente en reposo. (b) Determinar las energías cinéticas del protón y del pión para esta desintegración.

- (33) Un neutrón libre experimenta una desintegración beta según la reacción: $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$. Para simplificar las cosas, supongamos que cuando un neutrón libre sufre una desintegración beta sólo se crean un protón y un electrón y supongamos que inicialmente el neutrón está en reposo en el laboratorio. (a) Determinar la energía liberada en esta reacción. (b) Determinar las velocidades del protón y del electrón después de la reacción. (c) ¿Alguna de estas partículas se mueve a velocidades relativistas? Explicar la respuesta.
- (34) Una partícula Σ^0 en reposo se desintegra en un Λ^0 más un fotón. (a) ¿Cuál es la energía total de los productos de desintegración?. (b) Suponiendo que la energía cinética del Λ^0 es despreciable comparada con la energía del fotón, calcular el momento lineal aproximado del fotón. (c) Utilizar el resultado de (b) para calcular la energía cinética de Λ^0 . (d) Utilizar el resultado de (c) para obtener una mejor estimación del momento lineal y de la energía del fotón.
- (35) Una partícula de masa m en reposo se desintegra en otras partículas. El proceso tiene un valor Q diferente de cero. (a) Demostrar que si la partícula se desintegra en dos fragmentos iguales, estos deben moverse en direcciones opuestas con un módulo del momento lineal igual a $\frac{1}{2}\sqrt{2mQ - Q^2/c^2}$. (b) Demostrar que si la partícula se desintegra en tres fragmentos iguales, emitidos simétricamente, el módulo del momento lineal de cada partícula es igual a $\frac{1}{3}\sqrt{2mQ - Q^2/c^2}$. (c) Aplicar los resultados del apartado anterior a la desintegración $\tau \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^- + \nu_\tau$. Ignorando la contribución del neutrino, determinar el valor Q del proceso y hallar el módulo de la velocidad de los piones.
- (36) Partículas extrañas (con extrañeza distinta de cero) se pueden producir en la colisión entre protones. Un ejemplo es la siguiente reacción: $p + p \rightarrow n + \Sigma^+ + K^0 + \pi^+$. Calcular la energía cinética umbral para que tenga lugar esta reacción (a) si los dos protones colisionan con la misma velocidad pero en direcciones opuestas y (b) si uno de los dos protones está en reposo.
- (37) Se consideran las siguientes colisiones protón-protón con producción de un antiprotón: (i) $p + p \rightarrow \bar{p} + \pi^+ + \pi^+ + \pi^+$, (ii) $p + p \rightarrow p + \bar{p} + \pi^+ + \pi^+$, (iii) $p + p \rightarrow p + p + \bar{p} + \pi^+$, (iv) $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$, (v) $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p} + \pi^0$, (vi) $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p} + \pi^+ + \pi^-$. (a) Indicar cuáles están permitidas y cuáles no. (b) Para aquellas que estén permitidas, calcular la energía umbral del protón incidente en los sistemas del laboratorio y del centro de masas. *Nota:* utilizar el resultado del problema 40 del capítulo 2.

Problemas avanzados

- (38) En una cámara de burbujas se observa la desintegración $\Sigma^+ \rightarrow \pi^+ + n$. La Fig. 9.10 muestra las trazas curvas de las partículas Σ^+ y π^+ y el rastro invisible del neutrón, en presencia de un campo magnético de 1.15 T dirigido hacia fuera de la página. Los radios de curvatura medidos son 1.99 m para la partícula

Σ^+ y 0.580 m para la partícula π^+ . (a) Determinar los momentos lineales de las partículas Σ^+ y π^+ , en unidades de MeV/c . (b) El ángulo entre los momentos lineales de las partículas Σ^+ y π^+ en el instante de la desintegración es 64.5° . Encontrar el momento lineal del neutrón. (c) Calcular la energía total de la partícula π^+ y la del neutrón a partir de sus masas conocidas ($m_\pi = 139.6 \text{ MeV}/c^2$ y $m_n = 939.6 \text{ MeV}/c^2$) y la relación relativista energía-momento. ¿Cuál es la energía total de la partícula Σ^+ ? (d) Calcular la masa y la velocidad de la partícula Σ^+ .

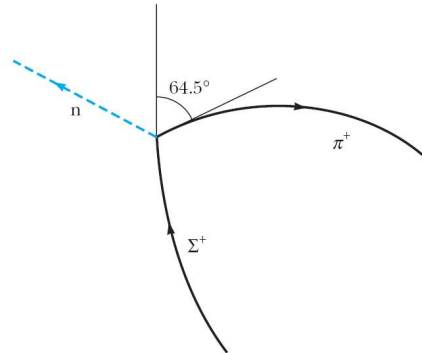


Fig. 9.10 Problema 9.39.

- (39) El objetivo de este problema es calcular la diferencia entre los tiempos de llegada de dos neutrinos de distinta energía procedentes de una supernova a 170000 años-luz de distancia. Esta diferencia de tiempos se puede utilizar para estimar la masa de los neutrinos. Sean $E_1 = 20 \text{ MeV}$ y $E_2 = 5 \text{ MeV}$ las energías de los neutrinos y supongamos que la masa de un neutrino es $20 \text{ eV}/c^2$. Como su energía total es mucho mayor que su energía en reposo, los neutrinos poseen velocidades muy próximas a c y energías aproximadamente $E = pc$. (a) Si t_1 y t_2 son los tiempos que tardan los neutrinos de velocidades u_1 y u_2 en recorrer una distancia x , demostrar que $\Delta t = t_2 - t_1 = x(u_1 - u_2)/(u_1 u_2) \approx x \Delta u/c^2$. (b) Utilizar el hecho de que para los neutrinos $E \gg mc^2$ para demostrar que la velocidad u de un neutrino viene dada aproximadamente por $u/c \approx 1 - (1/2)(mc^2/E)^2$. (c) Utilizar el resultado del apartado (b) para calcular $u_1 - u_2$ para las energías y las masas conocidas, y calcular Δt a partir del resultado del apartado (a) para $x = 170000$ años-luz. (d) Repetir el cálculo de (c) utilizando $mc^2 = 40 \text{ eV}$ para la energía en reposo del neutrino.
- (40) **Oscilación de sabor del neutrino.** La oscilación del neutrino está basada en la idea de que los neutrinos ν_e , ν_μ y ν_τ son mezclas de otros tres neutrinos denominados ν_1 , ν_2 y ν_3 . Por ejemplo,

$$\nu_\tau = U_{\tau 1} \nu_1 + U_{\tau 2} \nu_2 + U_{\tau 3} \nu_3,$$

donde cada uno de los neutrinos se representa como una solución de estado estacionario de la ecuación de Schrödinger, cada uno con una masa diferente m_1 , m_2 y m_3 . Para simplificar el álgebra, consideremos únicamente las oscilaciones del sistema ν_μ , ν_τ . Los coeficientes U distintos de cero se limitan a los que relacionan ν_2 y ν_3 y los U 's se escriben en términos de una simple variable θ denominada ángulo de mezcla:

$$\nu_\mu = \cos \theta \nu_2 - \text{sen } \theta \nu_3$$

$$\nu_\tau = \text{sen } \theta \nu_2 + \cos \theta \nu_3.$$

El ángulo de mezcla controla la cantidad de ν_2 y ν_3 presente en ν_μ y ν_τ . Obsérvese que para $\theta = 0$ no hay mezcla. En un experimento típico, en el instante $t = 0$ se crea un ν_μ (haz) con un momento lineal dado, p . La evolución temporal del ν_μ a medida que éste se mueve, está dada por

$$\nu_\mu(t) = \cos \theta \nu_2 e^{-iE_2 t/\hbar} - \text{sen } \theta \nu_3 e^{-iE_3 t/\hbar},$$

donde ν_2 y ν_3 son estados estacionarios con energías E_2 y E_3 , respectivamente.

- Escribir una expresión semejante para $\nu_\tau(t)$.
- Expresar la condición inicial de que el neutrino creado en $t = 0$ es por completo un neutrino muónico. (Sugerencia: una condición es $|\nu_\tau(0)|^2 = 0$.)
- Demostrar que la probabilidad de encontrar un neutrino tauónico en el instante t (o de que el neutrino muónico haya oscilado en un neutrino tauónico) es

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) = \frac{\text{sen}^2(2\theta)}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{E_2 - E_3}{\hbar} t \right) \right].$$

- Demostrar que para un momento lineal fijo p y masas pequeñas m_2 y m_3 ($m_2 c, m_3 c \ll p$):

$$E_2 - E_3 \approx \frac{(m_2^2 - m_3^2)c^3}{2p}.$$

Los resultados de los apartados (c) y (d) muestran que la observación de la oscilación del neutrino establece la diferencia de las masas al cuadrado y determina el ángulo de mezcla.

Capítulo 10

Astrofísica

Este capítulo presenta una introducción al amplio campo de la astrofísica, que es la parte de la física que se ocupa de estudiar la estructura, composición y evolución de los astros. Comenzaremos por describir las características fundamentales del Sistema Solar. A continuación nos centraremos en el estudio de las estrellas, que son probablemente los astros más interesantes. Seguiremos presentando las características principales de la Vía Láctea, en particular, y de las galaxias, en general. Acabaremos este capítulo con una breve discusión de dos de los temas de mayor interés en la física actual, la materia oscura y la energía oscura.

10.1 El Sistema Solar

Comenzaremos este capítulo dedicado a la astrofísica ocupándonos de nuestro entorno local, es decir, del Sistema Solar. Primero describiremos sus características fundamentales para después discutir las teorías básicas sobre su formación. A continuación nos centraremos en el estudio del Sol, como astro dominante del Sistema Solar, y acabaremos repasando brevemente las características fundamentales de los planetas, asteroides y cometas que lo componen.

10.1.1 *Características generales*

El *Sistema Solar* está formado por una única estrella llamada Sol, que da nombre a este sistema, más ocho planetas que orbitan alrededor de la estrella: Mercurio, Venus, la Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno (ver Fig. 10.1). Además, el Sistema Solar contiene un conjunto de otros cuerpos menores: planetas enanos (Plutón, Eris, Makemake, Haumea y Ceres), asteroides, satélites naturales, cometas, etc., así como el espacio interplanetario comprendido entre ellos.

Los planetas y los asteroides orbitan alrededor del Sol, en la misma dirección siguiendo órbitas elípticas en sentido antihorario si se observa desde encima del polo norte del Sol. El plano aproximado en el que giran todos estos se denomina *eclíptica*. Según sus características, y avanzando del interior al exterior, los cuerpos

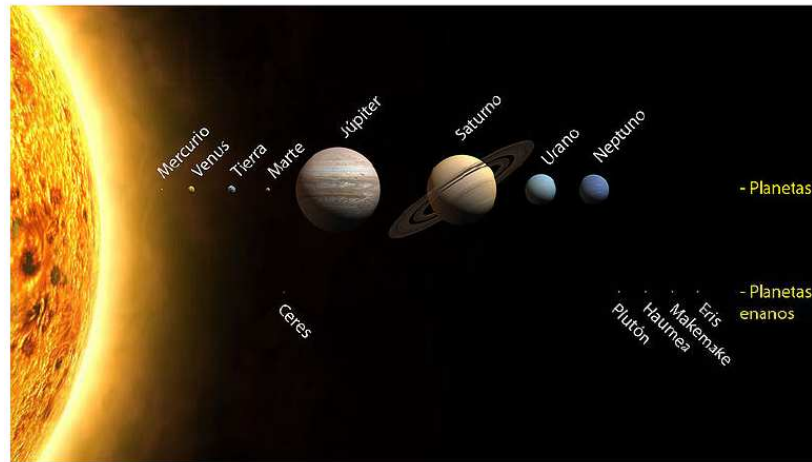


Fig. 10.1 Esquema del Sistema Solar que incluye los planetas y los planetas enanos. Los tamaños se encuentran a escala, las distancias entre planetas y la ubicación no.

que forman el Sistema Solar se clasifican en:

- **Sol.** Una estrella de tipo espectral G2¹ que contiene más del 99% de la masa del sistema. Con un diámetro de aproximadamente 1.4×10^6 km, se compone, de un 75% de hidrógeno, un 20% de helio y el 5% de oxígeno, carbono, hierro y otros elementos.
- **Planetas.** Divididos en *planetas interiores* (también llamados terrestres o rocosos) y *planetas exteriores* o gigantes. Entre estos últimos Júpiter y Saturno se denominan gigantes gaseosos mientras que Urano y Neptuno suelen nombrarse como gigantes helados. Todos los planetas gigantes tienen anillos a su alrededor.
- **Planetas enanos.** Esta nueva categoría, inferior a la de planeta, la creó la Unión Astronómica Internacional en agosto de 2006. Se trata de cuerpos cuya masa les permite tener forma esférica, pero no es la suficiente para haber atraído o expulsado a todos los cuerpos a su alrededor. Cuerpos como Plutón (hasta 2006 considerado noveno planeta del Sistema Solar), Ceres, Makemake y Eris están dentro de esta categoría.
- **Satélites.** Cuerpos mayores orbitando los planetas, algunos de gran tamaño, como la Luna en la Tierra, Ganímedes en Júpiter o Titán en Saturno.
- **Asteroides.** Cuerpos menores concentrados mayoritariamente en el cinturón de asteroides entre las órbitas de Marte y Júpiter, y otra más allá de Neptuno. Su escasa masa no les permite tener forma regular.
- **Objetos del cinturón de Kuiper.** Objetos helados exteriores (situados más allá de Neptuno) en órbitas estables, los mayores de los cuales serían Sedna y

¹La clasificación espectral de las estrellas se abordará en la sección 10.2.2.

Quaoar.

- **Cometas.** Objetos helados pequeños provenientes principalmente de la Nube de Oort, situada mucho más allá de Plutón.

El espacio interplanetario entorno al Sol contiene material disperso proveniente de la evaporación de cometas y del escape de material proveniente de los diferentes cuerpos masivos. El **polvo interplanetario** (especie de polvo interestelar) está compuesto de partículas microscópicas sólidas. El **gas interplanetario** es un tenue flujo de gas y partículas cargadas formando un plasma que es expulsado por el Sol en el viento solar. El límite exterior del Sistema Solar se define a través de la región de interacción entre el viento solar y el medio interestelar originado de la interacción con otras estrellas.

Los diferentes sistemas planetarios observados alrededor de otras estrellas parecen marcadamente diferentes al Sistema Solar, si bien existen problemas observacionales para detectar la presencia de planetas de baja masa en otras estrellas. Por lo tanto, no parece posible determinar hasta qué punto el Sistema Solar es característico o atípico entre los sistemas planetarios del Universo.

10.1.2 *Formación del Sistema Solar*

A lo largo de la historia se han propuesto dos tipos de teorías principales sobre la formación del Sistema Solar. La primera de ellas, denominada *teoría catastrófica* fue propuesta por Georges-Louis Leclerc en 1749. Según este autor, el Sol recibió el impacto de un cometa que arrancó un filamento de materia a partir del cual se formaron los planetas actuales. Al perfeccionarse el conocimiento de la masa y estructura de los planetas, esta teoría ha quedado descartada. Las teorías catastrofistas modernas proponen que el Sistema Solar se formó como consecuencia del paso de otra estrella por las cercanías del Sol. Los efectos de marea inducidos entre los dos cuerpos arrancaron material del Sol que, al condensarse, formó los planetas que conocemos. Esta versión moderna fue formulada por James Jeans y Jeffreys a principios del siglo XX. Sin embargo, en la actualidad esta hipótesis se ha descartado porque los cálculos demuestran que la materia arrancada del Sol no llegaría a alejarse demasiado de este astro y, además, estaría demasiado caliente como para condensarse en planetas. Otro punto en contra de esta teoría radica en que los encuentros cercanos entre estrellas y con las características requeridas son extremadamente improbables.

En 1755 Immanuel Kant, y en 1796 Pierre Simon de Laplace propusieron la *teoría de la nebulosa primitiva*, que, con algunos retoques, es la aceptada actualmente. Según esta teoría, el Sol y sus planetas se formaron simultáneamente en el seno de una nebulosa de gas y polvo. Este tipo de nebulosas constituye la clase de objetos en los que nacen todas las estrellas, y las observaciones demuestran que abundan en nuestra galaxia.

Según esta teoría, la nebulosa, que inicialmente poseía cierto movimiento de

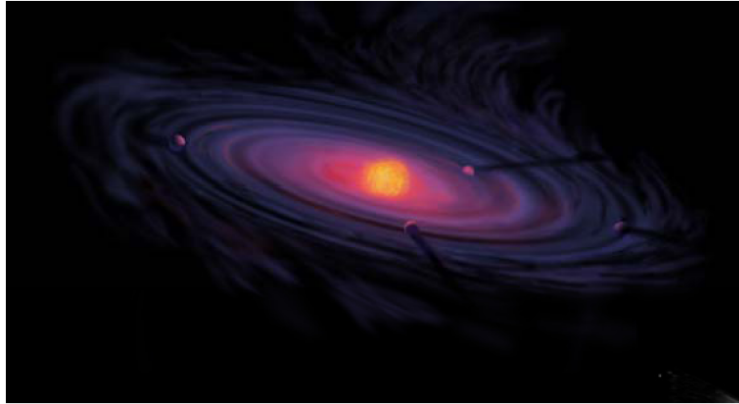


Fig. 10.2 Concepción artística de un disco protoplanetario similar al que dio lugar al Sistema Solar.

rotación, fue colapsando sobre sí misma por contracción gravitatoria y, en este proceso, su densidad central fue creciendo. La conservación del momento angular hizo que se incrementara la velocidad de rotación y, debido a fuerzas de viscosidad y centrífugas, la nube fue aplanándose hasta convertirse en un disco. La parte central, donde la densidad aumentaba con rapidez, fue calentándose por efecto de la contracción gravitatoria. Este proceso continuó hasta que en el centro se alcanzaron las presiones y temperaturas requeridas para desencadenar reacciones nucleares de fusión, que constituyen la fuente de energía del Sol y del resto de las estrellas. Este proceso de formación del Sistema Solar se ilustra en la Fig. 10.2.

Mientras tanto, en las regiones externas del disco, allí donde las temperaturas y densidades eran menores, comenzaron a formarse granos sólidos de unos centímetros de radio a partir de los gases y el polvo de la nebulosa. Se trató de una fase rápida que duró unos 1000 años. Después, las perturbaciones gravitatorias hicieron que estos granos se agruparan en planetoides sólidos de entre 1 y 5 km.

La etapa siguiente consistió en un proceso de acreción, o caída de unos planetoides sobre otros a baja velocidad, un proceso que llevó a la formación de protoplanetas con dimensiones de unos 1000 km que fueron chocando para formar planetas o para destruirse totalmente. Esta última fase fue más larga y duró alrededor de 100 millones de años.

La última etapa explica por qué el Sistema Solar está tan vacío. Después del nacimiento de los planetas, los cuerpos supervivientes fueron cayendo sobre ellos poco a poco en colisiones que formaron cráteres enormes, como los que existen en las superficies de Mercurio, de la Luna o de la Tierra. El polvo que quedaba en el sistema tuvo que ser expulsado por la intensa radiación del Sol joven.

10.1.3 *El Sol*

El Sol es una estrella amarilla de tipo espectral G2, situada en la secuencia principal (véase sección 10.2.2). Se halla aproximadamente en la mitad de su vida. No difiere demasiado de otros millones de estrellas existentes en la Vía Láctea. Su único rasgo distintivo radica en su cercanía a la Tierra, lo cual lo convierte en la fuente de vida terrestre. Se sabe que su edad asciende a unos 5000 millones de años. Mide unos 700000 km de radio y está compuesto sobre todo de hidrógeno y helio, así como cantidades pequeñas de otros elementos, casi todos ellos en estado de plasma. En la Tabla 10.1 se detallan algunas de las características físicas del Sol.

Tabla 10.1 Algunas características físicas del Sol.

Diámetro	1.392×10^6 km
Masa	1.9891×10^{30} kg
Densidad media	1411 kg/m ³
Temperatura de la superficie	6×10^3 K
Temperatura de la corona	5×10^6 K
Temperatura del núcleo	1.36×10^7 K
Luminosidad absoluta	3.84×10^{26} W

El estudio del Sol es importante porque se trata de la única estrella que nos permite analizar con detalle muchos fenómenos que en otras estrellas quedan fuera de nuestro alcance. Por lo tanto, constituye el laboratorio donde se ponen a prueba las teorías sobre el funcionamiento de las estrellas.

10.1.3.1 *Estructura del Sol*

El Sol presenta una estructura en capas esféricas o en “capas de cebolla” (ver Fig. 10.3). La frontera física y las diferencias químicas entre las distintas capas son difíciles de establecer. Sin embargo, se puede establecer una función física que es diferente para cada una de las capas. En la actualidad, la astrofísica dispone de un modelo de estructura solar que explica satisfactoriamente la mayoría de los fenómenos observados. Según este modelo, el Sol está formado por: núcleo, zona radiativa, zona convectiva, fotosfera, cromosfera, corona y viento solar. A continuación describiremos las diversas partes del Sol.

Núcleo

Como se muestra en la Fig. 10.4, el interior del Sol está formado por el núcleo, la zona radiativa y la zona convectiva. El núcleo ocupa unos 139000 km del radio solar, es decir, un quinto del mismo. En esta zona central del Sol se producen las reacciones termonucleares mediante las cuales se transforma constantemente hidrógeno en helio a través de la cadena *pp* (protón-protón), un proceso que genera una enorme

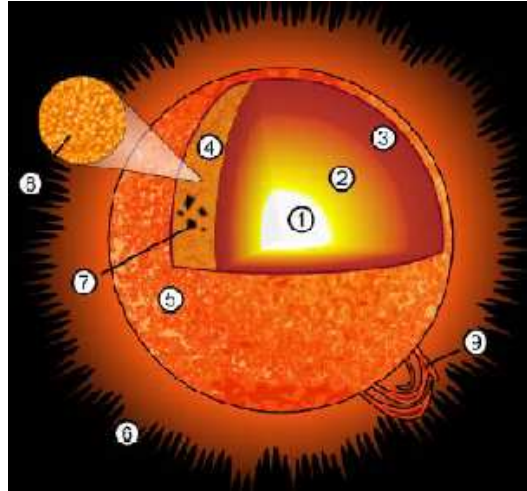


Fig. 10.3 Estructura del Sol. (1) Núcleo, (2) zona radiativa, (3) zona convectiva, (4) fotosfera, (5) cromosfera, (6) corona, (7) manchas solares, (8) granulos y (9) prominencias.

cantidad de energía. La energía producida mantiene el equilibrio térmico del núcleo solar a temperaturas aproximadamente de 15 millones de kelvins.

Zona radiativa

Si nos alejamos del centro nos encontramos con la zona radiativa, donde la energía producida en el núcleo se transporta hacia fuera por radiación. Esta región abarca hasta 0.713 radios solares del centro.



Fig. 10.4 Interior del Sol.

Zona convectiva

Esta región se extiende por encima de la zona radiativa y en ella los gases solares dejan de estar ionizados y los fotones son absorbidos con facilidad volviéndose el material opaco al transporte de radiación. Por lo tanto, el transporte de energía se realiza por convección, de modo que el calor se transporta de manera no homogénea y turbulenta por el propio fluido. Los fluidos se dilatan al ser calentados y disminuyen su densidad. Por lo tanto, se forman corrientes ascendentes de material desde la zona caliente hasta la zona superior, y simultáneamente se producen movimientos descendentes de material desde las zonas exteriores frías.

Fotosfera

La atmósfera solar consta de tres capas diferentes: la fotosfera, la cromosfera y la corona.

La fotosfera, con un grosor de unos 500 km y una temperatura aproximada de 7000 K en la base y unos 4000 K en la parte superior, conforma la superficie visible del Sol. En esta zona la densidad del material ha descendido lo suficiente como para que la mayoría de los fotones puedan escapar libremente al espacio sin interacciones con otras partículas. Algunos de estos fotones alcanzan la Tierra. Así, la fotosfera es la región solar desde la que recibimos la mayoría de los fotones que vienen del Sol.

Cuando se observa el Sol con un telescopio (con la protección pertinente), se pueden apreciar gránulos brillantes (ver Fig. 10.5), que corresponden a burbujas convectivas de gas con unos 1000 km de diámetro, una manifestación de los procesos que suceden en las capas inferiores. En el centro de cada gránulo se encuentra una corriente ascendente de gas caliente que emerge con una velocidad de 500 m/s,

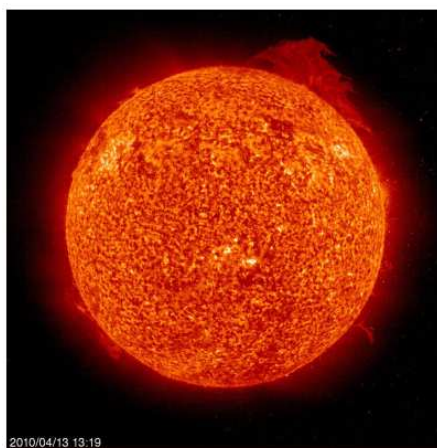


Fig. 10.5 Imagen del sol tomada por el satélite SOHO.

mientras que el gas más frío vuelve a caer por los bordes del gránulo. Los gránulos aparecen y desaparecen con una vida media de unos 10 minutos.

El astrofísico estadounidense R.B. Leighton descubrió en 1960 que el gas de la superficie solar oscila con un periodo de 5 minutos. Las regiones oscilatorias cubren casi todo el disco solar y constituyen un fenómeno global en el Sol. Las ondas se propagan por todo el interior solar. La amplitud de las velocidades de oscilación observadas es de unos 400 m/s. La observación y el estudio continuados de este fenómeno han dado lugar a una nueva rama de la astrofísica, la *heliosismología*.

Como hemos dicho anteriormente, la energía que llega a la Tierra procedente del Sol proviene de la fotosfera. La energía por segundo y por metro cuadrado que llega procedente del Sol a la parte superior de la atmósfera terrestre se llama *constante solar* f y tiene un valor de:

$$f = 1.365 \times 10^3 \text{ W/m}^2. \quad (10.1)$$

La energía total radiada por el Sol recibe el nombre de luminosidad (L_{\odot}) y es fácil mostrar que tiene un valor igual a:

$$L_{\odot} = 3.84 \times 10^{26} \text{ W}. \quad (10.2)$$

Si se supone que el Sol emite como un cuerpo negro, lo cual es una buena aproximación como se puede ver en Fig. 10.6, podemos utilizar su luminosidad L_{\odot} y su radio R_{\odot} para calcular la temperatura efectiva del Sol a partir de la ley de Stefan-Boltzmann:

$$T_e = \left(\frac{L_{\odot}}{4\pi\sigma R_{\odot}^2} \right)^{1/4} \quad (10.3)$$

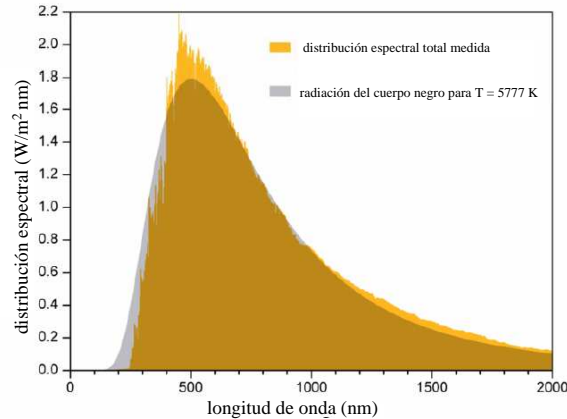


Fig. 10.6 La gráfica muestra la distribución espectral medida del Sol, así como un ajuste de dicha curva realizado con la ley de Planck y con la temperatura como parámetro a ajustar. Del ajuste se obtiene la temperatura efectiva (o de cuerpo negro) del Sol (5777 K), que es la temperatura que debe tener un cuerpo negro del mismo tamaño y que emita la misma energía total.

Ejemplo 10.1: Usar la ley de Stefan-Boltzmann para determinar la temperatura efectiva de la fotosfera del Sol.

Solución. Usando que $L_{\odot} = 3.84 \times 10^{26}$ W y la ec. (10.3), tenemos que

$$T_e = \left(\frac{L_{\odot}}{4\pi\sigma R_{\odot}^2} \right)^{1/4} = \left(\frac{3.84 \times 10^{26} \text{ W}}{4\pi(5.6 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4)(6.96 \times 10^8 \text{ m})^2} \right)^{1/4} = 5780 \text{ K.} \quad \square$$

Cromosfera

A una altura de 500 km a partir de la base de la atmósfera solar, la temperatura, que hasta ahora iba en descenso, empieza a aumentar de nuevo. Este punto de mínima temperatura marca el final de la fotosfera y el principio de la siguiente capa de la atmósfera solar, la *cromosfera*. En este mínimo la temperatura es de 4000 K. La cromosfera tiene un grosor de unos 2000 km y en su parte superior alcanzan 60000 K.

La cromosfera brilla mucho menos que la fotosfera, de modo que no puede observarse desde la Tierra de manera directa. Solo se deja ver durante los breves instantes de los eclipses solares totales, o bien si se utilizan filtros especiales centrados en ciertas líneas espectrales como la H_{α} (6563 Å).

Corona solar

A unos 2500 km sobre la base de la fotosfera, la temperatura alcanza valores que rondan 1 ó 2 millones de kelvins. En esa región empieza la *corona*, que se extiende hasta una distancia de unos cuantos radios solares. Sin embargo, la influencia del Sol llega, mediante el viento solar hasta la *heliopausa* situada a unas 150 au² de él. Esta región marca el límite del Sistema Solar en donde el gas interestelar interactúa con el gas enrarecido del viento solar formando una inmensa burbuja llamada *heliosfera* que engloba al Sol y los planetas.

La elevadísima temperatura de la corona es un dato un poco engañoso y es consecuencia de la alta velocidad de las pocas partículas que componen la atmósfera solar. Sus grandes velocidades son debidas a la baja densidad del material coronal, a los intensos campos magnéticos emitidos por el Sol y a las ondas de choque que rompen en la superficie solar estimuladas por las células convectivas. Como resultado de su elevada temperatura, desde la corona se emite gran cantidad de energía en forma de rayos X.

La corona solar solamente es observable desde el espacio con instrumentos adecuados que anteponen un disco opaco para eclipsar artificialmente al Sol o durante un eclipse solar natural desde la Tierra (ver Fig. 10.7). El material tenue de la

²Una *unidad astronómica* (au) es la unidad fundamental para la medida de distancias en astronomía y equivale a 1.4959787×10^{11} m. Una au corresponde al semieje mayor de la órbita de la Tierra y, por tanto, es aproximadamente la distancia entre la Tierra y el Sol.

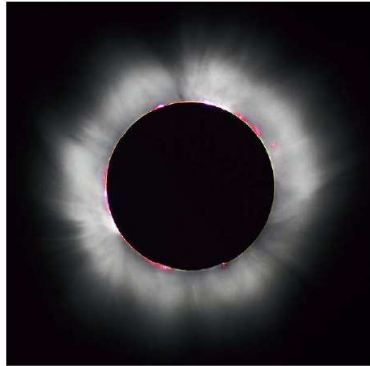


Fig. 10.7 Durante un eclipse solar total, la corona solar se puede ver directamente sin necesidad de ningún instrumento durante un corto periodo de tiempo.

corona es continuamente expulsado por la fuerte radiación solar dando lugar a un viento solar.

10.1.3.2 La fuente de la energía del Sol

Hoy en día sabemos que la energía que nos llega del Sol se produce originalmente en reacciones termonucleares en su núcleo. En esta subsección vamos a explicar qué tipo de reacciones tienen lugar y cómo llegaron a iniciarse.

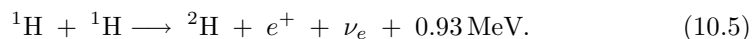
La teoría estándar del Sol nos dice que en su proceso de formación a partir de una nebulosa de gas y polvo interestelar, su temperatura aumentó al contraerse. Para entender por qué el Sol se contrajo y por qué esto causó un aumento de su temperatura comencemos con la ley universal de la gravitación:

$$F_{\text{grav}} = G \frac{Mm}{R^2}, \quad (10.4)$$

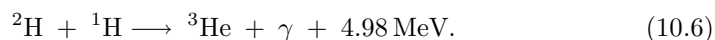
donde F_{grav} es la fuerza gravitatoria atractiva entre las masas M y m que están separadas por una distancia R y G es la constante universal de la gravitación. Nótese que cuando R se hace más pequeño, F_{grav} crece, lo que significa que las masas M y m se mueven la una hacia la otra con creciente velocidad. La conservación de la energía requiere que este aumento en la energía cinética venga de alguna parte. Alguna parte en este caso es la energía potencial gravitatoria U_{grav} de las masas en sus posiciones originales, que debe decrecer para compensar el aumento de energía cinética. Pero, ¿cómo puede esto explicar la energía generada y emitida por el Sol? Una estrella es una bola enorme de gas. Los átomos del gas cerca de la superficie sienten la fuerza de la gravedad atractiva generada por los átomos del interior. Los átomos del interior también sienten esta fuerza, pero éstos también son atraídos en la dirección opuesta por átomos en el otro lado de la superficie y, por tanto, los átomos del interior no se mueven. Sin embargo, la superficie entera de la estrella se acelera hacia el interior, es decir, la estrella sufre una contracción gravitatoria. El

aumento de la energía cinética de los átomos acelerados aumenta la temperatura de la estrella, que comienza a radiar energía al espacio.

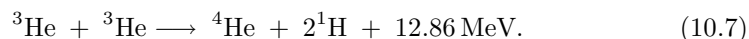
Eventualmente, cuando la temperatura del interior alcanza unos 1.5×10^7 K, que es suficiente para que los núcleos de hidrógeno (protones) en el plasma tengan suficiente energía en promedio (del orden de 1 keV) para fusionarse formando núcleos de helio. Esta reacción, que en realidad es una cadena de reacciones, fue propuesta por H.A. Bethe y se la conoce como **cadena o ciclo protón-protón**. La primera reacción en esta cadena es



Debido a la gran barrera de potencial Coulomb, la probabilidad de que ocurra esta reacción es muy baja, salvo para los protones más energéticos. Como sabemos, esta reacción de fusión se produce por efecto túnel. Esto establece un límite en el ritmo de producción de energía en Sol y, de este modo, asegura un tiempo de vida para el Sol muy largo. Una vez que se produce deuterio (${}^2\text{H}$) a partir de la fusión del hidrógeno, la siguiente reacción es la formación de ${}^3\text{He}$ que es muy probable y tiene lugar de forma casi instantánea:



Esta reacción es seguida por la formación de ${}^4\text{He}$ del siguiente modo:



Esta sucesión de reacciones mediante la cual núcleos de hidrógeno se “queman” en núcleos de helio se resume esquemáticamente en la Fig. 10.8. Existen otras reacciones que convierten ${}^1\text{H}$ en ${}^4\text{He}$ y todas tienen el mismo valor neto Q . Sin embargo, sus ritmos difieren dependiendo de la composición y la temperatura del Sol. Nos ocuparemos de estas reacciones en la sección 10.2.5.

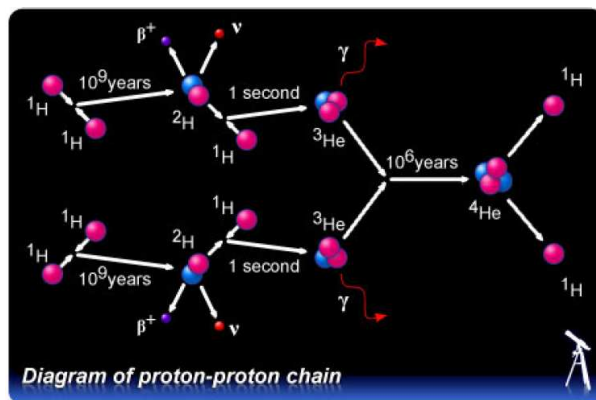


Fig. 10.8 Esquema de la cadena protón-protón que es la reacción nuclear mediante la cual hidrógeno se convierte en helio en el interior del Sol liberando una gran cantidad de energía.

Los neutrinos producidos en la cadena protón-protón se escapan del núcleo del Sol, proporcionándonos el único medio directo que tenemos para estudiar lo que ocurre en el interior del Sol. La detección de estos neutrinos y el estudio detallado de su flujo dio lugar al problema de los neutrinos solares que hemos comentado en la sección 9.5.1.

10.1.3.3 *Actividad solar*

El Sol exhibe una serie de fenómenos transitorios, la mayor parte de los cuales están relacionados con su magnetismo. Como ya hemos indicado anteriormente, el interior del Sol está formado por un plasma de protones y electrones. El Sol rota con diferentes velocidades angulares dependiendo de la latitud. Para una latitud dada, el Sol tiene diferentes velocidades angulares a distintas distancias del eje de rotación. Todo esto da lugar a un complejo movimiento que, unido a la subida y bajada de partículas cargadas en la zona convectiva, da lugar al caótico campo magnético del Sol. Este campo magnético puede llegar a exceder 1 T en algunos puntos. Además, este campo dependiente del tiempo está superimpuesto en un campo magnético promedio de unos 10^{-4} T, el doble del campo magnético terrestre. El origen de este campo promedio no se conoce.

El campo magnético transitorio da lugar a uno de los fenómenos más característicos del Sol, las llamadas **manchas solares** (véase Fig. 10.9). Las manchas solares fueron observadas por primera vez por Galileo en 1610. De acuerdo al modelo aceptado, el origen de las manchas es el siguiente. Las líneas de campo magnético en Sol se distorsionan en racimos o tubos debido a la rotación diferencial del Sol. Ocasionalmente, movimientos verticales en la zona convectiva pueden empujar a estos grupos de líneas hacia la superficie. El área que atraviesan estas líneas al salir por la superficie y al volver a entrar se convierten en las manchas solares. Estas manchas son más oscuras que la fotosfera que las rodea, lo que significa que están más frías, aproximadamente 3800 K. Una de las manchas tendrá un polo norte magnético, mientras que la otra tendrá un polo sur. Si el tubo de líneas no atraviesa completamente la fotosfera, sólo se observa una mancha, en lugar de dos.

El número de manchas solares por año varía regularmente entre unas 20 y unas 150 en un ciclo de 11 años. Al comienzo de cada ciclo, las manchas aparecen en una latitud de unos 30° . A medida que el tiempo pasa dentro de un ciclo, las manchas se forman progresivamente más cerca del ecuador. Actualmente, la compresión de estas regularidades no es completa.

Un fenómeno muy violento, que está asociado con los intensos campos magnéticos en las manchas solares, es la **eyección de masa coronal**, también conocido como EMC. Estas eyecciones se presentan como enormes burbujas de gas magnetizado que se expanden desde el Sol hacia el espacio. Pueden ocupar un ángulo de 45° del borde del disco solar y lanzar hasta 5×10^{13} kg de material. La velocidad media de las partículas emitidas es de unos 400 km/s lo que las lleva al entorno terrestre en unos cuatro días.

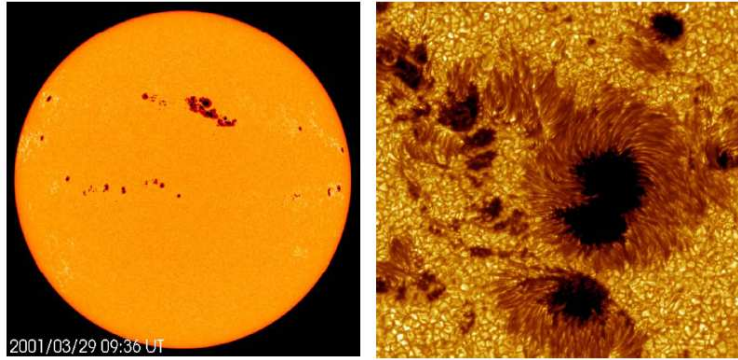


Fig. 10.9 A la izquierda se puede ver una imagen del Sol tomada por el satélite SOHO (ESA-NASA) tomada en el rango del visible donde se aprecian varias manchas solares. La imagen de la derecha muestra en detalle una mancha solar. Una mancha solar ocurre cuando un conjunto de líneas de campo magnético salen y vuelven a entrar en la superficie.

La forma de las EMC sugiere bucles magnéticos que se estiran, retuercen y, cuando son inestables, se rompen, con lo que se liberan al espacio parte de su material. En este proceso, la energía magnética se transforma en energía cinética y térmica. La EMC, una vez libre, forma una onda de choque que viaja por el espacio interplanetario. Si en su camino encuentra la Tierra, las partículas energéticas y el campo magnético asociado golpean la magnetosfera terrestre y producen tormentas magnéticas, auroras intensas, problemas en los satélites y llegan incluso a causar apagones de luz en extensas áreas, como ya ocurrió en marzo de 1989 en Montreal, cuando la ciudad quedó a oscuras durante 9 horas (ver Fig. 10.10).

Otros dos fenómenos solares relacionados con las manchas solares son las **playas** y los filamentos. Las **playas** son áreas brillantes (calientes) adyacentes a las oscuras

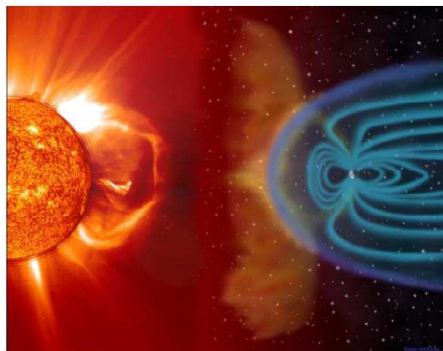


Fig. 10.10 De dos a cuatro días después de que tenga lugar una eyección de masa coronal en la dirección de la Tierra, una nube de partículas cargadas impacta en nuestra magnetosfera. Así, la Tierra está eléctricamente conectada al Sol. Nótese que en esta figura la distancia y tamaños de la Tierra y el Sol no están a escala.

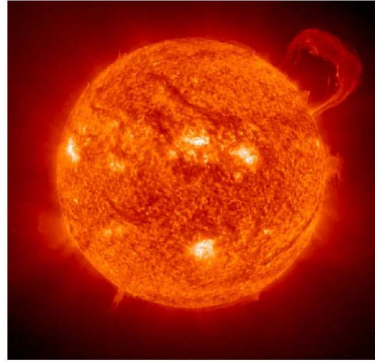


Fig. 10.11 Una enorme prominencia solar fotografiada por el satélite SOHO (ESA-NASA) en una longitud de onda de 30.4 nm el 14 de septiembre de 1999. Las prominencias están formadas por partículas cargadas confinadas por el campo magnético del Sol.

manchas solares. La evolución de las playas sugiere que son áreas con mayor densidad de masa, que resultan quizá del movimiento de los grupos de líneas magnéticas generados en las manchas solares. Los **filamentos** son líneas oscuras y finas que extienden a través del disco solar, algunas veces hasta millares de kilómetros. Los filamentos no residen en la superficie del Sol, sino que se extiende hacia fuera en el espacio formando todo tipo de figuras. Los filamentos que se ven proyectándose hacia el espacio por los bordes del Sol se llaman **prominencias**. Estas prominencias pueden erupcionar y desaparecer rápidamente o persistir durante varias semanas. En la Fig. 10.11 se muestra una prominencia enorme fotografiada por el satélite SOHO (ESA-NASA).

10.1.3.4 La muerte del Sol

Como ya hemos dicho anteriormente, el Sol se formó hace unos 5000 millones de años y tiene combustible (hidrógeno) para 5000 millones más. Después, comenzará a hacerse más y más grande, hasta convertirse en una gigante roja. Finalmente, se hundirá por su propio peso y se convertirá en una enana blanca, que puede tardar un trillón de años en enfriarse. La evolución del Sol y su futuro se resumen esquemáticamente en la Fig. 10.12.

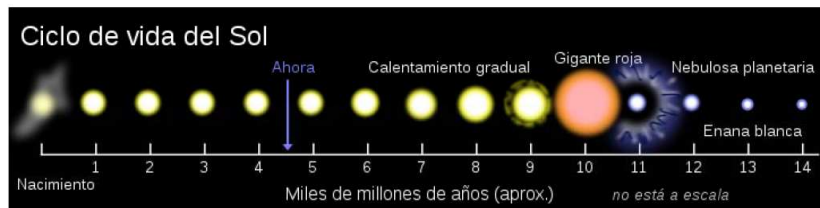


Fig. 10.12 Ciclo de vida del Sol.

10.1.4 Planetas, asteroides y cometas

10.1.4.1 Planetas

Los 8 planetas del Sistema Solar, de acuerdo con su cercanía al Sol, son: Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno. Los planetas son astros que describen órbitas elípticas al girar alrededor del Sol y que, por definición, tienen suficiente masa para que su gravedad supere las fuerzas del cuerpo rígido, de manera que asuman una forma prácticamente esférica y hayan limpiado la vecindad de su órbita de otros objetos.

Si se atiende a la estructura y composición de los planetas, cabe dividirlos en dos grupos. El grupo de los *planetas terrestres* o *rocosos* lo integran Mercurio, Venus, la Tierra y Marte. Todos ellos poseen una corteza rocosa y una densidad media entorno a $5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ (5 veces más que el agua) y en ellos abundan el hierro y los silicatos. Asimismo, la mayoría de ellos cuentan también con atmósferas secundarias, constituidas después de la formación de los planetas y dominadas por los gases CO_2 , H_2O , N_2 y, en el caso de la Tierra, O_2 debido a los procesos biológicos.

El otro grupo de planetas corresponde al de los denominados *jovianos* o *gigantes* o *gaseosos*, y cuyo máximo representante es Júpiter. Aparte de este, integran el grupo Saturno, Urano y Neptuno. Estos planetas carecen de superficie sólida y poseen atmósferas muy importantes de origen primario, es decir, formadas a la vez que los planetas. Fuertes vientos meridionales dan lugar a la aparición de sistemas de bandas y nubes, como es característico en Júpiter y Saturno. La densidad media de estos planetas ronda 10^3 kg/m^3 y se componen sobre todo de H_2 , He, NH_3 . Asimismo comparten el rasgo de contar con sistemas de anillos más o menos desarrollados que rodean estos planetas en el plano ecuatorial.

Los planetas presentan las siguientes características comunes:

- Todos los planetas se mueven, en su traslación alrededor del Sol, en el mismo sentido de giro, llamado **sentido directo**, de oeste a este, y que se corresponde con el contrario de las agujas del reloj cuando se observa el sistema desde el norte.
- El Sol y los planetas rotan sobre sí mismos en el mismo sentido directo, con las excepciones de Venus y Urano.
- Los planetas, salvo Mercurio, siguen órbitas coplanarias (plano de la eclíptica).
- Las órbitas planetarias son aproximadamente circulares, con excentricidades muy pequeñas. Sólo Mercurio se escapa a esta regla.
- Las órbitas presentan un espaciado regular que sigue aproximadamente la **ley de Titius-Bode**. Esta ley, enunciada en el siglo XVIII, puede expresarse mediante la fórmula

$$a = 0.4 + 0.3 \times 2^n \quad n = -\infty, 0, 1, 2, \dots, \quad (10.8)$$

donde a es el semieje de la órbita expresado en unidades astronómicas,³ y

³Ver nota al pie de página 2 para la definición de unidad astronómica.

Tabla 10.2 Características principales de los planetas del Sistema Solar.

Planeta	Diámetro ecuatorial ^a	Masa ^a	Radio orbital (au)	Periodo orbital (años)	Periodo de rotación (días)	Satélites naturales
Mercurio	0.382	0.06	0.38	0.241	58.6	0
Venus	0.949	0.82	0.72	0.615	243	0
Tierra	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1
Marte	0.53	0.11	1.52	1.88	1.03	2
Júpiter	11.2	318	5.20	11.86	0.414	63
Saturno	9.41	95	9.55	29.46	0.426	61
Urano	3.98	14.6	19.22	84.01	0.718	27
Neptuno	3.81	17.2	30.06	164.79	0.671	13

^aLos valores del diámetro ecuatorial y de la masa son relativos a los de la Tierra.

$n = -\infty$ es el valor que corresponde a Mercurio, $n = 0$ a Venus, etc. Esta ley no se ajusta a todos los planetas (Neptuno está mucho más cerca de lo que predice esta ley).

- La mayoría de los satélites tienen rotaciones sincrónicas, es decir, sus periodos orbitales alrededor del planeta coinciden con los periodos de rotación. Esto se debe a los efectos de marea ejercidos por los cuerpos entre sí, que tienden a ir frenando los periodos de rotación. Además los satélites suelen seguir órbitas en el mismo sentido de rotación de sus planetas, y acostumbran a tener los planos orbitales cerca de los planos ecuatoriales planetarios.

Las características principales de los planetas del Sistema Solar se resumen en la Tabla 10.2.

En la reunión de Praga de Unión Astronómica Internacional en 2006, se creó una nueva clase de planeta, los **planetas enanos**, que a diferencia de los planetas, no han limpiado la vecindad de su órbita. Los cinco planetas enanos del sistema solar ordenados por proximidad al Sol son Ceres, que se encuentra en el cinturón de asteroides, Plutón, Haumea, Makemake y Eris. Estos cuatro últimos se encuentran más allá de Neptuno. Las principales características de los planetas enanos se resumen en la Tabla 10.3.

10.1.4.2 Asteroides

Los asteroides son planetas pequeños del Sistema Solar que giran alrededor del Sol, principalmente entre las órbitas de Marte y Júpiter. La mayoría de ellos dista del Sol entre 2.2 y 3.3 au y forman el denominado **cinturón de asteroides**.

El descubrimiento de los asteroides estuvo asistido por la ley de Titius-Bode. La fórmula preveía para el valor $n = 3$ que a una distancia de 2.8 au del Sol debía haber un planeta. Muchos astrónomos de la época (siglo XVIII) emprendieron la búsqueda del misterioso planeta hasta que en 1801 Giuseppe Piazzi descubrió Ceres, con un

Tabla 10.3 Características principales de los planetas enanos del Sistema Solar.

Planeta enano	Diámetro medio ^a	Masa ^a	Radio orbital (au)	Periodo orbital (años)	Periodo de rotación (días)	Satélites naturales
Ceres	0.074	0.00016	2.766	4.599	0.3781	0
Plutón	0.22	0.82	39.482	247.92	6.3872	3
Haumea	0.09	0.0007	43.335	285.4	0.167	2
Makemake	0.12	0.0007	45.792	309.9	?	0
Eris	0.19	0.0028	67.668	557	?	1

^aLos valores del diámetro medio y de la masa son relativos a los de la Tierra.

diámetro de unos 1000 km. Como hemos visto anteriormente, Ceres, originalmente considerado un asteroide, ha sido elevado a la categoría de planeta enano. En 1802 se halló Pallas, en 1804 se descubrió Juno y en 1807 Vesta, tres de los principales asteroides del cinturón. Hasta ahora se han descubierto más de 10000 asteroides, y cada año se siguen descubriendo muchas decenas. Se cree que el número total de asteroides podría llegar hasta el millón, una cantidad considerable, aunque debe tenerse en cuenta que su masa total no llega a rebasar la de la Luna. Digamos por último que los asteroides orbitan en la misma dirección que los planetas, con periodos que van desde 3.5 hasta 6 años.

10.1.4.3 Cometas

Los cometas son pequeños aglomerados de hielos de diversa composición, como agua, monóxido de carbono, dióxido de carbono (CO₂), metanol (CH₃OH), etc., mezclado con polvo de metales y silicatos, y cuyas dimensiones ascienden a unas decenas de kilómetros.

Los cometas se mueven en órbitas muy excéntricas alrededor del Sol, con periodos que pueden ir desde unos cuantos años hasta bastantes miles de años. Algunos cometas, incluso, siguen órbitas hiperbólicas que, al ser abiertas, los hacen pasar tan sólo una vez por el perihelio.

Los hielos del núcleo de un cometa, mezclados con impurezas como el metano y el amoníaco, se mantienen inertes cuando el cometa transita por las regiones externas del Sistema Solar, lejos del Sol, donde las temperaturas son muy bajas. Cuando el astro se acerca al Sol, los hielos empiezan a sublimarse y arrastran consigo partículas de polvo. Así se forma una débil atmósfera alrededor del núcleo cometario, que recibe el nombre de *cabellera* o *coma*. Debido a su escasa masa, el núcleo es incapaz de retener esta atmósfera, que se dispersa en el espacio interplanetario. La acción del Sol sobre esta atmósfera determina la formación de dos colas: la *cola de polvo* y la *cola iónica* (ver Fig. 10.13).

La cola de polvo está formada por granos de polvo arrastrados por la sublimación del hielo, y acelerados por el impacto de los fotones de la radiación solar. Esta cola



Fig. 10.13 Imagen del cometa Hale-Bopp obtenida el 15 de marzo de 1997. La cola iónica se extiende a partir del núcleo hacia la parte superior derecha, mientras que la cola de polvo se prolonga por debajo, hacia la derecha.

muestra un tono amarillento debido al reflejo de la luz solar en estos granos. La forma de esta cola es muy curvada. La cola iónica consiste en iones procedentes de la disociación de las moléculas de la atmósfera cometaria, debido a la radiación ultravioleta solar. Al tratarse de partículas cargadas, son arrastradas por el campo magnético solar, conducido por el viento solar en dirección opuesta al Sol.

La nube de Oort y el cinturón de Kuiper

Para explicar el origen de los cometas se ha propuesto la existencia de zonas del Sistema Solar exterior, más allá de la órbita de Neptuno, pobladas con gran cantidad de cuerpos helados. Jan Oort, astrónomo holandés, determinó en 1950, a partir de cálculos detallados de las órbitas cometarias, la existencia de una nube inmensa con unos 10^{11} ó 10^{12} cuerpos de hielo orbitando el Sol a una distancia de entre 50000 au y 100000 au. Esta es la denominada **nube de Oort**. La masa total contenida en esta nube se estima semejante a la del planeta Júpiter. La nube, cuando sufre la perturbación gravitatoria debida al paso de alguna estrella cercana, deja caer en dirección al centro del Sistema Solar algunos de estos cuerpos. Esta es la fuente de los cometas de largo periodo que tienen, en general, grandes inclinaciones orbitales. La nube se formó a partir de pequeños objetos condensados cerca de los planetas gigantes que fueron expulsados del Sistema Solar interno por perturbaciones gravitatorias. Algunos no recibieron velocidad suficiente para abandonar el sistema para siempre y pasaron a formar la nube de Oort.

Los cometas de periodo corto, que en general presentan inclinaciones orbitales reducidas, no pueden ser explicados por la existencia de la nube de Oort. Por eso Gerard Kuiper propuso en 1950 la existencia del **cinturón de Kuiper**. Este cinturón ocupa una región situada más allá de la órbita de Neptuno, entre 30 y 100 au del Sol, y contiene pequeños cuerpos helados. En 1993, los astrónomos J. Luu y D. Jewitt descubrieron dos objetos pequeños situados a unas 40 au del Sol

y con periodos de 291 años. Estos cuerpos de hielo supusieron la primera prueba observacional del cinturón.

Se ha estimado que el cinturón de Kuiper contiene alrededor de 35000 objetos con diámetros de más de 100 km. Se cree que sus componentes se condensaron lejos de los planetas gigantes y que no sufrieron perturbaciones. Sin embargo, ocasionalmente ocurre que uno de esos objetos sufre un empujón gravitatorio debido a los grandes planetas y se ve expulsado bien hacia el exterior, o bien hacia el interior del Sistema Solar. El asteroide 2060 Quirón, que se encuentra orbitando entre Júpiter y Neptuno y que ha mostrado actividad cometaria, podría ser uno de estos cuerpos arrancados del cinturón de Kuiper. Digamos por último, que algunos astrónomos piensan incluso que Plutón y Caronte,⁴ y también algunos satélites helados de los grandes planetas, son en realidad miembros escapados del cinturón de Kuiper.

10.2 Las estrellas

Las estrellas son sin duda uno de los astros más fascinantes del firmamento. En esta sección describiremos sus principales características, incluyendo su formación y evolución a lo largo del tiempo.

10.2.1 *Parámetros estelares*

Los principales parámetros que determinan las características de una estrella, además de la composición química, son la masa, el radio y la luminosidad. Como los dos últimos, según veremos más adelante, guardan relación con la temperatura efectiva, ésta suele tomarse como uno de los parámetros. La medición de estos parámetros es uno de los problemas principales en astrofísica estelar observacional. A continuación comentaremos brevemente los fundamentos en los que se basa la medición de estos parámetros, así como sus rangos de variación.

10.2.1.1 *Masa*

La determinación de las masas de las estrellas se basa en la tercera ley de Kepler, de modo que sólo puede aplicarse a sistemas binarios, es decir, dos estrellas que giran alrededor del centro de masas común. En tales casos se tiene que

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{GM}{4\pi^2}, \quad (10.9)$$

donde a es el semieje mayor del movimiento relativo, P el periodo orbital y M la masa total del sistema $M = M_1 + M_2$.

Por fortuna, el número de sistemas binarios es muy elevado. El 50% de las estrellas forman parte de sistemas múltiples, es decir, sistemas formados por dos o

⁴Caronte es el satélite más grande de Plutón.

más estrellas. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que no todos ellos son útiles para la determinación de las masas, porque para ello hay que conocer el periodo orbital y el semieje mayor de la órbita relativa. En muchos casos no puede llegarse a determinar la masa de cada una de las componentes del sistema binario, sino sólo combinaciones de ambas que proporcionan cotas inferiores a las masas individuales.

El rango teórico para las masas posibles de las estrellas va desde $0.08 M_{\odot}$ hasta alrededor de $100 M_{\odot}$ (M_{\odot} = masa del Sol). El límite inferior corresponde a la masa mínima para desencadenar la fusión del hidrógeno, mientras que el límite superior señala el inicio de inestabilidades que conducirían a la expulsión de masa. Las observaciones concuerdan con estos límites.

10.2.1.2 *Luminosidad*

La luminosidad, definida como la energía total emitida por unidad de tiempo, es la característica más utilizada para clasificar las estrellas. Aunque la determinación de la luminosidad absoluta presenta problemas como consecuencia de la necesidad de conocer la distancia al objeto, no ocurre lo mismo con la luminosidad aparente (o brillo), que es la energía por unidad de tiempo que nos llega a la Tierra y es la cantidad que se mide de forma directa.

Para las estrellas con distancia conocida es posible obtener la luminosidad absoluta si se mide la aparente. En términos de luminosidad solar ($L_{\odot} = 3.845 \times 10^{26}$ W), la luminosidad de las estrellas varía entre $L \approx 10^{-4} L_{\odot}$ y $L \approx 10^6 L_{\odot}$.

Hay que remarcar que una estrella no emite toda su energía en forma de luz visible, ni siquiera en forma de radiación electromagnética. Puede emitir, además, neutrinos y partículas materiales (viento estelar). Por otra parte, la luminosidad de una estrella varía con el tiempo. Cuando estos cambios de luminosidad son grandes y ocurren en intervalos temporales lo bastante breves como para ser detectables, entonces se habla de estrellas variables. Estos cambios rápidos pueden deberse a pulsaciones, rotaciones, explosiones, etc., que se producen en algunas etapas de la evolución de una estrella.

Digamos por último que la zona del espectro electromagnético donde una estrella emite la mayor cantidad de energía es independiente de la luminosidad de la estrella y tan sólo depende de la temperatura.

10.2.1.3 *Temperatura efectiva*

La temperatura efectiva T_e de una estrella se define como la temperatura que debería tener un cuerpo negro con el mismo radio que la estrella para que emitiera la misma luminosidad. Recurriendo a la ley de Stefan-Boltzmann para un cuerpo negro, se tiene que

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4, \quad (10.10)$$

donde R es el radio de la estrella.

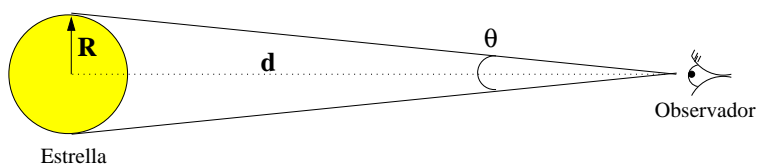


Fig. 10.14 Determinación del radio de una estrella a partir del diámetro angular.

El rango de variación de las temperaturas efectivas de las estrellas va de $T \approx 2000$ K a $T \approx 40000$ K, aunque este rango se ve sobrepasado enormemente en el caso de estrellas compactas como las estrellas de neutrones.

Aunque las estrellas no emitan como cuerpos negros y, por tanto, la ley de Wien no pueda aplicarse con exactitud, las más calientes emiten energía sobre todo en longitudes de onda cortas, mientras que las más frías lo hacen en longitudes de onda largas. En consecuencia, se tiene que las estrellas de alta temperatura efectiva muestran un tono azulado, mientras que las de temperatura efectiva baja se ven más bien rojizas.

10.2.1.4 Radio

La determinación directa del radio de una estrella requiere conocer su diámetro angular θ y la distancia d (ver Fig. 10.14). Así, se tiene

$$R = \frac{d\theta}{2}, \quad (10.11)$$

donde θ se expresa en radianes.

La medición de θ resulta difícil porque este ángulo suele ser muy pequeño. Las técnicas interferométricas han permitido determinar el valor θ para algunas estrellas y, a partir de la distancia obtenida por paralaje, determinar el radio. El radio de una estrella puede estimarse a partir de la ec. (10.10) si se conocen T y L .

Los radios de las estrellas van desde unas décimas del radio solar para los astros tardíos (enanas blancas) hasta más de $1000 R_{\odot}$ para estrellas gigantes, aunque las estrellas compactas, como las de neutrones, pueden tener tan solo 10 km de radio.

10.2.2 Clasificación espectral

El espectro de una estrella contiene numerosas líneas de absorción causadas por transiciones atómicas. Hoy en día se utilizan las letras O B A F G K M para denotar los diferentes *tipos espectrales*.

Cuando las líneas espectrales se interpretan en términos de transiciones atómicas, y después de que el físico indio Meghnad N. Saha relacionara la intensidad de las líneas con la temperatura, se establece una relación entre el tipo espectral y la temperatura efectiva de las estrellas. La Tabla 10.4 muestra el rango de tem-

peraturas correspondiente a cada tipo espectral, así como las líneas espectrales más importantes y el color de las estrellas. Por su parte, la Fig. 10.15 da una idea del aspecto visual (color) de los diversos tipos espectrales.

Tabla 10.4 Tipos espectrales de estrellas.

Tipo espectral	Temperatura (K)	Líneas espectrales	Color
O	≥ 25000	He II, átomos muy ionizados	azul
B	11000-25000	He y, H y, O II, C II	blanco azulado
A	7500-11000	H I muy intensa	blanco
F	6000-7500	Fe II, Cr II, Ti II	blanco amarillento
G	5000-6000	metales neutros	amarillo
K	3500-5000	metales neutros, moléculas	anaranjado
M	2200-3500	bandas moleculares de TiO, metales neutros	rojo

El símbolo II indica que el átomo correspondiente está ionizado (le falta un único electrón).

Los tipos espectrales correspondientes a las temperaturas más elevadas (O y B) se denominan *tempranos*, mientras que los de temperaturas bajas (K y M) se llaman *tardíos*. Cada tipo espectral se divide en 10 subtipos y así tenemos, por ejemplo, M0, M1, M2, etc. Sin embargo, no se emplean todas las divisiones y, además, en algunos tipos se utilizan decimales (O9.5, B0.5). El Sol, por ejemplo, es de tipo G2.

10.2.3 Diagrama de Hertzsprung-Russel

En 1911 el astrónomo danés Ejnar Hertzsprung e, independientemente, el estadounidense Henry Norris Russel en 1913, representaron una muestra de estrellas cercanas al Sol en un diagrama en cuyas abscisas se indicaba el tipo espectral (o la temperatura efectiva) y en ordenadas la magnitud absoluta.⁵ Lo que encontraron no fue una nube dispersa de puntos, sino regiones bien diferenciadas con gran den-

⁵La magnitud absoluta M es una cantidad relacionada con la luminosidad absoluta L que se define como $M \equiv -2.5 \log(L/L_0)$, donde L_0 es una luminosidad de referencia que fija el origen de la escala de magnitudes absolutas.

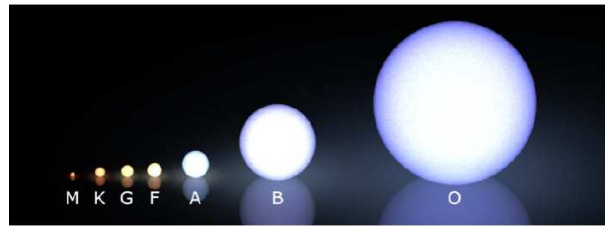


Fig. 10.15 Clasificación de las estrellas de acuerdo a su tipo espectral. Esta figura también muestra el hecho de que las estrellas más calientes son más grandes (siempre dentro de la secuencia principal).

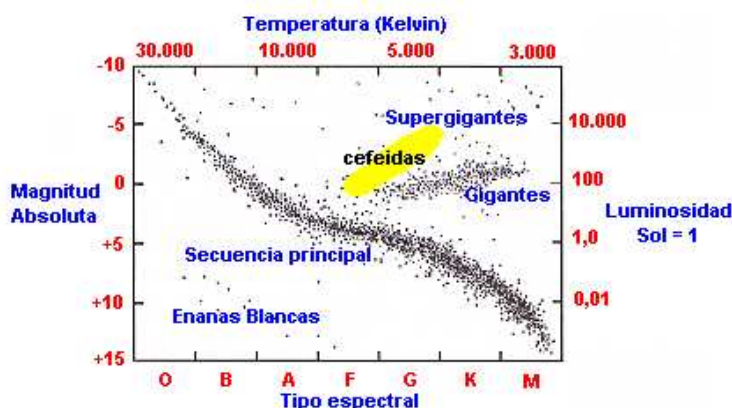


Fig. 10.16 Diagrama de Hertzsprung-Russel donde se muestra la magnitud absoluta de las estrellas como función del tipo espectral. Además, en el eje de abscisas superior se muestra la temperatura que corresponde a los diversos tipos espectrales, mientras que el eje de ordenadas de la derecha muestra la correspondiente luminosidad absoluta en unidades de L_{\odot} . En el gráfico se indican también los diversos tipos de estrellas que se encuentran en las diferentes regiones del diagrama.

sidad de puntos. La Fig. 10.16 muestra un esquema de este diagrama, denominado **diagrama de Hertzsprung-Russel** o **diagrama H-R**.

En el diagrama H-R se distinguen claramente tres regiones con mucha densidad de estrellas. La banda que atraviesa diagonalmente el diagrama se llama **secuencia principal**. Las estrellas de arriba a la derecha son las **gigantes rojas**, y las que ocupan la parte inferior izquierda se llaman **enanas blancas**. El Sol es una estrella media en la secuencia principal. Betelguese (ver Fig. 10.17(b)), por ejemplo, es una supergigante roja con un radio de $600 R_{\odot} \approx 3 \text{ au}$, es decir, aproximadamente tres veces el radio de la órbita terrestre. Su temperatura efectiva es de 3250 K. Sirio B, por el contrario, con un radio de $0.008 R_{\odot}$ y una temperatura efectiva de 27000 K, es una enana blanca (ver Fig. 10.17(c)). Como discutiremos en la sección 10.2.6, las tres regiones principales en el diagrama H-R corresponden a tres etapas distintas en la evolución de una estrella.

10.2.4 Relación masa-luminosidad

La luminosidad absoluta de una estrella está íntimamente ligada a su masa. De hecho, se ha encontrado que para las estrellas de la secuencia principal existe la siguiente relación empírica masa-luminosidad:

$$L \propto M^{\nu} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \nu = 2.5 & M < 0.5M_{\odot} \\ \nu = 3.0 & M > 0.5M_{\odot}. \end{cases} \quad (10.12)$$

Esta relación permite determinar el tiempo de vida de una estrella. Dado que la energía E que puede extraerse de una estrella es proporcional a su masa, y que

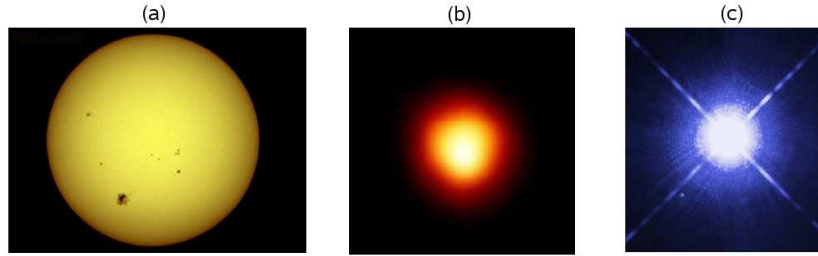


Fig. 10.17 (a) El Sol, una estrella mediana en la secuencia principal. (b) Imagen de Betelgeuse, una estrella supergigante roja, obtenida con el telescopio espacial Hubble. (c) Imagen tomada por el telescopio espacial Hubble del sistema binario Sirio. La enana blanca Sirio B es el punto situado en la parte inferior izquierda de la imagen. La estrella más brillante es Sirio A, una estrella de la secuencia principal.

el ritmo al que se consume esta energía es igual a la luminosidad de la estrella L , el tiempo que tardará la estrella en consumir su energía será $\tau = E/L$, y vendrá dada por

$$\tau \propto \frac{M}{M^\nu} = M^{1-\nu}, \quad (10.13)$$

es decir, como $\nu > 1$, cuanto mayor sea la masa antes se agotará el combustible nuclear. Si tomamos estrellas con $M > 0.5M_\odot$, entonces se tiene

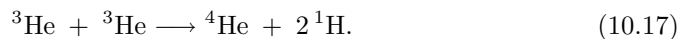
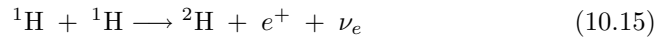
$$\frac{\tau}{\tau_\odot} = \left(\frac{M_\odot}{M}\right)^2. \quad (10.14)$$

Vemos, por tanto, que un estrella 10 veces más masiva que el Sol durará unas 100 veces menos que éste. Como el tiempo de vida de una estrella como el Sol es 10^{10} años, el tiempo de vida de una estrella de $10M_\odot$ será de unos 10^8 años; y para una estrella de $50M_\odot$ se deduce una vida de 4×10^6 años, es decir, tan solo unos millones de años.

10.2.5 Fuentes de energía estelar

La fuente de energía que hace que las estrellas brillen durante largos periodos de tiempo sin cambios apreciables de luminosidad, no se descubrió hasta finales de los años 30 del siglo XX. Hans A. Bethe, Charles L. Critchfield e, independientemente, Carl F. von Weizsäcker descubrieron las reacciones nucleares que tienen lugar en el interior de las estrellas y que transforman el hidrógeno en helio.

Al igual que el Sol (ver 10.1.3.2), las estrellas de la secuencia principal (estrellas poco evolucionadas) consumen hidrógeno y lo transforman en helio siguiendo la cadena de reacciones conocida como *cadena protón-protón* o *cadena pp*, que recordamos a continuación:



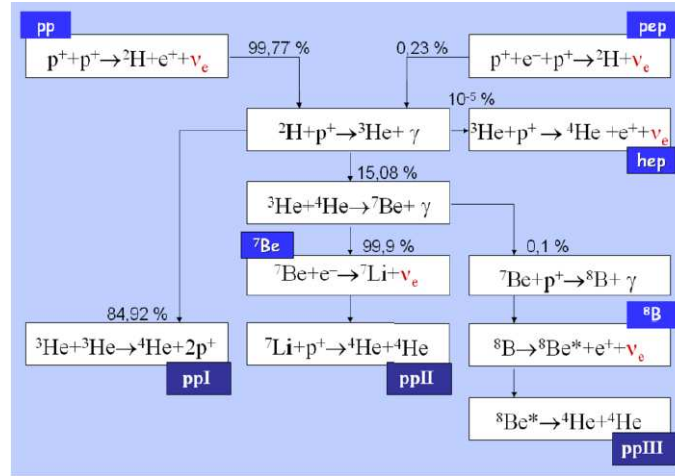
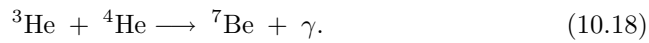


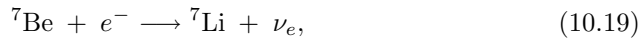
Fig. 10.18 Diversas variantes de la cadena protón-protón que tienen lugar en las estrellas de la secuencia principal.

El resultado final de esta cadena de reacciones es la transformación de 4 núcleos de ${}^1\text{H}$ en uno de ${}^4\text{He}$, con la consiguiente liberación de energía y dos neutrinos, que se escapan. Por cada núcleo de helio formado se libera una energía de 26.73 MeV. Los neutrinos se llevan 0.52 MeV, de manera que la energía neta liberada al producir un núcleo de helio es de 26.21 MeV. Para que se produzcan estas reacciones se requiere una temperatura de unos 10^7 K, que se alcanzan durante el colapso gravitatorio durante el proceso de formación de la estrella (ver siguiente sección).

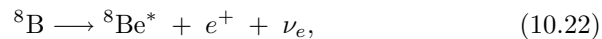
En realidad dependiendo de la temperatura interior de la estrella, se pueden dar otras reacciones que transforman el hidrógeno en helio. Algunas son variantes de la que se acaba de describir, conocida a veces como *ppI*. Las otras dos se denominan *ppII* y *ppIII* (ver Fig. 10.18). Para que se produzcan se requiere ${}^4\text{He}$, ya que la reacción que inicia estas variantes es



Una vez producido el ${}^7\text{Be}$, puede reaccionar con un electrón o con un protón. En el primer caso se tiene la cadena *ppII*, que acaba con las reacciones siguientes:



mientras que si el ${}^7\text{Be}$ captura un protón se obtienen las reacciones con las que termina la cadena *ppIII*



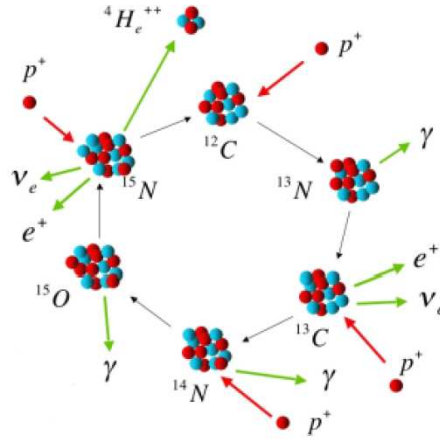


Fig. 10.19 El ciclo CNO mediante el cual estrellas masivas convierten hidrógeno en helio.

donde el asterisco en el símbolo del ^8Be indica que se forma un núcleo en estado excitado. El núcleo de ^4He , utilizado en la reacción con el ^3He , actúa en las cadenas $pp\text{II}$ y $pp\text{III}$ únicamente como catalizador de las reacciones, ya que se vuelve a liberar en el último paso de ambas cadenas.

También puede transformarse hidrógeno en helio mediante el *ciclo CNO*, en el que algunos de núcleos más pesados, como ^{12}C , ^{14}N y ^{16}O , actúan como catalizadores. Las complejas reacciones que llevan a quemar hidrógeno mediante el ciclo CNO se muestran en la Fig. 10.19. Este ciclo adquiere más importancia cuando la temperatura es más elevada que la que tiene lugar en núcleo del Sol y, por tanto, resulta más relevante en estrellas de gran masa.

El proceso de quemar hidrógeno se detendrá cuando se agote el combustible, es decir, cuando la mayor parte del hidrógeno disponible se haya convertido en helio. Cuando esto sucede, la temperatura todavía no es lo bastante elevada como para que se desencadene la combustión del helio, pero si aumenta, llegará un momento en el que el helio empiece a quemarse. Esto ocurre cuando la temperatura alcanza unos 10^8 K. La combustión de helio se produce mediante la reacción *triple α* (ver Fig. 10.20), que consiste en el par de reacciones siguientes:



El berilio ^8Be que se forma es inestable y se desintegra en dos núcleos de ^4He , de ahí que se utilice el símbolo \rightleftharpoons , que indica que la reacción puede suceder en ambos sentidos. Aunque el tiempo de vida del ^8Be es muy corto (2.6×10^{-16} s), algunos núcleos tienen la ocasión de reaccionar antes de desintegrarse y producen así ^{12}C .

En estrellas masivas, después de consumir el helio se pueden producir otras reacciones que de forma progresiva convierten elementos ligeros en elementos cada vez más pesados hasta llegar al ^{56}Fe , que es el núcleo más estable. Los elementos

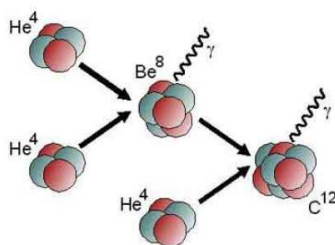


Fig. 10.20 Proceso triple α mediante el cual helio se transforma en carbono en el núcleo de las estrellas.

más pesados que el hierro se forman a partir de capturas de neutrones en los procesos s (slow) y r (rapid). Los procesos s se producen cuando el flujo de neutrones es pequeño y, entre dos capturas consecutivas, el núcleo se desintegra emitiendo un electrón y un antineutrino (desintegración beta). Estos procesos pueden producirse durante las fases tranquilas de la evolución estelar. Los procesos r , en cambio, requieren un gran flujo de neutrones para que un mismo núcleo capture más de un neutrón antes de desintegrarse. Estas capturas rápidas pueden darse cuando la estrella explota en forma de supernova.

10.2.6 Evolución estelar

Las estrellas sufren una compleja evolución a lo largo de su “vida” que depende en particular de su masa. En esta sección describiremos brevemente dicha evolución.

10.2.6.1 Formación estelar

Las estrellas se forman a partir de nubes de gas y polvo que, a causa de la fuerza de la gravedad, empiezan a colapsarse. El colapso se detiene cuando la presión del gas contrarresta la gravitación (equilibrio hidrostático). Durante este proceso el interior de la protoestrella se contrae y su temperatura aumenta enormemente, hasta alcanzar la temperatura necesaria como para iniciar las reacciones termonucleares. El tiempo necesario para llegar a esta nueva etapa evolutiva depende de la masa de la estrella. Para una estrella como el Sol, se requiere unas decenas de millones de años, mientras que para una estrella de $15 M_{\odot}$ ese tiempo es de tan solo 50000 años y estrellas de $0.1 M_{\odot}$ llegan a la secuencia principal en algunos centenares de millones de años.

No todos los objetos que se forman por colapso gravitatorio en el seno de nubes de gas llegan a la secuencia principal, es decir, a formar una estrella verdadera. Si la masa colapsada es inferior a $0.08 M_{\odot}$, la temperatura no aumenta lo suficiente como para quemar el hidrógeno, ya que el gas se torna degenerado (presión independiente de la temperatura) y la temperatura comienza a decrecer antes de alcanzar el punto de ignición. Cuando paso eso, se ha formado una **enana marrón** que brilla en el

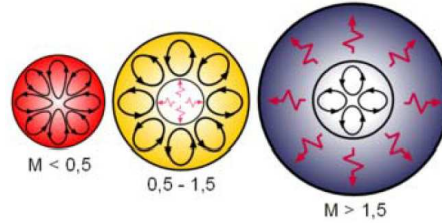


Fig. 10.21 Estructura interna de las estrellas en la secuencia principal. Las zonas convectivas se indican líneas cerradas con flechas y las zonas radiativas se indican con flashes. En la izquierda se muestra una estrella de masa pequeña, en el medio una de masa mediana y a la derecha una estrella masiva.

infrarrojo. Por otra parte, si la masa es muy grande ($M > 100M_{\odot}$), la aparición de inestabilidades en la etapa de contracción producirá la expulsión de materia.

10.2.6.2 Etapa en la secuencia principal

Una vez en la secuencia principal, las estrellas obtienen energía de las reacciones nucleares que se producen en el núcleo y que transforman hidrógeno en helio. Esta energía es la misma que abandona la estrella a través de su superficie.

Las características esenciales de las estrellas que llegan a la secuencia principal dependen de la masa. Así, las estrellas con masas superiores a $1.5 M_{\odot}$ presentan un núcleo convectivo que es mayor cuando mayor sea la masa de la estrella. Por el contrario, las estrellas de menor masa ($< 1 M_{\odot}$) desarrollan una envoltura convectiva que es mayor cuanto menor sea la masa de la estrella (ver Fig. 10.21).

El tiempo característico de permanencia en la secuencia principal para estrellas de $15 M_{\odot}$ es de unos 10 millones de años. Para una estrella como el Sol, este tiempo es de unos 10000 millones de años, mientras que para una estrella de $0.25 M_{\odot}$ llega a 70000 millones de años (mayor que la edad del universo).

10.2.6.3 Evolución a gigante roja

Cuando disminuye la cantidad de hidrógeno en el núcleo de la estrella a causa de la conversión en helio, la estrella se va alejando de la secuencia principal y se dirige hacia la zona del diagrama H-R de menor temperatura (roja) y de mayor radio (gigante). Para estrellas de poca masa ($M < 2.3 M_{\odot}$) esta transición es gradual y los cambios se producen en tiempos relativamente grandes. Las estrellas de más masa experimentan una transición mucho más rápida y cuesta encontrar estrellas que estén pasando por esta fase. La transición se produce debido a una contracción del núcleo y una expansión de la envoltura gaseosa. La estrella desarrolla una envoltura convectiva que crece en masa y en radio, y la luminosidad de la estrella aumenta considerablemente. La estrella se convierte así en una **gigante roja**.

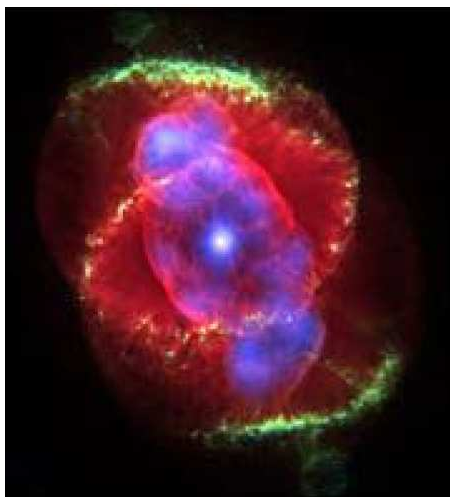


Fig. 10.22 La nebulosa Ojo de gato es una nebulosa planetaria que se formó tras la muerte de una estrella de masa similar a la del Sol. El punto luminoso en el centro señala la ubicación del remanente estelar.

10.2.6.4 Últimas etapas evolutivas

La evolución posterior de la estrella depende mucho de su masa. A continuación vamos a discutir las diversas posibilidades.

Nebulosa planetaria + enana blanca ($M < 9 - 10 M_{\odot}$)

Las estrellas de masa inferior a 9-10 masas solares expulsan sus capas exteriores durante la fase de gigante roja y, sobre todo, la fase de rama asintótica gigante (las de más de 0.5 masas solares). El remanente estelar resultante es el núcleo degenerado desnudo de la estrella, con una composición rica en carbono y oxígeno en la mayoría de los casos (aunque para las estrellas de menor masa el elemento dominante es el helio y para las de mayor masa también puede haber neón). Dicho remanente es una **enana blanca** y su superficie está inicialmente a temperaturas muy elevadas, del orden de 100000K.

La radiación emitida por la estrella ioniza las capas recientemente expulsadas, dando lugar a una nebulosa de emisión del tipo **nebulosa planetaria**. Así pues, las estrellas aisladas de masa baja e intermedia acaban sus vidas de una forma relativamente poco violenta. La nebulosa planetaria es observable mientras la enana blanca es lo suficientemente caliente como para ionizar el hidrógeno que es su componente principal (ver Fig. 10.22); este periodo dura unos 10000 años. Las enanas blancas se enfrían rápidamente al principio, pero la tasa se ralentiza después. Una enana blanca no tiene fuentes de energía propias (excepto durante el periodo de cristalización), por lo que su luminosidad procede de su energía térmica almacenada. Así,

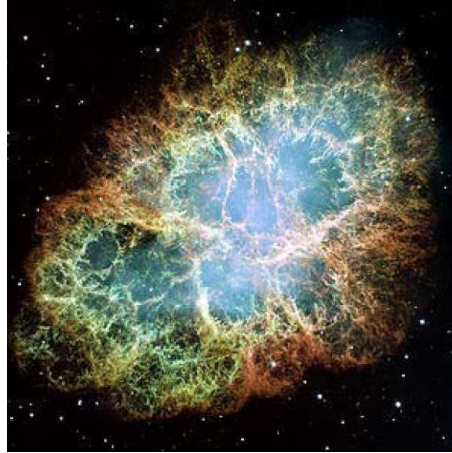


Fig. 10.23 La Nebulosa del Cangrejo es un resto de supernova resultante de la explosión de una estrella en 1054.

poco a poco se irá apagando hasta llegar a convertirse en una **enana negra**. No obstante, el tiempo necesario para ello es tan largo que ninguna enana blanca, ni siquiera las formadas al principio de la historia del universo, ha llegado hasta esa fase.

Supernova/estrella de neutrones/agujero negro ($M > 9 - 10M_{\odot}$)

Las estrellas de más de 9-10 masas solares evolucionan a través de todas las fases de combustión hasta llegar al “pico del hierro” para agotar así toda la energía potencial nuclear de que disponen. Las últimas fases de quemado transcurren cada una más rápidamente que la anterior hasta llegar a la fusión del silicio en hierro, que tiene lugar en una escala de días. El núcleo, incapaz de generar más energía, no puede aguantar su propio peso ni el de la masa que tiene por encima, por lo que colapsa. Durante la contracción gravitatoria final se producen una serie de reacciones que fabrican multitud de átomos más pesados que el hierro mediante procesos de captura de neutrones y de protones.

Dependiendo de la masa de ese núcleo inerte el remanente que quedará será una **estrella de neutrones** o un **agujero negro**. Cuando el remanente inicial sea una estrella de neutrones, una onda de choque se propagará por las capas exteriores, las cuales saldrán rebotadas hacia fuera. Dichas capas reciben además un excedente de energía de las reacciones nucleares producidas en el último estertor de la estrella, buena parte de él en forma de neutrinos. La conjunción de esos dos efectos da lugar a una supernova de colapso gravitatorio (supernova de tipo II). En la Fig. 10.23 se muestra la Nebulosa del Cangrejo, que es el resto de una supernova que tuvo lugar hace ya diez siglos.

En función de la masa y de la metalicidad⁶ tenemos cuatro posibles destinos para las estrellas masivas y muy masivas:

- Para la mayoría de las estrellas el remanente inicial será una estrella de neutrones y se producirá una supernova, es decir, una gran explosión.
- Si la masa inicial de la estrella es superior a unas 30 masas solares, parte de las capas exteriores no podrán escapar a la atracción gravitatoria de la estrella de neutrones y caerán sobre ésta provocando un segundo colapso para formar un agujero negro como remanente final. Este segundo colapso produce un brote de rayos gamma.
- En estrellas de masa superior a $40 M_{\odot}$ y baja metalicidad el remanente inicial es un agujero negro, por lo que las capas exteriores no podrían en principio rebotar contra él para producir una supernova. No obstante, los modelos actuales no descartan que se pueda producir una supernova débil, sobre todo si la velocidad de rotación de la estrella es elevada. Este grupo de objetos también produce un brote de rayos gamma.
- Para el infrecuente caso de estrellas de muy baja metalicidad y masa entre $140 M_{\odot}$ y $260 M_{\odot}$ existe una última posibilidad: una explosión de supernova producida por la creación de pares electrón-positrón. En dicho caso la estrella se desintegra por completo sin dejar un remanente.

Mencionemos para acabar algunas de las características de las estrellas de neutrones. Estas estrellas están compuestas principalmente de neutrones, más otro tipo de partículas tanto en su corteza sólida de hierro, como en su interior, que puede contener tanto protones y electrones, como piones y kaones. Una estrella de neutrones típica tiene una masa entre 1.35 y 2.1 masas solares y un radio de entre 10 y 20 km. Si el campo magnético de una estrella de neutrones es lo bastante intenso y la estrella gira alrededor de un eje no alineado con el campo, entonces puede observarse una radiación modulada por la rotación, o sea pulsos de radiación. Este tipo de objeto recibe el nombre de **púlsar** (ver Fig. 10.24).

10.3 Galaxias

Como sabemos, las estrellas junto con otros astros como los planetas están a menudo agrupadas entre sí por medio de la fuerza de la gravedad formando estructuras conocidas como *galaxias*. En esta sección describiremos las características fundamentales de estas gigantescas estructuras. Comenzaremos discutiendo las propiedades básicas de nuestra propia galaxia, la Vía Láctea, seguiremos presentando los diversos tipos de galaxias y acabaremos describiendo cómo se distribuyen y organizan las estrellas dentro de las galaxias.

⁶En este contexto metalicidad se refiere a la concentración en una estrella de elementos químicos más pesados que el helio.



Fig. 10.24 Púlsar de la Nebulosa del Cangrejo. Esta imagen combina imágenes del telescopio espacial Hubble (rojo), e imágenes en rayos X obtenidas por el telescopio Chandra (azul).

10.3.1 La Vía Láctea

En una noche despejada, sin Luna y lejos de las luces de la ciudad, se puede ver una banda de luz difusa que atraviesa una porción importante del cielo. Las culturas antiguas hablaban de un “camino lechoso” entre las constelaciones de estrellas. Hoy en día sabemos que este camino lechoso, que recibe el nombre de *Vía Láctea*, consiste en la visión que nos ofrece desde dentro una estructura en forma de disco que contiene algunos centenares de miles de millones de estrellas: *la Galaxia*.⁷ A continuación presentaremos una introducción a la astronomía galáctica, encargada de estudiar la Galaxia como un todo.

10.3.1.1 La estructura de la Vía Láctea

La Galaxia consta de tres partes principales: el *bulbo* central, que alberga el *núcleo galáctico*, el *disco* y el *halo*. En la Fig. 10.25 podemos ver un esquema de la Galaxia, así como una recreación artística de la misma.

El disco tiene un diámetro de unos 30 kpc⁸ (aproximadamente 10^5 años-luz) y un grosor de 700 pc. El disco está poblado sobre todo de estrellas jóvenes, ricas en metales y a menudo agrupadas en asociaciones y cúmulos abiertos (ver sección 10.3.1.3), aparte de nubes de polvo y de gas interestelar. El Sol forma parte del disco y se encuentra en un brazo espiral, conocido como brazo de Orión, a una distancia de 8.5 kpc del centro galáctico. El Sol, arrastrando consigo al Sistema Solar, orbita alrededor del centro galáctico una vez cada 240 millones de años y se desplaza con una velocidad de 220 km/s.

⁷Utilizaremos indistintamente los términos Vía Láctea y la Galaxia para referirnos a nuestra galaxia.

⁸Recordemos que un pársec (pc) es igual a 3.26 años-luz, es decir, 3.086×10^{13} km.

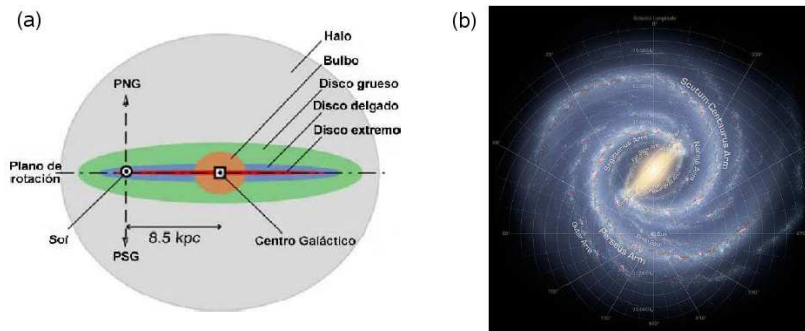


Fig. 10.25 (a) Diagrama de la estructura galáctica. (b) Recreación artística de la Vía Láctea con las escalas y los nombres de los brazos principales.

El movimiento del material (estrellas y materia interestelar) que conforma el disco es muy ordenado; los componentes del disco siguen órbitas casi coplanarias (de ahí su escaso grosor) y poco excéntricas alrededor del centro de la Galaxia. El disco galáctico contiene formaciones llamadas *brazos espirales*. Estos brazos están poblados por multitud de estrellas azuladas de los tipos espectrales O y B. La densidad de todo el material contenido en un brazo (gas, polvo, estrellas) es un 10% mayor que la del material que puebla las zonas entre los brazos. Alrededor del Sol, un tercio de la materia se halla en forma de gas y polvo, mientras que los otros dos tercios corresponden a estrellas.

En contraste con la forma marcadamente aplanada del disco galáctico, las otras dos partes de la Galaxia, bulbo y halo, presentan una simetría casi esférica. Por eso a veces se usa el término *componente esferoidal de la Galaxia* para referirse a bulbo y halo de manera conjunta.

El bulbo ocupa la región central de la Galaxia. Tiene una geometría casi esférica con 5 kpc de diámetro. A él pertenecen estrellas amarillentas más viejas que las del disco. En su centro se observa una fuente que emite intensamente en la región espectral de las ondas de radio. Se trata del objeto que ocupa el centro galáctico, que recibe el nombre de *Sagittarius A*, y que se cree que es un agujero negro supermasivo.

El halo, con forma esférica, envuelve tanto al bulbo como al disco. Tiene un diámetro de 50 kpc. En el halo abundan los cúmulos globulares, que son concentraciones de miles de estrellas viejas y pobres en metales. Estas estructuras son las más antiguas de la Galaxia, con edades que se estiman entre 11000 y 13000 millones de años. En el halo se encuentran también estrellas aisladas en órbitas individuales que giran alrededor del centro de la Galaxia, así como una cierta cantidad de gas, si bien mucho menor que la que se detecta en el disco. Los objetos que pueblan la componente esferoidal (cúmulos globulares y estrellas aisladas) presentan una cinemática poco ordenada; cada cuerpo sigue una órbita independiente alrededor del centro de la Galaxia.

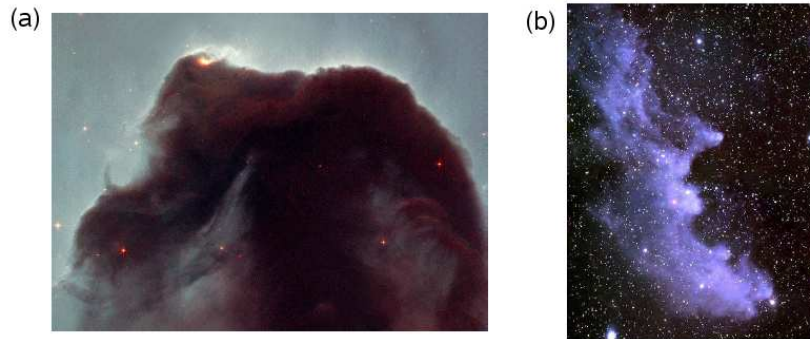


Fig. 10.26 (a) La nebulosa Cabeza de Caballo. Situada en el cinturón de Orión, es una nebulosa oscura con una gran densidad de polvo. (b) La nebulosa de reflexión conocida como Cabeza de Bruja.

10.3.1.2 *El medio interestelar*

El medio interestelar (o fase difusa) de la Galaxia está formado por material disperso que rellena el espacio entre las estrellas. Sus constituyentes son *gas* y *polvo* y forman el 10% de la masa de la Galaxia.

Polvo interestelar

El polvo interestelar consta de granos de silicatos y hielos de dimensiones inferiores a 1 mm. A pesar de su baja densidad, este polvo tiene importancia capital por su influencia en la propagación de la luz que nos llega de las estrellas. Cuando la concentración de granos de polvo es muy alta, la extinción de la luz es tan fuerte que la región aparece como una nube oscura (ver Fig. 10.26(a)). Estas regiones se conocen como *nebulosas oscuras*. Si existe una concentración elevada de polvo en una región iluminada por la emisión de estrellas jóvenes, el esparcimiento de la luz por los granos de este material hace que la región brille por reflexión (ver Fig. 10.26(b)). Se forman así las *nebulosas de reflexión*.

Gas interestelar

El gas interestelar es la componente más importante del medio interestelar. El 70% de este gas es hidrógeno, un 28% helio, y el resto elementos más pesados como el carbono o silicio. El gas interestelar tiende a formar nubes densas de baja temperatura y con gran densidad de polvo. En estas nubes el hidrógeno forma moléculas y la masa contenida en ellas puede llegar a ser de $10^6 M_{\odot}$. Se trata de *nubes moleculares gigantes*. Se cree que las estrellas nacen en este tipo de nubes, cuando una parte de ellas se colapsa debido a inestabilidades gravitatorias.

El gas interestelar que puebla regiones en las que hay estrellas que emiten radiación ultravioleta intensa se ioniza y se forma una región rica en hidrógeno ion-



Fig. 10.27 La nebulosa Rosetón. Situada a unos 3000 años-luz de distancia, se trata de una nebulosa circular de emisión en la constelación del Unicornio.

izado. Estas nebulosas se conocen como *regiones HII*. La recombinación de los electrones hace que la nebulosa brille y suele conferir a estas nebulosas, conocidas por *nebulosas de emisión*, una coloración rojiza. En la Fig. 10.27 se muestra un ejemplo de una de estas nebulosas.

10.3.1.3 Agrupaciones estelares

La mayor parte de la masa de la Galaxia se halla concentrada en forma de estrellas. Las estrellas suelen “vivir” en el seno de familias que reciben el nombre de *agrupaciones estelares*. Se suelen distinguir los siguientes tipos de agrupaciones:

- **Asociaciones estelares:** agrupaciones formadas por algunas decenas de estrellas nacidas a partir de la misma nube interestelar y, por tanto, con la misma composición química y edades muy parecidas. Los miembros de una asociación estelar no se encuentran ligados gravitatoriamente, sino que orbitan de forma independiente alrededor del centro de la galaxia. En consecuencia, las asociaciones estelares se dispersan al cabo de pocos millones de años por todo el disco galáctico.
- **Cúmulos estelares:** agrupaciones de estrellas que se mantienen ligadas entre sí gravitatoriamente. Se suele distinguir entre *cúmulos globulares*, formados por estrellas viejas que se encuentran sobre todo en el halo de la Galaxia, y *cúmulos abiertos o galácticos*, que pueblan el disco de la Galaxia y están constituidos por estrellas jóvenes. En la Fig. 10.28 se pueden ver un ejemplo de un cúmulo globular (panel a) y uno abierto (panel b).

10.3.2 Clasificación de las galaxias

Como sabemos hoy en día, la Galaxia no es la única estructura de su tipo en el universo, sino que existen multitud de sistemas estelares comparables, que reciben

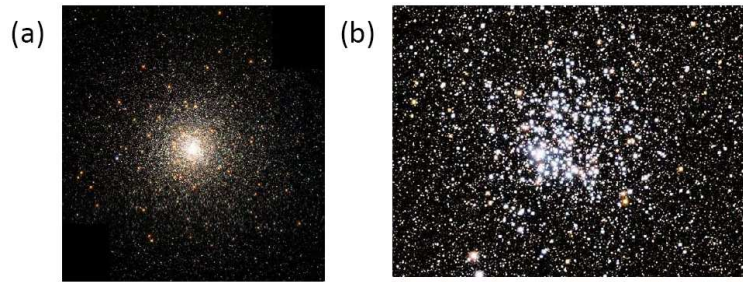


Fig. 10.28 (a) El cúmulo globular M80. (b) Cúmulo estelar abierto M11. Puede observarse su estructura poco densa, formada por estrellas jóvenes y brillantes.

el nombre genérico de *galaxias*. Objetos como la galaxia de Andrómeda o las Nubes de Magallanes son observables a simple vista y, por lo tanto, son conocidos desde hace mucho tiempo, aunque su condición de galaxias tardó en reconocerse. De hecho, la disputa sobre la existencia o no de otras galaxias tardó siglos en dilucidarse y no se zanjó hasta 1924 cuando Edwin Hubble midió la distancia a la “nebulosa”⁹ espiral de Andrómeda, M31. La distancia medida por Hubble ascendía a 275 kpc (900000 años-luz), superior al diámetro de nuestra Galaxia.¹⁰ Posteriormente, Hubble midió la distancia a muchas otras estructuras, hoy conocidas como galaxias, y pudo establecer más allá de toda duda razonable que se encontraban fuera de nuestra Galaxia.

En esta sección presentaremos una breve discusión de los tipos de galaxias existentes, así como de sus características principales.

Hubble propuso en 1926 una clasificación morfológica de las galaxias con tres categorías: *elípticas*, *espirales* e *irregulares*. En la Fig. 10.29 se ilustra la clasificación de las galaxias en la versión de Hubble.

10.3.2.1 Galaxias elípticas

Las galaxias elípticas tienen forma de elipsoide (triaxial) o de esferoide (biaxial). La distribución superficial de la luz emitida por estas galaxias es bastante uniforme, aunque el brillo disminuye progresivamente desde el centro hacia la periferia. En la Fig. 10.30 se muestra un ejemplo de galaxia elíptica. Hubble subdividió las elípticas de acuerdo con la elongación de la imagen aparente proyectada sobre el plano del cielo. Esta imagen se aproxima bastante en todos los casos a una elipse. Si α y β son, respectivamente, los semiejes mayor y menor de la elipse aparente, el grado de

⁹Con este nombre se conocía a las galaxias antes de establecer que eran estructuras que existían fuera de la Vía Láctea.

¹⁰Resulta que Hubble subestimó bastante la distancia a M31, que en realidad es de 725 kpc (2.4 millones de años-luz).

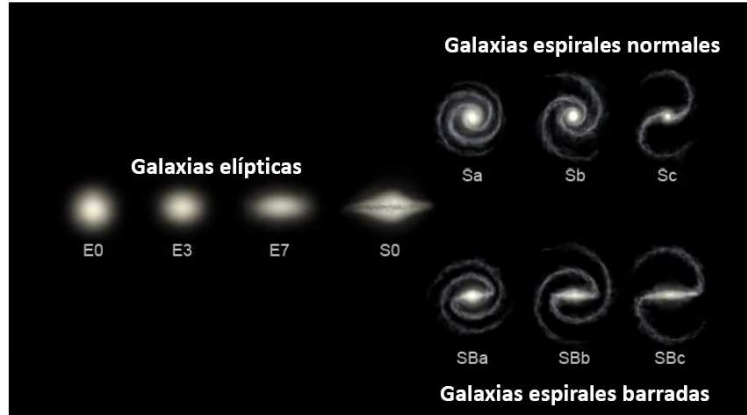


Fig. 10.29 Tipos de galaxias de acuerdo al esquema de clasificación de Hubble.

elongación se expresa como

$$n = 10 \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha} \right). \quad (10.26)$$

Para clasificar las galaxias elípticas se usa la notación En . Así, una galaxia E0 aparece circular, mientras que al considerar elipticidades crecientes pasaremos por la secuencia de tipos E1, E2, ..., E7. Este último tipo corresponde a la galaxia elíptica más elongada que se ha observado. Las galaxias elípticas no tienen eje de rotación. En ellas, las estrellas se mueven siguiendo trayectorias aleatorias, como ocurre en la componente esferoidal de nuestra propia galaxia. No albergan grandes cantidades de gas o de polvo y, por tanto, la formación de estrellas nuevas no es muy efectiva en el seno de estas galaxias. Las estrellas que las componen son sobre todo viejas. Las galaxias elípticas son, en su mayoría, pequeñas (enanas), con alrededor



Fig. 10.30 Galaxia elíptica NGC. Imagen tomada por el telescopio espacial Hubble.

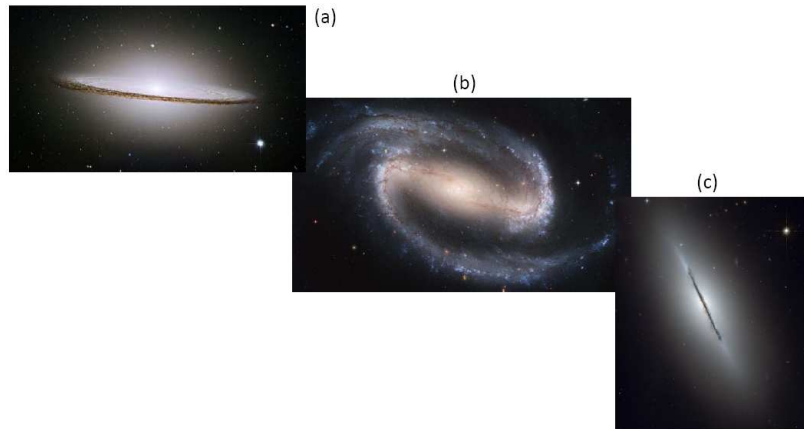


Fig. 10.31 (a) La galaxia Sombrero, un ejemplo de galaxia espiral no barrada o normal. (b) La galaxia NGC 1300, un ejemplo de galaxia espiral barrada. (c) Galaxia NGC 5866, un ejemplo de galaxia lenticular. Todas estas imágenes han sido tomadas por el telescopio espacial Hubble.

de 10^6 estrellas. Hay, sin embargo, un tipo de galaxia elíptica gigante llamado *cD*. Estas gigantes suelen hallarse en el interior de los cúmulos de galaxias y están constituidas por una parte central que parece una galaxia elíptica normal, envuelta por un gran halo menos brillante y que contiene abundantes cúmulos globulares. El tamaño de las galaxias elípticas es, como vemos, muy variable, con diámetros entre 1 y 600 kpc. Las masas varían entre 10^5 y $10^{13} M_{\odot}$ y las luminosidades de 3×10^5 a $10^{11} L_{\odot}$.

10.3.2.2 Galaxias espirales

Nuestra galaxia es una espiral típica y, por tanto, la descripción de su estructura en la sección 10.3.1.1 puede aplicarse casi a cualquier espiral normal. En general, las galaxias espirales constan de una prominencia central (estructuralmente similar a una galaxia elíptica) y de un disco aplanado que contiene estrellas, gas y polvo, en el cual destacan algunas líneas arqueadas más brillantes llamadas brazos espirales. Si se presenta el disco, pero sin brazos, se habla de galaxias espirales S0, también llamadas *galaxias lenticulares*. Hay dos secuencias de espirales:

- *Normales*: Sa - Sb - Sc.
- *Barradas*: SBa - SBb - SBc .

En las galaxias barradas hay una especie de barra central que atraviesa el núcleo, de manera que los brazos espirales, que en estos casos son dos, nacen en los extremos de esta barra. En la Fig. 10.31 se muestran ejemplos de los diversos tipos de galaxias espirales.

En analogía con las clases de luminosidad introducidas para las estrellas, también las galaxias se clasifican en cinco clases: I, II, III, IV y V, donde la I corresponde

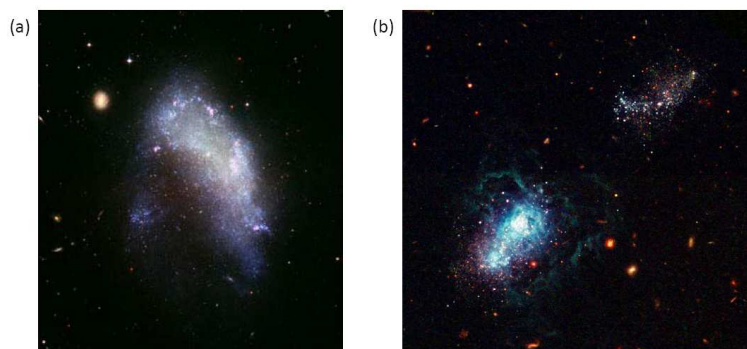


Fig. 10.32 (a) Galaxia irregular NGC 1427. (b) I Zwicky 18, quizá la galaxia más joven jamás observada (500 millones de años). Imágenes tomadas por el telescopio Hubble.

a las más masivas y brillantes, mientras que las V son las más pequeñas y débiles. Las masas de las galaxias espirales van de 10^9 a $4 \times 10^{11} M_{\odot}$, con luminosidades entre 10^8 y $2 \times 10^{10} L_{\odot}$ y diámetros de 5 a 250 kpc.

10.3.2.3 Galaxias irregulares

Las galaxias irregulares no tienen estructura espiral ni simetría de ningún tipo. En la Fig. 10.32 se muestran dos ejemplos de galaxias irregulares. Hay dos grupos de estas galaxias:

- *Irr I*. Estas llegan a resolverse en estrellas de tipos O y B. En ellas se aprecian nebulosas de emisión, también llamadas regiones HII, ya que constan sobre todo de gas hidrógeno ionizado y electrones. Las Nubes de Magallanes, observadas a simple vista desde el hemisferio sur terrestre son dos ejemplos de este tipo de galaxias.
- *Irr II*. En este caso no se resuelven en estrellas. Contienen grandes cantidades de polvo. Las formas irregulares pueden deberse a colisiones con otras galaxias, a las fuerzas de marea debidas a vecinas cercanas o a la actividad del núcleo galáctico.

10.3.3 Poblaciones estelares

La mayoría de las estrellas que pueblan las galaxias tienen una composición semejante, donde la mayor parte es hidrógeno y helio. Las abundancias de otros elementos, como carbono, nitrógeno, oxígeno y metales, como el hierro o níquel, se detecta mediante el análisis de las líneas espectrales en la luz emitida en las estrellas. Por esta razón, a la abundancia de elementos distintos del hidrógeno y el helio recibe el nombre de *metalicidad*. Las diferencias en composición química, así como las propiedades relativas a ubicación y cinemática de las estrellas en las galaxias

han servido para clasificar estos astros en dos grupos o poblaciones:

- **Población I.** Se trata de estrellas jóvenes, con edades que sobrepasan los centenares de millones de años. Su metalicidad oscila entre el 2% y el 4%. Se encuentran en el disco y en los brazos de las galaxias espirales, y en ocasiones forman grupos como cúmulos abiertos. Las estrellas más brillantes de esta población tienen un color azulado. Se mueven en órbitas casi circulares y coplanarias alrededor del centro galáctico.
- **Población II.** Son estrellas viejas, con edades que alcanzan hasta 13000 millones de años. Su metalicidad es baja, varía entre 0.3% y el 1%. Las más brillantes tienen una tonalidad rojiza. Se encuentran en el interior de las galaxias elípticas y en el halo de las galaxias espirales. Son las constituyentes de los cúmulos globulares. En nuestra galaxia, estas estrellas giran alrededor del centro galáctico siguiendo trayectorias bastante elípticas y con inclinaciones muy variadas respecto del plano del disco.

10.4 Materia y energía oscura

Se llama **materia oscura** a la materia hipotética de composición desconocida que no emite o refleja suficiente radiación electromagnética para ser observada directamente con los medios técnicos actuales. Su existencia puede inferirse a partir de los efectos gravitacionales que causa en la materia visible, tales como las estrellas o las galaxias, así como en las anisotropías del fondo cósmico de microondas. De acuerdo con las observaciones actuales, la materia oscura constituye la gran mayoría de la masa en el Universo observable. La comprensión de su naturaleza y su distribución en el Universo constituye uno de los grandes retos de física moderna. En esta sección describiremos brevemente las evidencias de su existencia, hablaremos de los posibles candidatos a materia oscura y comentaremos algunas de las ideas que se están poniendo en práctica para su búsqueda. Finalmente, acabaremos esta sección con una breve discusión de lo que hoy en día se conoce como energía oscura, otro de los grandes retos para la física de nuestro siglo.

10.4.1 Evidencias de la existencia de materia oscura

Son muchas las evidencias indirectas de la existencia de materia oscura. La más importante está relacionada con la distribución de masa en las galaxias espirales. A continuación discutiremos esta evidencia en cierto detalle y, después, mencionaremos otras evidencias que se suman a ésta y que hacen que hoy en día no se ponga en duda la existencia de esta forma extraña de materia.

Vamos a analizar cómo se distribuye la materia en galaxias espirales y para ello vamos a calcular la *curva de rotación galáctica*. Esta curva nos da la velocidad con la que gira un objeto en órbita circular alrededor del centro galáctico en función de su

distancia a dicho centro. Si la estructura galáctica fuera como la del Sistema Solar, en el que la mayoría de la masa se acumula en el centro (el Sol), las velocidades de las estrellas decrecerían con la distancia al centro de la misma de manera que la velocidad orbital de la Tierra, de acuerdo con la tercera ley de Kepler, es menor que la de Mercurio, pero mayor que la de Júpiter. Para órbitas circulares, la velocidad orbital de un planeta a una distancia R del Sol viene dada por

$$V = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{R}}. \quad (10.27)$$

Se esperaba que la curva de rotación de las estrellas en las galaxias espirales siguiera una ley semejante a la ec. (10.27) a partir de una cierta distancia al centro, ya que, al hallarse la mayor parte de la masa luminosa acumulada cerca del centro, las velocidades de rotación tendrían que decrecer según la ley kepleriana. Si suponemos que la distribución de masa tiene simetría esférica, la velocidad de rotación $V(R)$ de una estrella situada a una distancia R del centro galáctico depende tan solo de la masa contenida dentro de una esfera de radio R , $M(R)$. Esta velocidad viene dada por

$$V(R) = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}}. \quad (10.28)$$

Si consideramos que la densidad es constante hasta una determinada distancia al centro, la masa $M(R)$ crecerá de forma proporcional a R^3 , y la rotación de la galaxia sería rígida, con velocidad angular Ω constante ya que $V(R)$ crecería proporcional a R y $\Omega = V(R)/R$. Este comportamiento se aproxima bastante bien a lo que se observa en el interior de las galaxias espirales, pero la disminución kepleriana de la velocidad de rotación para distancias grandes del centro no se observa. En realidad, los astrónomos se sorprendieron al medir la curva de rotación de nuestra Galaxia, así como de otras, y obtener resultados como los que se ilustran de forma esquemática en la Fig. 10.33 (curva A). Como se aprecia en ella, las observaciones indican que las curvas de rotación de la mayoría de las galaxias espirales se hacen planas para distancias grandes al centro.

De la ec. (10.28) se deduce que una curva de rotación plana, $V(R) = \text{constante}$, corresponde a un crecimiento lineal de la masa con el radio, $M(R) \propto R$. Es decir, la masa en el interior de una esfera de radio R tiene que seguir creciendo para distancias grandes al núcleo, pero esta masa no se observa. Por este motivo, el descubrimiento de que las curvas de rotación son planas indica que tiene que existir materia oscura en los halos de las galaxias, es decir, materia no luminosa y, por tanto, que no se detecta con telescopios. La acción gravitatoria de esta materia es la responsable de que las curvas de rotación se hagan planas.

Existen otras evidencias de la existencia de la materia oscura que ahora pasamos a describir brevemente:

- *Velocidad de dispersión de las galaxias.* Los movimientos relativos de las galaxias por acción de su atracción gravitatoria no se pueden explicar exclusivamente

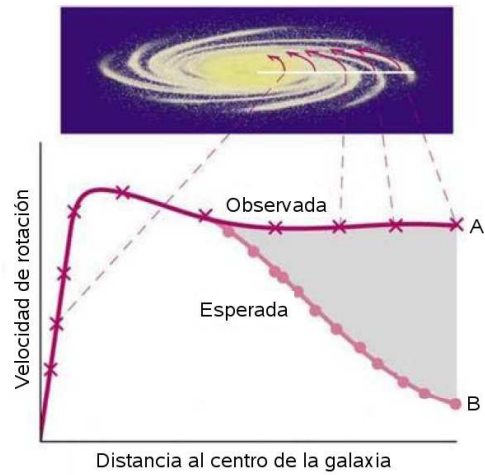


Fig. 10.33 Curva de rotación de una galaxia espiral típica: predicha (B) y observada (A). La materia oscura explicaría la apariencia plana de la curva de rotación a radios grandes.

en términos de la materia visible en estas galaxias y se requiere de la existencia de materia oscura.

- *Materia perdida en cúmulos de galaxias.* Los cúmulos (o clusters) de galaxias son las estructuras más grandes en el universo formadas por la acción de la gravedad. Las componentes visibles de un cúmulo de galaxias son las estrellas dentro de las galaxias individuales y el gas caliente en las regiones entre las galaxias. Las estructuras autogravitantes formadas por este gas no se pueden explicar sin recurrir a la existencia de materia oscura.
- *Formación de estructuras.* Los estudios de la formación de galaxias y otras estructuras indican que se necesita una cantidad significativa de materia no bariónica fría para explicar la estructura a gran escala del universo.
- *La geometría del universo y el brillo de supernovas.* El análisis detallado de la radiación de fondo de microondas y del brillo de supernovas lejanas ha permitido acotar la cantidad de materia existente en nuestro universo. Dicha materia total es del orden de 10 veces superior a la materia visible (bariónica) que se ha estimado por observación directa.

10.4.2 Candidatos a materia oscura

Aún no se conoce la naturaleza de la materia oscura. Son muchos los candidatos que se están investigando tanto teórica como experimentalmente. A continuación mencionaremos algunos de los candidatos más plausibles que se están barajando. Estos candidatos se pueden agrupar en dos categorías:

- **Partículas fundamentales:**

- *Neutrinos*: existe una gran cantidad de neutrinos en el universo procedentes del Big Bang. Recientemente se ha descubierto que estas partículas tienen masa y, por tanto, podrían jugar un papel en la estructura del universo a gran escala. Sin embargo, los neutrinos parecen ser demasiado ligeros como para constituir la materia oscura.
 - *Partículas aún no descubiertas*: se ha sugerido que la materia oscura podría estar formada por partículas débilmente interactuantes (WIMPs) predichas por teorías que van más allá del modelo estándar. En particular, las partículas supersimétricas más ligeras podrían ser un candidato, aunque aún no han sido observadas.
- **MACHOs (Massive Compact Halo Objects)**: este es término genérico para objetos compactos con masas no muy diferentes a la de las estrellas, y podrían estar hechos de materia bariónica o no-bariónica. Estrellas marrones son un ejemplo bariónico. La ventaja de este candidato es que ha sido observado en la realidad. Sin embargo, no parece que los MACHOs aparezcan en la cantidad suficiente como para constituir la materia oscura que se necesita para explicar las observaciones.

10.4.3 *Búsqueda de la materia oscura*

Son muchas las estrategias que se están siguiendo para tratar de detectar la materia oscura y éstas dependen del tipo de materia que se esté buscando. Así por ejemplo, ya están operando en la Tierra experimentos para detectar los WIMPs, pero ninguno ha tenido éxito de momento.

El método más prometedor es quizá el de las lentes gravitatorias. La idea de lente gravitatoria que se discutió en el capítulo 2, y que se ilustra en Fig. 10.34, se está utilizando en la actualidad para detectar la presencia de materia oscura. De hecho, esta técnica ya ha producido los primeros resultados que nos están enseñando cómo se distribuye la materia oscura en las galaxias. Sin embargo, con esta técnica es difícil averiguar cuál es la naturaleza de la materia oscura.

10.4.4 *La energía oscura*

La energía oscura es una forma hipotética de energía que estaría presente en todo el espacio, produciendo una presión negativa y que tiende a incrementar la aceleración de la expansión del Universo, resultando en una fuerza gravitacional repulsiva. En el modelo estándar de la cosmología, la energía oscura actualmente aporta casi tres cuartas partes de la masa-energía total del Universo (ver Fig. 10.35).

La existencia de la energía se sugirió por primera vez en 1998 cuando las observaciones de supernovas de tipo Ia muy lejanas, realizadas por parte del Supernova Cosmology Project y el High-z Supernova Search Team, sugirieron que la expansión del Universo se estaba acelerando. Desde entonces, esta aceleración se ha confirmado

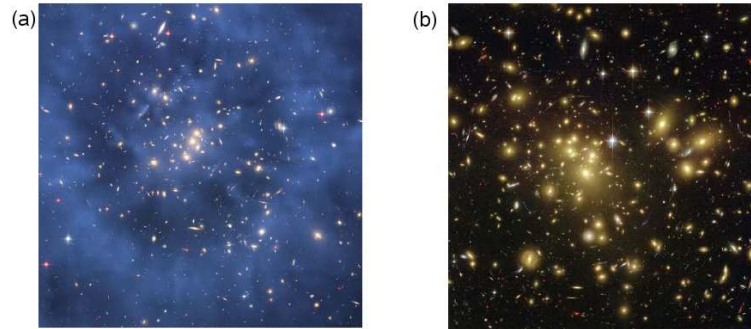


Fig. 10.34 (a) Imagen compuesta del cúmulo de galaxias CL0024+17 tomada por el telescopio espacial Hubble que muestra la creación de un efecto de lente gravitacional producto, en gran parte, de la interacción gravitatoria con la materia oscura. (b) Efecto de las lentes gravitatorias fuertes observado por el Telescopio espacial Hubble en Abell 1689 que indica la presencia de materia oscura.

mediante varias fuentes independientes: medidas del fondo cósmico de microondas, las lentes gravitacionales, nucleosíntesis primigenia de elementos ligeros y la estructura a gran escala del Universo. La naturaleza y el origen de la energía oscura son completamente desconocidos en la actualidad.

10.5 Bibliografía recomendada

Este capítulo está basado en las dos siguientes referencias:

- Capítulos 4, 6, 7 y 8 de “Astronomía fundamental” de Vincent J. Martínez, Joan A. Miralles, Enric Marco y David Galadí-Enríquez, Publicaciones Universidad de Valencia.
- Capítulo 13 de “Modern Physics” (5th edition) de Tipler y Llewellyn, W.H. Freeman.

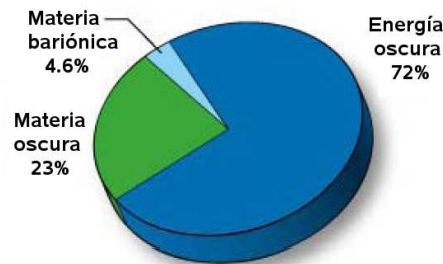


Fig. 10.35 Según estimaciones recientes, alrededor del 70% del contenido energético del Universo consiste en energía oscura, cuya presencia se infiere en su efecto sobre la expansión del Universo pero sobre cuya naturaleza última no se sabe casi nada.

En particular, el libro de Martínez y compañía es una referencia muy recomendable como introducción a la astronomía y a la astrofísica. Otro libro de un autor español que presenta una breve y amena introducción a la astrofísica es

- “Introducción a la Astrofísica”, Eduardo López Battaner, Alianza (1999).

La literatura científica está llena de excelentes libros de introducción a la astronomía y a la astrofísica. Para aquellos que quieran profundizar en estas fascinantes disciplinas yo les recomiendo los dos siguientes libros que poseen un nivel accesible para los estudiantes de nuestro curso (y se pueden encontrar en la biblioteca de Ciencias):

- “The New Cosmos: An Introduction to Astronomy and Astrophysics”, de Albrecht Unsöld y Bodo Baschek, Springer-Verlag.
- “Fundamental Astronomy” (4th edition) de H. Karttunen *et al.*, Springer-Verlag.

Entre los múltiples libros de divulgación sobre temas relacionados con este capítulo, me gustaría destacar una vez más la siguiente referencia:

- “Einstein’s Telescope: The Hunt for Dark Matter and Dark Energy in the Universe” Evalyn Gates, W.W. Norton and Company 2009,

donde se puede encontrar una deliciosa introducción a la materia y energía oscura, así como una descripción detallada de los esfuerzos actuales por resolver los enigmas relacionados con ellas.

10.6 Ejercicios del Capítulo 10

Cuestiones

- (1) Medidas del corrimiento Doppler de las líneas espectrales de la luz procedente de los limbos (bordes) este y oeste del ecuador Sol revelan que la componente tangencial de la velocidad de los limbos difiere en 4 km/s. Usar este resultado para calcular el periodo de rotación del Sol alrededor de su eje. *Nota:* $R_{\odot} = 6.96 \times 10^5$ km.
- (2) La energía potencial gravitatoria U de un cuerpo esférico de masa M y radio R es una función de los detalles de su distribución de masa. Para el Sol $U = -2GM_{\odot}^2/R_{\odot}$. Si la energía que radia el Sol al espacio se debiera completamente a su energía gravitatoria, ¿cuál sería su tiempo de vida si continuara radiando al ritmo actual?
- (3) La unidad de distancia pársec (pc) se define como la distancia a la que una estrella forma un ángulo de paralaje de un segundo de arco debido a la órbita de la Tierra alrededor del Sol. El límite práctico de una medida de paralaje es de 0.01 segundos de arco. (a) Demostrar que $1 \text{ pc} = 3.26$ años-luz. (b) Si la den-

idad de estrellas en la región cercana al Sol dentro de la Vía Láctea es de 0.08 estrellas/pc³, ¿cuántas estrellas podrían, en principio, estar suficientemente cerca como para ser medidas mediante el método de paralaje?

- (4) Como sabemos, el destino de algunas estrellas masivas es el de convertirse en un agujero negro. Calcular el radio de Schwarzschild de una estrella cuya masa sea igual a (a) la del Sol, (b) la de Júpiter y (c) la de la Tierra. *Nota:* la masa de Júpiter es aproximadamente 318 veces la de la Tierra.
- (5) La capa de gas de una nebulosa planetaria se expande a una velocidad de 24 km/s y su diámetro es de 1.5 años-luz. (a) ¿Qué edad tiene la nebulosa planetaria? (b) Si el remanente de la estrella es 12 veces más luminoso que el Sol y 15 veces más caliente, ¿cuál es el radio del remanente en unidades de R_{\odot} ?
- (6) Estimar la masa de nuestra galaxia dentro de la órbita del Sol usando que el Sol se encuentra a 8.5 kpc del centro galáctico y que su velocidad de desplazamiento en su órbita es de aproximadamente 220 km/s. *Pista:* utilizar la tercera ley de Kepler.
- (7) Derivar la ec. (10.28) para la velocidad de rotación de una estrella entorno al centro de una galaxia espiral.
- (8) Medidas del corrimiento al rojo de una galaxia lejana indican que su velocidad de recesión es de 72000 km/s. Calcular la distancia a la galaxia.

Problemas

- (9) Cuando el Sol se formó, aproximadamente el 75% de su masa era hidrógeno y sólo el 13% de esa cantidad está disponible para su fusión. (El resto está en regiones del Sol donde la temperatura es muy baja para que se produzcan las reacciones de fusión). $M_{\odot} \approx 2 \times 10^{30}$ kg y el Sol quema del orden de 6×10^{11} kg/s de hidrógeno. (a) Calcular la masa total de hidrógeno disponible para su fusión durante la vida del Sol. (b) ¿Cuánto durará el combustible de hidrógeno en el Sol? (c) Teniendo en cuenta que el Sistema Solar tiene actualmente 4.6×10^9 años, ¿cuándo se agotará el hidrógeno del Sol?
- (10) La supernova SN1987A, producto de la explosión de una estrella, fue observada en 1987 y se encuentra a una distancia de 170000 años-luz en una de las Nubes de Magallanes (una pequeña galaxia irregular en las inmediaciones de la Vía Láctea). (a) Teniendo en cuenta cuando fue observada y a que distancia se encuentra, determinar cuándo tuvo lugar la explosión. (b) Si protones de 100 GeV de energía cinética fueron producidos en esta explosión, ¿cuándo deberían llegar a la Tierra?
- (11) Demostrar que la energía total de la Tierra en su movimiento orbital entorno al Sol $E = (mv^2/2) - GM_{\odot}m/r$ es igual a la mitad su energía potencial gravitatoria $-GM_{\odot}m/r$, donde r es el radio de la órbita de la Tierra.
- (12) La capacidad de un planeta para retener ciertos gases en su atmósfera depende

de la temperatura de su atmósfera y de la velocidad de escape del planeta. En general, si la velocidad promedio de las moléculas de un gas excede un sexto de la velocidad de escape, ese gas desaparecerá de la atmósfera en unos 10^8 años. (a) Representar gráficamente la velocidad promedio del H_2O , CO_2 , O_2 , CH_4 , H_2 y He para temperaturas entre 50 y 1000 K. Indicar en el mismo gráfico los puntos correspondientes a $1/6$ de la velocidad de escape para los diversos planetas de la Tabla 10.5. (b) Demostrar que la velocidad de escape v para un planeta está dada por

$$\frac{v}{v_{\text{Tierra}}} = \sqrt{\frac{(M/M_{\text{Tierra}})}{(R/R_{\text{Tierra}})}}.$$

(c) ¿Cuáles de los seis gases considerados se encontrarán actualmente en las atmósferas de los planetas de la Tabla 10.5? Explicar brevemente cada una de las respuestas. *Nota:* la energía media de una molécula de un gas a temperatura T es igual a $E = (3/2)k_{\text{B}}T$, donde k_{B} es la constante de Boltzmann.

Tabla 10.5 Temperaturas atmosféricas de algunos planetas del Sistema Solar.

Temperatura promedio de la atmósfera (K)	Planeta	M/M_{Tierra}	R/R_{Tierra}
300	Tierra	1.00	1.00
390	Venus	0.81	0.95
600	Mercurio	0.06	0.38
150	Júpiter	318.00	11.00
60	Neptuno	17.00	3.90
290	Marte	0.11	0.53

- (13) Usando la técnica del paralaje, calcular la distancia a (a) Alfa Centauri (ángulo de paralaje igual a 0.742 segundos de arco) y (b) Proción (ángulo de paralaje igual a 0.0286 segundos de arco). Expresar cada respuesta en años-luz y pársecs.
- (14) La supernova SN1987A seguramente produjo algunos elementos pesados. Comparada con la energía que se libera al fusionar 56 átomos de ^1H en uno de ^{56}Fe comenzando con la cadena protón-protón, ¿cuánta energía se requeriría para fusionar dos átomos de ^{56}Fe en uno de ^{112}Cd ? *Nota:* usar las masas atómicas $m_{^1\text{H}} = 1.00798$ u, $m_{^{56}\text{Fe}} = 55.934940$ u y $m_{^{112}\text{Cd}} = 111.902760$ u.

Problemas avanzados

- (15) El valor aproximado de la masa de polvo interestelar en la Galaxia se puede calcular a partir de la observación de la extinción de la luz de las estrellas.

Suponiendo que el radio medio de un grano de polvo sea R y que el polvo esté distribuido uniformemente con una densidad n de granos/cm³, (a) mostrar que el camino libre medio d_0 de un fotón en el polvo interestelar está dado por $d_0 = 1/(n\pi R^2)$. (b) Luz estelar que viaja hacia un observador en la Tierra tiene una intensidad a una distancia d de la estrella igual a $I = I_0 e^{-d/d_0}$. En la vecindad del Sol, una medida de I da $d_0 = 3000$ años-luz. Si $R = 10^{-5}$ cm, calcular n . (c) La densidad de masa promedio del material sólido en la Galaxia es de 2 g/cm^3 y en el disco la densidad de estrellas es de unos $1M_\odot/300$ (años-luz)³. Calcular el cociente entre la densidad de masa del polvo y la densidad de masa de las estrellas.

- (16) La teoría de agujeros negros sugiere que éstos se evaporan por emisión de radiación Hawking en un tiempo t que depende de la masa M del agujero negro de acuerdo a la siguiente relación:

$$t = (1.024 \times 10^4 \pi^2 \text{m}^3/\text{s}^2) G^2 M^2 / hc^4.$$

(a) Sin hacer ningún cálculo, explicar por qué esta fórmula implica que los agujeros negros más masivos tienen una vida más larga que los menos masivos y por qué el ritmo de evaporación se acelera cuando el agujero negro pierde masa. (b) Calcular el tiempo de vida de un agujero negro de masa igual a $1 M_\odot$. Comparar este tiempo con la edad del universo. (c) Según algunas teorías, los agujeros negros más grandes que se podrían formar tendrían masas del orden de $10^{12} M_\odot$, que es el del orden de una galaxia entera. ¿Cuál sería el tiempo de vida de uno de estos agujeros negros?

Apéndice A

El experimento de Michelson y Morley

Albert Michelson y Edward Morley realizaron en 1887 uno de los experimentos más famosos de la historia de la física. En él se propusieron medir la velocidad absoluta de la tierra con respecto al éter, que se suponía por aquel entonces que era el medio en el que todos los objetos estaban sumergidos. Este experimento era una versión mejorada del realizado por Michelson¹¹ en 1881 y que pasamos a describir.¹² En este experimento, Michelson hizo uso del aparato que se describe esquemáticamente en la Fig. A.1 y que se conoce con el nombre de *interferómetro de Michelson*. En este dispositivo la luz procedente de una fuente S incide sobre una lámina de cristal inclinada P que posee una capa de metal semitransparente en su cara anterior. Ésta divide a la luz en dos partes. Una parte atraviesa la lámina y alcanza el espejo M_1 . A continuación recorre el camino seguido en sentido inverso hasta que llega al punto en donde el haz se desdobló inicialmente, y una fracción de él es reflejado a través de la lámina hacia el telescopio T . La otra parte del haz original es enviada por reflexión al espejo M_2 y vuelve. Una lámina de compensación C hace pasar este segundo haz a través del mismo espesor de cristal que el primero (para conseguir la simetría óptica) antes de que se reúnan de nuevo y se introduzcan en el telescopio.

Si esta placa P está inclinada 45° y las superficies de los espejos están entre sí casi pero no exactamente a 90° , se obtendrán franjas parecidas a las formadas por un prisma de ángulo muy pequeño. Con un ajuste adecuado de los espejos estas franjas pueden hacerse horizontales. Si se designa por l_1 y l_2 los caminos ópticos (PM_1 y PM_2) que dan origen a una franja particular tenemos la condición

$$2(l_1 - l_2) = m\lambda, \quad (\text{A.1})$$

en donde m es un número entero y λ es la longitud de onda de la luz.

Supongamos ahora que el interferómetro de Michelson se encuentra en movimiento a lo largo de dirección PM_1 con una velocidad v medida con respecto al sistema inercial definido por el éter hipotético. Desde el punto de vista del laboratorio, existe un “viento de éter” que está soplando sobre el aparato (ver Fig. A.2). La luz que marcha desde P hasta M_2 y en sentido contrario debe penetrar en el

¹¹Albert Michelson recibió el premio Nobel de física en 1907.

¹²A.A. Michelson, Am. J. Sci. **122**, 120 (1881).

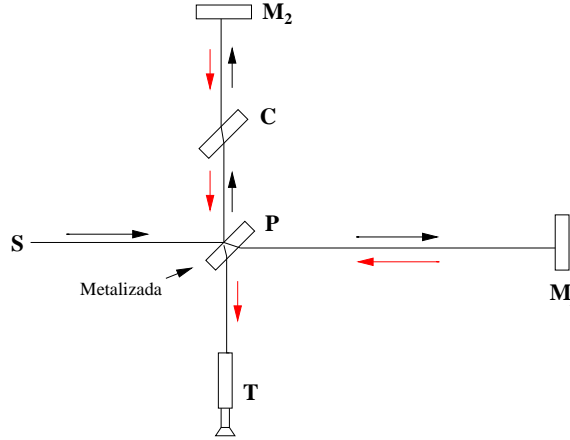


Fig. A.1 Esquema de la disposición del interferómetro de Michelson.

viento formando un ángulo tal que la velocidad resultante esté dirigida según PM_2 . De acuerdo con la ley de composición de velocidades de Galileo el valor de la velocidad resultante relativa al interferómetro es $\sqrt{c^2 - v^2}$. La luz que marcha entre P y M_1 tendría (de nuevo con relación al interferómetro) una velocidad resultante $c - v$ cuando marchase hacia M_1 y una velocidad resultante $c + v$ en el recorrido de retorno. Podemos, por tanto, calcular los tiempos que emplea la luz en ir desde P hasta los espejos y volver:

$$t_1 = \frac{l_1}{c - v} + \frac{l_1}{c + v} = \frac{2l_1c}{c^2 - v^2} = \frac{2l_1/c}{(1 - v^2/c^2)}, \quad (\text{A.2})$$

$$t_2 = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2l_2/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (\text{A.3})$$

Esto define una diferencia de tiempos Δt , que para $v \ll c$ viene dada aproximadamente por:

$$\Delta t = t_1 - t_2 \approx \frac{2l_1}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{2l_2}{c} \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right), \quad (\text{A.4})$$

es decir,

$$\Delta t \approx \frac{2(l_1 - l_2)}{c} + \frac{2l_1v^2}{c^3} - \frac{l_2v^2}{c^3}. \quad (\text{A.5})$$

Si el aparato en su conjunto se gira 90° , de forma que PM_2 señale ahora en el sentido del movimiento, obtenemos una nueva diferencia de tiempos $\Delta t'$:

$$\Delta t' = t'_1 - t'_2 \approx \frac{2(l_1 - l_2)}{c} + \frac{l_1v^2}{c^3} - \frac{2l_2v^2}{c^3}. \quad (\text{A.6})$$

La variación en la diferencia de tiempos dará lugar a un corrimiento de la figura de interferencia en una cantidad correspondiente a δ franjas, en donde $\delta = c(\Delta t - \Delta t')/\lambda$, es decir,

$$\delta = \frac{(l_1 + l_2)v^2}{\lambda c^2}. \quad (\text{A.7})$$

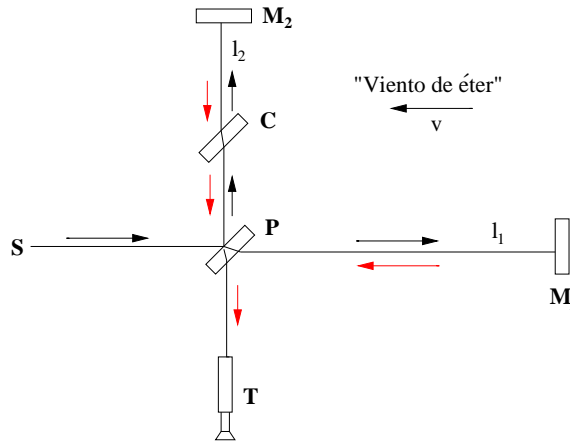


Fig. A.2 Fundamento del experimento de Michelson-Morley en función del “viento de éter”.

Si $l_1 = l_2 = l$, podemos expresar este resultado de la manera siguiente:

$$\delta = \frac{2(v/c)^2}{\lambda/l}. \quad (\text{A.8})$$

Los valores de λ , l y c son conocidos, pero, ¿qué valor deberemos dar a v ? Para Michelson y para todos aquellos que investigaron el problema una contribución claramente identificable era la velocidad de la Tierra alrededor de su órbita, es decir, unos 30 km/s. Esto supone que $v/c \approx 10^{-4}$. Podemos hacer $\lambda \approx 6 \times 10^{-7}$ m, y como para el primer aparato de Michelson $l = 1.2$ m, se tiene que $\lambda/l \approx 5 \times 10^{-7}$. Teniendo en cuenta todo esto se obtiene $\delta \approx 0.04$ franjas. Este efecto es muy pequeño, pero medible. Sin embargo, para sorpresa y disgusto de Michelson, cuando dispuso su interferómetro y lo giró no se produjo ningún corrimiento apreciable de la figura de interferencia.

Este resultado era tan inesperado y tan difícil de explicar que exigió una confirmación adicional. Así fue como Michelson, ahora en colaboración con E.W. Morley, emprendió una investigación mucho más precisa, basada en caminos ópticos unas 10 veces más largos que en el primer experimento. El corrimiento esperado ahora era de unas 0.4 franjas, pero en los resultados obtenidos se observó un corrimiento de unas 0.005 franjas, a lo sumo. Esta versión refinada del experimento, llevada a cabo en 1887,¹³ ha sido considerada durante mucho tiempo como uno de los pilares experimentales básicos sobre los que descansa la relatividad especial. El artículo original de Michelson and Morley se puede encontrar en el siguiente enlace: <http://www.aip.org/history/gap/PDF/michelson.pdf>.

¹³A.A. Michelson and E.W. Morley, Am. J. Sci. **134**, 333 (1887).

Apéndice B

El experimento de Franck y Hertz

En este apéndice vamos a describir el experimento que en 1914 llevaron a cabo los físicos alemanes James Franck y Gustav Hertz y que supuso la confirmación directa de la existencia en los átomos de niveles de energía cuantizados.

En la Fig. B.1 se muestra un esquema del dispositivo utilizado por Franck y Hertz en su experimento. En este dispositivo, los electrones emitidos por el filamento son acelerados en una región relativamente larga (≈ 1 cm) y llena de gotas de mercurio por el potencial positivo en la rejilla, V . Los electrones pueden llegar al colector y ser detectado en el electrómetro (un amperímetro sensible) si poseen suficiente energía para superar el potencial retardador de aproximadamente 1.5 V establecido sobre una distancia corta (≈ 1 mm) entre la rejilla y el colector. Con electrones de baja energía o bajos voltajes de aceleración ocurren colisiones perfectamente elásticas entre los electrones y los átomos de Hg, donde la suma de las energías cinéticas del electrón y del átomo se conservan. Debido a que el átomo de Hg es mucho más masivo que el electrón, éste transfiere muy poca energía cinética al átomo en una

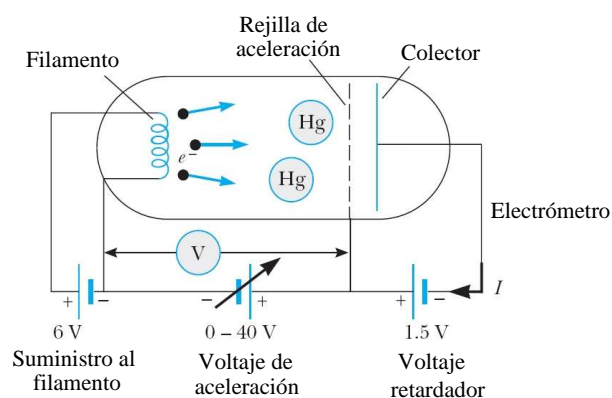


Fig. B.1 Representación esquemático del aparato usado por Franck y Hertz. Una gota de mercurio puro se encierra en un tubo de vacío. A fin de obtener una densidad de mercurio muy alta, lo que garantiza que ocurren muchas colisiones entre los electrones y los átomos, el tubo se calienta hasta 185° durante las mediciones.

colisión. Incluso después de muchas colisiones, el electrón llega a la rejilla con una energía cinética de aproximadamente e veces V y llegará al colector si el voltaje de aceleración V es mayor que 1.5 V. Cuando V se incrementa ligeramente, más electrones llegan al colector y la corriente, I , aumenta.

A medida que el voltaje de aceleración asciende, se alcanza un voltaje crítico al que ocurren colisiones inelásticas en la rejilla, donde los electrones alcanzan una energía de e veces V . En estas colisiones inelásticas, los electrones pueden transferir casi toda su energía cinética al átomo, llevándolo al primer estado excitado. Los electrones que chocan en forma inelástica no pueden superar el potencial retardador y, en consecuencia, I decrece para este voltaje crítico. En la Fig. B.2 se muestra una gráfica típica de la corriente frente al voltaje de aceleración, donde la primera caída de corriente (A) ocurre a un voltaje crítico ligeramente superior a 7 V. Cuando el voltaje se incrementa de nuevo, la región de la colisión inelástica se desplaza más cerca del filamento y los electrones que fueron detenidos por una colisión inelástica son reacelerados, llegando al colector y provocando otro aumento en la corriente (B). Otra caída (C) ocurre cuando V se incrementa tanto que un electrón puede experimentar dos colisiones inelásticas consecutivas: un electrón excita a un átomo a la mitad entre el filamento y la rejilla, pierde toda su energía y luego es reacelerado para excitar a otro átomo en la rejilla. Al final tendrá una energía suficiente para ser capturado. Este proceso se lleva a cabo de manera periódica con un voltaje creciente en la rejilla, lo que origina máximos y mínimos equidistantes en la curva I - V , como se muestra en la Fig. B.2.

Si las separaciones de máximos y mínimos adyacentes de la Fig. B.2 se promedian con cuidado, se encuentra que el promedio es 4.9 ± 0.1 V, o una separación igual a

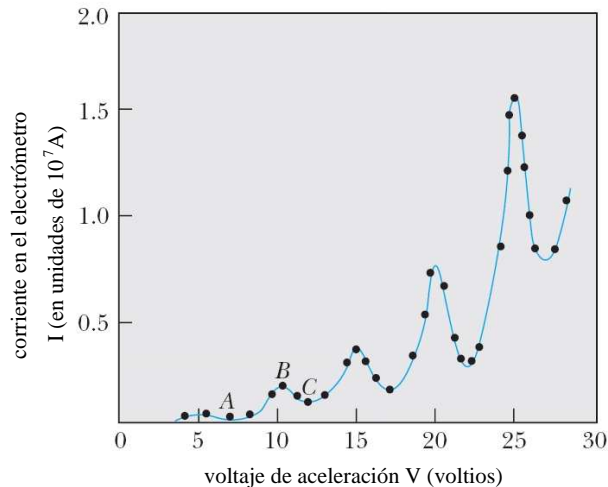


Fig. B.2 La corriente como función del voltaje en el experimento de Franck y Hertz. Para obtener estos datos, el voltaje del filamento se fijó a 6 V y el tubo se calentó a 185° .

4.9 ± 0.1 eV entre el estado fundamental y el primer estado excitado. Sin embargo, nótese que el primer mínimo no ocurre a 4.9 V sino a 7.1 V. La energía extra (2.2 eV) es necesaria porque el filamento y el colector están hechos de metales diferentes con distintas funciones de trabajo. Aunque el filamento, como todos los buenos emisores, posee una función de trabajo baja, el colector tiene una función de trabajo alta, y es necesario suministrar una energía igual a la función de trabajo a fin de extraer un electrón del colector para que pueda circular corriente en el circuito.

Franck y Hertz usaron simples mediciones con un amperímetro y un voltímetro para demostrar que los átomos sólo pueden aceptar cantidades discretas de energía proveniente de un haz de electrones. Además, demostraron que los niveles energéticos obtenidos mediante el bombardeo con electrones coincidía con los resultados de la espectroscopía. Razonando que un átomo de Hg excitado a un nivel energético de 4.9 eV por arriba de su estado fundamental podía volver a éste mediante la emisión de un solo fotón (como había postulado Bohr), calcularon que la longitud de onda de tal fotón era

$$\Delta E = hf = \frac{hc}{\lambda}, \quad (\text{B.1})$$

o bien,

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{4.9 \text{ eV}} = 253 \text{ nm}. \quad (\text{B.2})$$

Debido a que el cristal no es transparente a esta radiación ultravioleta, elaboraron un aparato de cuarzo y midieron cuidadosamente la radiación emitida, encontrando que radiación de longitud de onda de 254 nm era emitida tan pronto como el voltaje de aceleración excedía los 4.9 V. Debido a esta confirmación experimental directa de las ideas básicas de Bohr sobre los niveles energéticos en átomos y el proceso de emisión de fotones, Franck y Hertz fueron galardonados con el premio Nobel de física en 1925.

Apéndice C

El experimento de Stern y Gerlach

En este apéndice describiremos el experimento realizado por Otto Stern and Walther Gerlach en 1922 y que supuso la primera demostración de la existencia del espín electrónico y de la cuantización del momento angular.

Si un momento magnético $\vec{\mu}$ se coloca en un campo magnético no homogéneo \vec{B} , el momento magnético sentirá una fuerza externa que depende de μ_z y del gradiente de \vec{B} . En concreto, la fuerza viene dada por

$$F = -\nabla U = -\nabla(-\vec{\mu} \cdot \vec{B}), \quad (\text{C.1})$$

donde hemos usado que la energía potencial viene dada por $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. Si hacemos que el campo magnético sea homogéneo en las direcciones x e y , entonces el gradiente sólo tiene componente z distinta de cero ($\partial B/\partial z \neq 0$) y \vec{F} sólo tiene componente z , es decir,

$$F_z = \mu_z(dB/dz) = -mg_L\mu_B(dB/dz), \quad (\text{C.2})$$

donde m es el número cuántico magnético, g_L es el factor giromagnético y μ_B es el magnetón de Bohr.

Este hecho fue usado por Stern y Gerlach en 1922 (antes del establecimiento del concepto de espín) para medir las posibles orientaciones del momento magnético de átomos de plata. Este experimento fue repetido en 1927 por Phipps y Taylor usando átomos de hidrógeno.

El dispositivo experimental usado por Stern y Gerlach en su famoso experimento se muestra en el esquema de la Fig. C.1. Átomos de plata procedentes de un horno son colimados y enviados a través de un imán cuyos polos tienen una forma tal que el campo magnético B_z crece ligeramente con z , mientras que B_x y B_y son constantes. Después de atravesar el imán los átomos de plata golpean en una placa colectora (o pantalla). La Fig. C.2(a) muestra el efecto de dB/dz en momentos magnéticos con diversas orientaciones. Aparte del torque, que causa simplemente la precesión del momento magnético alrededor de la dirección del campo, hay una fuerza F_z en la dirección positiva o negativa del eje z , dependiendo de si μ_z es positivo o negativo, ya que dB/dz es siempre positivo. Esta fuerza desvía el momento magnético hacia arriba o hacia abajo por una cantidad que depende de las magnitudes de dB/dz y μ_z .

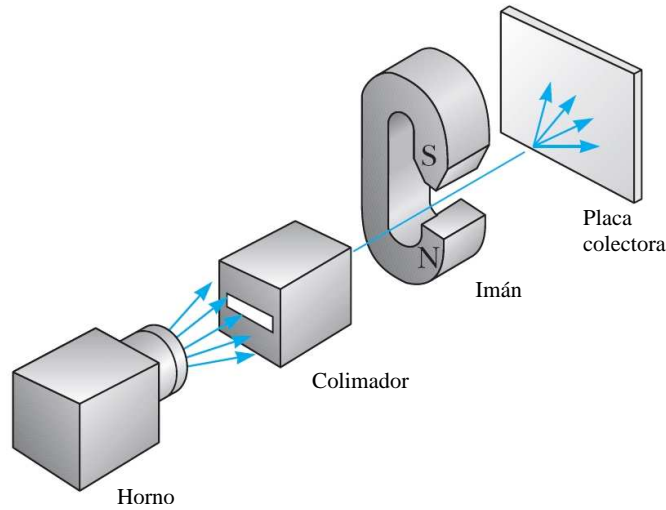


Fig. C.1 Representación esquemática del aparato usado por Stern y Gerlach. Átomos de plata procedentes de un horno son colimados para pasar a través de un campo magnético no homogéneo y finalmente son detectados en una placa colectora.

Clásicamente, uno esperaría un continuo de posibles orientaciones de los momentos magnéticos. Sin embargo, como el momento magnético es proporcional a L (el momento angular), que está cuantizado, la mecánica cuántica predice que μ_z sólo puede tomar $2l + 1$ valores correspondientes a los $2l + 1$ valores que puede adoptar el número cuántico m . Por tanto, podemos esperar $2l + 1$ tipos de desviación. Por ejemplo, para $l = 0$ debería haber una línea en la placa colectora correspondiente al caso en que no hay desviación. Para $l = 1$ debería haber tres líneas correspondientes a $m = -1$, $m = 0$ y $m = +1$. El caso $l = 1$ se ilustra en la Fig. C.2(b).

Usando átomos neutros de plata, Stern and Gerlach esperaban ver sólo una línea, la línea del medio en la Fig. C.2(b), porque el estado fundamental del átomo de plata se sabía que era $l = 0$, por tanto, $m = 0$ y $\mu = 0$. La fuerza F_z entonces debería ser cero y no debería haber desviación del haz de átomos de plata. Sin embargo, el resultado experimental, tanto para átomos de plata como para el hidrógeno, mostró que los átomos eran desviados de tal manera que aparecían dos líneas en la pantalla, como se muestra en la Fig. C.2(c). Ya que el estado fundamental del hidrógeno también tiene $l = 0$, deberíamos esperar una sólo línea también para este tipo de átomos. Estos experimentos fueron finalmente interpretados como una demostración de la existencia de un momento angular intrínseco del electrón (el espín electrónico). La idea es la siguiente. Si el electrón tiene un momento angular de módulo $|S| = \sqrt{s(s+1)}\hbar$, donde $s = 1/2$, la componente z puede tomar los valores $+\hbar/2$ y $-\hbar/2$. Ya que el momento angular orbital es cero en el caso de los átomos de plata o de hidrógeno, el momento angular total de estos átomos es simplemente debido al espín del electrón y, por tanto, dos líneas son de esperar en

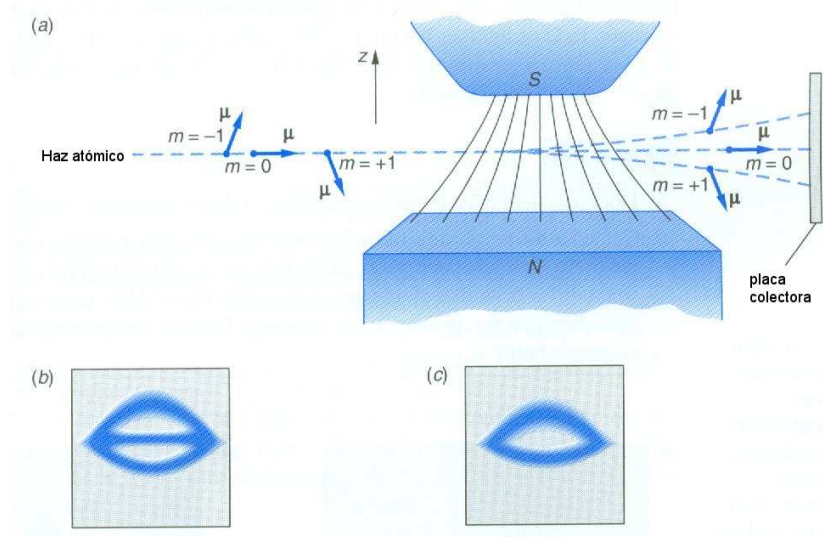


Fig. C.2 (a) En un campo magnético no homogéneo, un momento magnético μ experimenta una fuerza F_z cuya dirección depende de la componente z del momento magnético y cuyo módulo depende de μ_z y de dB/dz . El haz de átomo es colimado a lo largo de una línea horizontal. (b) El patrón que se debería observar en la placa colectora para el caso $l = 1$. (c) El patrón observado realmente en los casos de átomos de plata y de hidrógeno.

el experimento. Así pues, el experimento de Stern-Gerlach condujo finalmente al descubrimiento del espín del electrón y constituyó la primera demostración de la cuantización del momento angular.

Apéndice D

Constantes físicas fundamentales

D.1 Constantes fundamentales

Tabla D.1 Algunas constantes físicas.

Constante	Símbolo	Valor
Velocidad de la luz	c	2.99792458×10^8 m/s
Constante de Planck	h	6.626069×10^{-34} J·s
		$= 4.135667 \times 10^{-15}$ eV·s
	\hbar	1.054572×10^{-34} J·s
		$= 6.582119 \times 10^{-16}$ eV·s
Carga del electrón	e	$1.60217653 \times 10^{-19}$ C
Número de Avogadro	N_A	6.022142×10^{23} partículas/mol
Constante de Boltzmann	k_B	1.380650×10^{-23} J/K
		$= 8.617343 \times 10^{-5}$ eV/K
Constante de Coulomb	$k = 1/4\pi\epsilon_0$	8.987551788×10^9 N·m ² /C ²
Constante de la gravitación	G	6.6742×10^{-11} N·m ² /kg ²
Masa del electrón	m_e	9.109382×10^{-31} kg
		$= 0.5109989$ MeV/ c^2
Masa del protón	m_p	1.672622×10^{-27} kg
		$= 938.2722$ MeV/ c^2
Masa del neutrón	m_n	1.674927×10^{-27} kg
		$= 939.5653$ MeV/ c^2
Longitud de onda de Compton	$\lambda_e = h/m_e c$	$2.42631024 \times 10^{-12}$ m
Radio de Bohr	a_0	$0.5291772 \times 10^{-10}$ m
Magnetón de Bohr	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	$9.2740095 \times 10^{-24}$ J/T
		$= 5.78838 \times 10^{-5}$ eV/T
Permeabilidad del vacío	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ N/A ²
Constante de estructura fina	$\alpha = ke^2/\hbar c$	0.00729735

D.2 Algunos factores de conversión

A continuación se detallan algunos factores de conversión entre diferentes unidades que son de especial interés para este curso.

Energía:

$$1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ u} \cdot c^2 = 931.50 \text{ MeV}$$

$$1 \text{ kW} \cdot \text{h} = 3.6 \times 10^6 \text{ J}$$

$$1 \text{ cal} = 4.1840 \text{ J}$$

Longitud:

$$1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$$

$$1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$$

$$1 \text{ año-luz} = 9.467 \times 10^{15} \text{ m}$$

$$1 \text{ pc} = 3.26 \text{ años-luz}$$

Área:

$$1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2 = 10^{-28} \text{ m}^2$$

Masa:

$$1 \text{ u} = 1.6606 \times 10^{-27} \text{ kg} = 931.50 \text{ MeV}/c^2$$

Presión:

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

$$1 \text{ bar} = 100 \text{ kPa}$$

$$1 \text{ atm} = 101.325 \text{ kPa} = 1.01325 \text{ bares}$$

Campo magnético:

$$1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$$

Apéndice E

Soluciones de problemas seleccionados

Capítulo 1

- (1) (a) $x_1 - x_2 = \gamma v(t'_1 - t'_2)$; (b) $t_1 - t_2 = \gamma(t'_1 - t'_2)$.
- (2) $T' = \gamma(u)T = T/\sqrt{1 - u^2/c^2}$.
- (3) (a) 38.88 años; (b) 16.94 años.
- (4) 44.73 μs ; (b) 13.42 km.
- (5) $0.293c$.
- (6) (a) $0.4c$; (b) sí, siempre que su velocidad sea mayor que $0.4c$.
- (7) 1500 m/s (la corrección relativista es despreciable).
- (8) (a) $u_x = v$ y $u_y = c/\gamma$; (b) $u = c$.
- (9) $v = 0.0512c$.
- (10) $(\lambda - \lambda_0)/\lambda_0 = 0.0637$
- (11) $0.0965c$.
- (12) (a) 5.96×10^{-8} s; (b) 16.10 m; (c) 7.02 m.
- (13) (a) $0.98c$; (b) 5.02 años.
- (14) 39.19 m (nave A) y 91.85 m (nave B).
- (15) 2.55×10^{-5} s.
- (16) (a) 1.25 h; (b) 2 h; (c) 1.6 h; (d) atrasa el reloj de la nave.
- (17) (a) L/c ; (b) $3L/c$, (c) $2L/c$; (d) $10L/(3c)$.
- (19) (a) $0.95c$; (b) $-0.975c$.
- (20) (a) $0.913c$; (b) 23.98 años-luz; (c) 102.9 años.
- (22) $\approx 0.9c$ (se mueve hacia la derecha).
- (24) (a) $(d/c)(2 - v/c)$; (b) $(d/\gamma c)(2 - v/c)$.
- (26) (a) 52.678 m; (b) $0.987c$; (c) 16.07 m; (d) 2.07×10^{-7} s.
- (27) $u'_x = -0.286c$, $u'_y = 0.744c$.
- (29) 29.64° .
- (31) 5.45 años (Goslo será más viejo).
- (32) $0.198c$ (la galaxia A se está acercando); (b) $0.236c$ (la galaxia B se aleja).
- (33) (a) $0.946c$; (b) 299788.7 Mpc.
- (35) $a'_x = \frac{a_x}{\gamma^3(1 - \frac{vu_x}{c^2})^3}$, $a'_y = \frac{a_y}{\gamma^2(1 - \frac{vu_x}{c^2})} + \frac{a_x(vu_y/c^2)}{\gamma^2(1 - \frac{vu_x}{c^2})^2}$, $a'_z = \frac{a_z}{\gamma^2(1 - \frac{vu_x}{c^2})} + \frac{a_x(vu_z/c^2)}{\gamma^2(1 - \frac{vu_x}{c^2})^2}$.

- (36) (a) $v(t) = a_0 t / \sqrt{1 + a_0^2 t^2 / c^2}$. Cuando $t \rightarrow \infty$, entonces $v \rightarrow c$, es decir, la velocidad de la luz no se puede superar; (b) $x = (c^2/a_0)(\sqrt{1 + a_0^2 t^2 / c^2} - 1)$; (c) 4.85 años.

Capítulo 2

- (1) Se hace infinito.
- (2) Se requeriría una energía infinita.
- (3) El momento lineal no está acotado, puede ser infinito.
- (4) Tienen un momento finito porque tienen una energía finita: $p = E/c$.
- (5) El reloj de la cocina va más despacio.
- (6) (a) 1.25; (b) 0.383 MeV/c; (c) 0.638 MeV; (d) 0.127 MeV.
- (7) $p_{\text{rel}}/p_{\text{clas}} = 1.000000347$; $E_{\text{rel}}/E_{\text{clas}} = 0.99936$.
- (8) (a) 23.84 MeV; (b) 23.84 MeV; (c) 2.61×10^{11} .
- (10) 4.4×10^9 kg; (c) 1.427×10^{13} años.
- (11) $K_{\text{total}} = 0.789$ MeV, $K_e = 0.788$ MeV, $K_p = 0.001$ MeV.
- (12) 2.51×10^{-28} kg y 8.82×10^{-28} kg.
- (13) (c) $0.271c$.
- (16) $K_\pi = 608.7$ MeV y $K_{K^0} = 390$ MeV.
- (17) $\sqrt{3}c/2$; (b) $4\sqrt{3}c/7$.
- (18) (a) $\sqrt{8}c/3$; (b) 3 MeV; (c) 2.828 MeV/c; (d) 4.123 MeV; (e) $4.123 \text{ MeV}/c^2$.
- (20) 278.8 MeV.
- (21) (a) 1.131 GeV y 4 MeV; (b) 6.831° .
- (22) (a) $E_1 = 2$ GeV y $E_2 = 2/3$ GeV; (b) el fotón 1, que es el más energético, se mueve en el sentido del antiprotón y el 2 en el sentido contrario; (c) $E_1 = 2/3$ GeV y $E_2 = 2$ GeV.
- (23) $E_\mu = 109.77$ MeV, $E_\nu = 29.78$ MeV, $p_\mu = p_\nu = 29.78 \text{ MeV}/c$.
- (24) 761.51 MeV.
- (25) (a) $\sqrt{3}c/4$; (b) 1.20 MeV.
- (26) (a) 84.01° ; (b) 26.46° .
- (27) $Qc/\sqrt{Q^2 + (mc^2)^2}$.
- (28) $(\lambda - \lambda_0)/\lambda_0 = 1.08 \times 10^{-14}$.
- (29) $\lambda = \lambda_0/(1 - GM/Rc^2)$, 720.15 nm.
- (30) 5×10^{10} kg/m³.
- (31) $R_g = GM/c^2 = 1.475$ km.
- (36) (a) $p_\pi = 206.4 \text{ MeV}/c$, $v_\pi = 0.828c$; (b) $m_{K^0} = 498.35 \text{ MeV}/c^2$.
- (38) (a) E/Mc , (b) $EL/(mc^2)$.

Capítulo 3

- (1) (a) 0.966 mm; (b) 9.66 μm ; (c) 0.966 μm .
- (2) (a) 4.14×10^3 K; (b) 0.0966 K; (c) 0.966×10^{-3} K.

- (3) En un factor 16.
 (4) (b).
 (5) (a) Sí, siempre que la frecuencia supere la frecuencia umbral; (b) falso; (c) verdadero; (d) verdadero.
 (6) (b).
 (7) (a).
 (8) 2.426 Å.
 (9) (a) $\lambda_e/1800$ ($\lambda_e = 0.02426$ Å); (b) 938 MeV.
 (10) (c).
 (11) (c).
 (12) (a) 6.626×10^{-26} J, 4.136×10^{-7} eV; (b) 5.96×10^{-28} J, 3.72×10^{-9} eV.
 (13) (a) 2.41×10^{14} Hz; (b) 2.41×10^{17} Hz; (c) 2.41×10^{20} Hz.
 (14) 4.05×10^3 m⁻³.
 (15) (a) 0.775 nm; (b) 0.0775 nm; (c) 0.0245 nm; (d) 7.75 pm.
 (16) 0.202 nm.
 (17) 10 fm.
 (18) $p = 1.325 \times 10^{-22}$ kg m/s, $E = 3.97 \times 10^{-14}$ J, $\Delta p \geq 1.055$ kg m/s.
 (19) (a) 9.41 μm (rango del infrarrojo); (b) 4592.94 W/m²; (c) 0.163 cm².
 (20) (c) 1.06 mm; (d) 2.82×10^{11} Hz; (e) 1.6×10^9 W.
 (21) 398.97 K.
 (22) El sol emite el 36.8% de su radiación en el visible.
 (23) 1.80 eV.
 (24) (a) 2.24 eV; (b) 4.14×10^{-15} eV·s.
 (25) (a) 0.242 nm; (b) 5.12 keV, 5.12 keV/c y 0.242 nm.
 (26) (a) $\Delta\lambda = 2.426$ pm; (b) 0.206 MeV.
 (27) $Q = 0.218$ MeV, $E_e = 0.804$ MeV, 19.27°.
 (28) (a) 3.76×10^{-5} eV, (b) 3.1 eV; (c) no podría, esa energía es muy pequeña en comparación con la función de trabajo de cualquier metal.
 (32) (a) 135 MeV; (b) 2.43×10^{-24} s.
 (33) (a) $\hbar^2/(2mL^2)$; (b) 3.81 eV y $3.81/10^{16}$ eV; (c) 1.39×10^{-61} J.
 (34) $(\Delta x)_{\text{bala}} = 1.055 \times 10^{-31}$ m y $(\Delta x)_{\text{proton}} = 6.31 \times 10^{-7}$ m.
 (35) 2.8×10^{-8} .
 (36) (a) 140 MeV; (b) 2.35×10^{-24} s; (c) 7.05×10^{-16} m; (d) 4.25×10^{17} piones.
 (38) (a) 10^{-22} W; (b) 3120 s.

Capítulo 4

- (1) (a) 19.05 eV; (b) 103.8 MeV.
 (2) (a) 0.004; (b) 0.003; (c) 0.
 (3) (a) 0.5; (b) 0.13; (c) 0.64.
 (4) $\psi_4(x) = \sqrt{2/L} \text{sen}(4\pi x/L)$, $|\psi_4(x)|^2 = (2/L) \text{sen}^2(4\pi x/L)$.
 (5) Esto es obvio por la linealidad de la ecuación de Schrödinger.

- (6) $V(x) = -(\hbar^2/mL^2) + (2\hbar^2/mL^4)x^2$ (este es el potencial de un oscilador armónico).
- (7) (a) $E_1 = 204.7$ MeV, $E_2 = 818.8$ MeV y $E_3 = 1842.3$ MeV; (b) 2.02 fm; (c) 1.21 fm; (d) 0.75 fm.
- (8) $\langle x \rangle_{n=1} = 0$, $\langle x^2 \rangle_{n=1} = L^2[1/12 - 1/(2\pi^2)]$, $\langle x \rangle_{n=2} = 0$, $\langle x^2 \rangle_{n=2} = L^2[1/12 - 1/(8\pi^2)]$.
- (9) (a) $E_{n,rel} = \sqrt{(nhc/2L)^2 + (mc^2)^2}$; (b) 84 keV (error absoluto).
- (10) 1.27 MeV (más de dos veces la energía en reposo del electrón).
- (11) $\langle x \rangle = L/2$, $\Delta x = L\sqrt{1/12 - 1/(2n^2\pi^2)}$, $n \rightarrow \infty$.
- (12) (a) $C = 1/\sqrt{x_0}$; (b) $\Delta x = x_0/\sqrt{2}$; (c) $1 - e^{-\sqrt{2}} \approx 0.757$.
- (14) $(3\pi\hbar/L)^2$.
- (15) (b) $\langle p^2 \rangle = (\hbar\pi/L)^2$; (c) $\Delta x\Delta p = \hbar\sqrt{\pi^2/12 - 1/2}$ (compatible con el principio de incertidumbre).
- (16) 1.14 kN/m.
- (19) (a) 9.49 nm; (b) 4.19 meV.
- (21) (b) $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ ($x < 0$), $k = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$ ($x > 0$), para que se satisfaga la condición de normalización: $E/V_0 < 1$.
- (22) 1.03.
- (23) 0.341.
- (25) (a) 1.07×10^{-6} ; (b) 4.5 V.
- (26) (a) 1/9 y 8/9; (b) no cambia.

Capítulo 5

- (1) -122.4 eV.
- (2) 1.325 nm.
- (3) 7 valores distintos.
- (4) 1.89 eV (656 nm), 2.55 eV (486 nm), 2.86 eV (434 nm).
- (5) El estado 3s tiene $l = 0$ y, por tanto, el electrón correspondiente tiene una probabilidad significativa de estar cerca del núcleo. De este modo, el electrón 3s está en una región de baja energía potencial. En el estado $l = 1$, la densidad de probabilidad en el núcleo es cero y de este modo, el electrón 3p está apantallado de la carga nuclear por los electrones 1s y 2s. En el hidrógeno, los electrones 3s y 3p experimentan el mismo potencial ya que no hay electrones internos.
- (6) El átomo de helio tendría una energía de ionización más pequeña.
- (7) (a) Si; (b) Ca.
- (8) Están permitidas las transiciones (a), (d) y (e).
- (9) (a) 0.0610 nm y 0.0578 nm; (b) 0.0542 nm.
- (10) Ca.
- (14) He⁻ (helio ionizado).
- (17) (a) l puede ser 0 ó 1; (b) $j = 3/2, 5/2$.

- (18) 3.06 cm.
- (19) (a) 1.6179 eV y 1.6106 eV; (b) 7.30 meV; (c) 63.0 T.
- (21) (a) $4S_{1/2}$, $4P_{1/2}$, $4P_{3/2}$, $4D_{3/2}$, $4S_{5/2}$, $4F_{5/2}$, $4F_{7/2}$; (b) cada nivel caracterizado por un número cuántico j se desdobra en $2j + 1$ niveles.
- (23) (a) $\alpha = 7.297 \times 10^{-3} \approx 1/137$; (c) sí, está justificado.
- (25) (a) $E_1 = -6.80$ eV, $E_2 = -1.70$ eV, $E_3 = -0.756$ eV, $E_4 = -0.425$ eV, $E_5 = -0.272$ eV; (b) ninguna de las transiciones da lugar a un fotón en el rango del visible.
- (26) $E_1 = -2.53$ keV, $E_2 = -0.633$ keV, $E_3 = -0.281$ keV, $E_4 = -0.158$ keV, $E_5 = -0.101$ keV; (b) ninguna de las transiciones da lugar a un fotón en el rango del visible.
- (27) (a) Teniendo en cuenta el espín se ocupan los dos niveles de más baja energía (el estado fundamental no está degenerado y el primer nivel excitado está triplemente degenerado), la energía total es 394.93 eV; (b) todas las partículas ocupan el estado fundamental y la energía total es 225.6 eV.
- (28) (a) $\lambda_{L\alpha} = 36hc/(Z - 7)^2 5E_0$; (b) $\lambda_{L\alpha} = 0.535$ nm.
- (29) (d) ≈ 0.496 .
- (30) (b) $1 - 5e^{-2} \approx 0.323$.

Capítulo 6

- (10) (a) 0.18 eV; (b) 1.34×10^{-47} kg/m²; (c) 0.926 Å.
- (13) (a) $r_0 = a$; (b) $U(r_0) = -U_0$.
- (14) (a) $E_x = 2kp/x^3$ ($k =$ constante de Coulomb y $p =$ módulo del momento dipolar de la molécula); (b) $U \propto 1/x^6$; (c) $F_x \propto 1/x^7$; (d) $F_x \propto 1/x^4$.

Capítulo 7

- (19) (a) 2.64×10^{-14} s; (b) 3.08 nm; (c) el parámetro de red de la plata en su estructura cristalina es 0.409 nm, es decir, casi un orden de magnitud menor que el camino libre medio.
- (23) (a) 5.9×10^{28} electrones/m³; (b) 5.25 eV; (c) 201.9.
- (25) (a) $a_B = (\kappa m_e/m_{ef})a_0$, 3.17 nm (Si) y 8.46 nm (Ge); (b) $E_B = (m_{ef}/m_e \kappa^2)E_0$, 18.9 meV (Si) y 5.31 meV (Ge).
- (26) $\lambda_{Si} = 37.2$ nm, $\lambda_{Cu} = 38.8$ nm.

Capítulo 8

- (1) (a) Desintegración β^+ : $^{22}\text{Na} \longrightarrow ^{22}\text{Ne} + e^+ + \nu_e$; (b) desintegración β^- : $^{24}\text{Na} \longrightarrow ^{24}\text{Mg} + e^- + \bar{\nu}_e$.
- (2) (a) 92.2 MeV (7.68 MeV por nucleón); (b) 492 MeV (8.79 MeV por nucleón); (c) 1802 MeV (7.57 MeV por nucleón).
- (3) Para responder a esta pregunta se tiene que analizar la reacción: $^{211}\text{Bi} \longrightarrow$

- $^{207}\text{Tl} + \alpha$. El valor Q de esta reacción es 6.75 MeV y, al ser positivo, indica que esta reacción puede ocurrir de forma espontánea y, por tanto, el ^{211}Bi es un emisor α .
- (4) 0.0186 MeV.
 - (5) 6.77 fm y 4.69 fm.
 - (6) (a) 200 s; (b) $3.47 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$; (c) 125 cuentas/s.
 - (7) 2.664×10^{21} desintegraciones/s.
 - (8) (a) -0.764 MeV (reacción endotérmica); (b) 2.24 MeV (reacción exotérmica).
 - (9) 1.56×10^{19} fisiones/s.
 - (10) (a) 1.03×10^6 kg; (b) 2.88×10^6 kg.
 - (11) Del principio de incertidumbre se deduce que la energía cinética mínima de un electrón en el interior de un núcleo sería del orden de 9.38 MeV, que es claramente mayor que la energía observada experimentalmente.
 - (13) $K_\alpha = 5.15$ MeV y $K_U = 87.7$ keV.
 - (14) (a) 2.52×10^{24} núcleos; (b) 2.31×10^{12} desintegraciones/s; (c) 9.83×10^5 años.
 - (15) Se necesitan 2.94 g.
 - (18) 7.03×10^8 años.
 - (19) (a) 4.27 MeV; (b) no es posible.
 - (20) Son posibles la desintegración β^- : $^{80}\text{Br} \rightarrow ^{80}\text{Kr} + e^- + \bar{\nu}_e$, la desintegración β^+ : $^{80}\text{Br} \rightarrow ^{80}\text{Se} + e^+ + \nu_e$, y la captura electrónica: $^{80}\text{Br} + e^- \rightarrow ^{80}\text{Se} + \nu_e$.
 - (21) Son posibles la desintegración β^- : $^{40}\text{K} \rightarrow ^{40}\text{Ca} + e^- + \bar{\nu}_e$, la desintegración β^+ : $^{40}\text{K} \rightarrow ^{40}\text{Ar} + e^+ + \nu_e$, y la captura electrónica: $^{40}\text{K} + e^- \rightarrow ^{40}\text{Ar} + \nu_e$.
 - (22) (a) 1.20 MeV; (b) hay que incluir la masa del positrón expulsado más la masa del electrón extra en el átomo de ^{13}C .
 - (23) (a) $Q = -1.191$ MeV y $K_u = 1.53$ MeV; (b) $Q = 17.35$ MeV.
 - (24) (a) 208 MeV; (b) 295 MeV.
 - (25) $K_{\text{He}} = 3.542$ MeV y $K_n = 14.057$ MeV.
 - (26) (b) $K_{\text{Br}} = 112.050$ MeV y $K_{\text{La}} = 65.384$ MeV.
 - (27) (a) 23.0 MeV; (b) 4.19 GeV; (c) 1.29 GeV.
 - (29) (b) 3.88×10^{38} protones/s; (c) 4.88×10^{10} años.

Capítulo 9

- (3) (a) Por la conservación del momento ambos rayos γ deben tener el mismo momento lineal y, por tanto, la misma energía ($E = pc$); (b) 139.6 MeV; (c) 8.88 fm.
- (4) (a) 279.2 MeV; (b) 1.8766 GeV; (c) 211.3 MeV.
- (6) Uno de los neutrinos tiene que ser electrónico y el otro ha de ser un antineutrino muónico.
- (7) (a) Viola la conservación de la energía y del número leptónico electrónico; (b) viola la conservación de la energía; (c) viola la conservación del momento lineal; (d) válida; (e) válida.

- (8) (a) Está prohibida porque viola la conservación del número leptónico; (b) está permitida; (c) está prohibida porque viola la conservación del número bariónico; (d) está permitida.
- (10) (a) $\bar{\nu}_\mu$; (b) ν_μ ; (c) $\bar{\nu}_e$; (d) ν_e ; (e) ν_μ ; (f) $\nu_\mu + \bar{\nu}_e$.
- (11) (a) $\Delta S = 1$ (interacción débil); (b) $\Delta S = 2$ (prohibida); (c) $\Delta S = 1$ (interacción débil); (d) $\Delta S = 1$ (interacción débil); (e) $\Delta S = 2$ (prohibida); (f) $\Delta S = 2$ (prohibida); (g) $\Delta S = 1$ (interacción débil).
- (12) (a) La desintegración que tiene lugar es la primera; (b) la segunda no es posible porque no se conserva el número leptónico L_τ ; (c) 1678.3 MeV.
- (13) (a) $B = 1, Q = 1, S = 0$, partícula: p ; (b) $B = 1, Q = 0, S = 0$, partícula: n ; (c) $B = 1, Q = 1, S = -1$, partícula: Σ^+ ; (d) $B = 1, Q = -1, S = -1$, partícula: Σ^- ; (e) $B = 1, Q = 0, S = -2$, partícula: Ξ^0 ; (f) $B = 1, Q = -1, S = -2$, partícula: Ξ^- .
- (14) (a) $B = 0, Q = 1, S = 0$, partícula: π^+ ; (b) $B = 0, Q = -1, S = 0$, partícula: π^- ; (c) $B = 0, Q = 1, S = 1$, partícula: K^+ ; (d) $B = 0, Q = -1, S = -1$, partícula: K^- .
- (15) uuu .
- (16) (a) $u\bar{s}$; (b) $d\bar{s}$.
- (17) (a) $\bar{d}c$; (b) $d\bar{c}$.
- (18) La tercera partícula es un neutrón.
- (26) (a) No, el neutrón no es estable; (b) $\Omega^- \longrightarrow 3e^- + p + e^+ + 2\bar{\nu}_\mu + 2\nu_\mu + 3\bar{\nu}_e + \nu_e$; (c) la extrañeza no se conserva, pero sí lo hace en cada desintegración de un barión.
- (27) (a) el número bariónico no se conserva; (b) todas las leyes de conservación se cumplen.
- (28) (a) uds ; (b) $\bar{u}\bar{u}\bar{d}$; (c) dds .
- (29) (a) $Q = -1, B = 1, S = 0$; (b) $Q = 0, B = 0, S = 0, C = -1$; (c) $Q = 1, B = 0, S = 0, B' = -1$; (d) $Q = 1, B = -1, S = 3$.
- (30) $u\bar{u} \rightarrow$ nada (u y \bar{u} se aniquilan mutuamente); (b) se requieren dos o más fotones para conservar el momento lineal.
- (31) (a) K^0 ; (b) Σ^0 o Λ^0 ; (c) K^+ .
- (32) $K_{\text{total}} = 38.1$ MeV; (b) $K_p = 3.15$ MeV y $K_\pi = 34.95$ MeV.
- (35) (c) $Q = 1.365$ GeV y $v_\pi \approx 0.97c$.
- (36) (a) 444.65 MeV; (b) 2.199 GeV.
- (38) (a) $p_\Sigma = 686.55$ MeV/ c , $p_\pi = 200.1$ MeV/ c ; (b) $p_n = 626.98$ MeV/ c ; (c) $E_\pi = 243.984$ MeV, $E_n = 1129.581$ MeV, $E_\Sigma = 1373.565$ MeV; (d) $m_\Sigma c^2 = 1189.67$ MeV, $v_\Sigma = 0.5c$.