TEMA 6: SERIES DE FUNCIONES Y SERIES DE TAYLOR

Matemáticas, Grado en Física

"En la vida no hay nada que temer, sólo hay que comprender"
Marie Curie

1. Series de funciones.
   - Definición.
   - Estudio del dominio de convergencia puntual.
2. Series de potencias.
   - Definición.
   - Estudio de su convergencia. Radio de convergencia.
   - Derivabilidad.
3. Series de Taylor.
   - Definición. Serie de McLaurin.
   - Series de Taylor de las funciones elementales en $x = 0$.
4. Polinomios de Taylor y aproximación de funciones. Resto de Lagrange. Aplicaciones.

1. SERIES DE FUNCIONES

Una SERIE DE FUNCIONES es una "suma de infinitas funciones" con un orden:

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

- Cada sumando es ahora una función de x.
- Para que la serie esté definida, x ha de pertenecer al dominio común de todas las funciones $f_n(x)$.
- Para cada valor de x donde la serie está definida, se obtiene una serie de números reales, que puede ser convergente o divergente, es decir, a la que podemos asignarle un valor suma real o no.

1. SERIES DE FUNCIONES

Ejemplo: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$

Como las funciones x^n existen para todos los reales, la serie está definida para cualquier x real. Por ejemplo:

- Si $x = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$, que diverge.
- Si $x = 1/2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$, que converge.
- Si $x = -2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n = 1 - 2 + 4 - 8 + \dots$, que diverge.

1. SERIES DE FUNCIONES

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

- El conjunto de valores x para los cuales la serie de funciones converge se llama **dominio de convergencia puntual**.
- En ese dominio, y sólo en él, la serie *se puede sumar*, aunque lógicamente la suma de la serie dependerá del valor de x concreto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x) \text{ en el dominio de convergencia}$$

- Al igual que para series de números reales, no siempre será fácil calcular esa suma...

1. SERIES DE FUNCIONES

Ejemplo: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$

¿Cuáles son todos los valores x para los cuales $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge?

- Al ser $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ la serie geométrica de razón x, esta serie de funciones converge si $|x| < 1$. El dominio de convergencia puntual es $(-1, 1)$.
- Además, conocemos su suma en esos casos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ si } |x| < 1.$$

1. SERIES DE FUNCIONES

¿Cómo estudiar para qué valores de x converge una serie de funciones?

Usando los criterios para series de números reales que ya hemos estudiado, tratando x como si fuera un parámetro:

Ejemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^{2n-1}} = \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{2^3} + \frac{(x-1)^3}{2^7} + \ldots.$

Aplicamos el criterio de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x-1|^n}{2^{2n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-1|}{2^{2-1/n}} = \frac{|x-1|}{4}$$

Luego la serie converge si $|x-1| < 4$ (es decir, si $x \in (-3, 5)$).
En $|x-1| = 4$, es decir, $x = -3$ y $x = 5$, este criterio no decide, pero la serie es divergente, pues se obtiene $\sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} 2$, respectivamente.

1. SERIES DE FUNCIONES

ALGUNOS TIPOS DE SERIES IMPORTANTES EN FÍSICA

- Series de Fourier: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(2\pi n x)$
- Series de potencias: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_o)^n$, como la que hemos visto en el ejemplo anterior.
  (en particular, las llamadas SERIES DE TAYLOR)

2. SERIES DE POTENCIAS

Son de la forma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_o)^n$, siendo x_o un número real.

Decimos que la serie está centrada en x_o.

Una serie de potencias es como un *polinomio infinito*.

Ejemplos: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^{2n-1}}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n(x-1)^n$...

Al igual que para otros tipos de series de funciones, para averiguar dónde converge una serie de potencias podemos emplear los criterios que vimos en el tema anterior.

En series de potencias, resultan particularmente útiles el criterio del cociente y el criterio de la raíz.

2. SERIES DE POTENCIAS

Ejemplo: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n}$

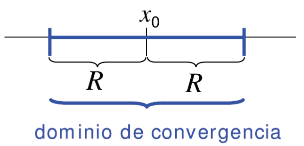
Estas tres series sólo se diferencian en el punto x_o en el que están centradas. Si estudiamos su convergencia (por ejemplo, con el criterio del cociente), veremos que:

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ converge en $[-1,1)$ (entorno de centro 0 y radio 1).
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$ converge en $[1,3)$ (entorno de centro 2 y radio 1) .
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n}$ conv. en $[-2,0)$ (entorno de centro -1 y radio 1).

¿Qué nos sugiere este resultado? ¿Qué nos llama la atención?

2. SERIES DE POTENCIAS

Toda serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_o)^n$ converge en un entorno de cierto radio alrededor de x_o.



- Dicho radio, R, se denomina radio de convergencia. Si $|x-x_o|<R$, la serie converge. En $|x-x_o|>R$, la serie diverge. En $x=x_o\pm R$, la serie podrá converger o divergir, ¡ojo!
- El radio también puede ser 0, si la serie sólo converge en x_o, o ∞, si converge para cualquier x real.
- Dicho radio no depende de x_o, y únicamente depende de a_n.

2. SERIES DE POTENCIAS

Como toda serie de funciones, una serie de potencias tiene una suma asociada en aquellos valores x donde converge, y así, en su dominio de convergencia:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_o)^n = f(x)$$

$f(x)$ representa el valor de la suma para cada x donde converge.

2. SERIES DE POTENCIAS

Las series de potencias se pueden derivar término a término (como si fuesen polinomios) en el interior del dominio de convergencia, es decir, son infinitamente derivables en $|x - x_o| < R$:

T^a Sea $R > 0$ (finito o infinito), y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_o)^n = f(x)$ para $|x - x_o| < R$, entonces f es derivable en $|x - x_o| < R$, $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_o)^{n-1}$ converge, y $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_o)^{n-1} = f'(x)$

Otra forma de leer el teorema: las funciones definidas como series de potencias tienen muy buenas propiedades en $|x - x_o| < R$: son de clase C^∞, infinitamente derivables.

2. SERIES DE POTENCIAS

Resumamos lo aprendido hasta ahora sobre series de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_o)^n :$$

- Convergen en un entorno de radio R centrado en x_o (que puede ser también 0 o ∞).
- Para saber dónde convergen, usamos los criterios para series de números reales.
- Allá donde convergen, al igual que toda serie de funciones, se pueden igualar a una función suma:

  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_o)^n$ en el dominio de convergencia.
- La serie y f son infinitamente derivables en $|x - x_o| < R$.

2. SERIES DE POTENCIAS

¿POR QUÉ NOS INTERESAN TANTO LAS SERIES DE POTENCIAS?

- ¿Cuáles son las funciones más fáciles de manejar?
  Los polinomios (son funciones continuas, fácilmente derivables, integrables...)
  Las series de potencias son "como polinomios infinitos".
- En ocasiones, el hecho de que una función se pueda representar por una serie de potencias va a simplificarnos mucho los cálculos...
- La pregunta que nos surge es:

¿Cuándo se puede representar una función por una serie de potencias?

Si se puede, ¿cuál es esa serie de potencias?, ¿es única?

2. SERIES DE POTENCIAS

Existe una relación entre los coeficientes a_n de la serie de potencias y la función que representa su suma en su dominio de convergencia:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_o)^n = a_o + a_1 (x - x_o) + a_2 (x - x_o)^2 + \dots$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_o)^{n-1} = a_1 + 2a_2 (x - x_o) + 3a_3 (x - x_o)^2 + \dots$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_o)^{n-2} = 2a_2 + 6a_3 (x - x_o) + \dots$$

$$\vdots$$

$$f^k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n (x - x_o)^{n-k} = k! a_k + \dots$$

Tomando $x = x_o$ en estas expresiones,

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_o)^n \Rightarrow a_n = \dfrac{f^n(x_o)}{n!}$

2. SERIES DE POTENCIAS

Existe una relación muy concreta entre los coeficientes a_n de la serie y los valores de la función suma y sus derivadas en x_o:

Si una función es igual a una serie de potencias centrada en un cierto x_o, esa serie es única, y es $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_o)}{n!}(x-x_o)^n$

Si f es igual a una serie de potencias centrada en x_o, esa serie de potencias va a ser su **SERIE DE TAYLOR.**

3. SERIES DE TAYLOR

DEFINICIÓN

Dada una función **infinitamente derivable en un punto x_o**, se define la **serie de Taylor de f centrada en x_o** como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_o)}{n!}(x-x_o)^n$$

En muchas aplicaciones nos interesará $x=0$, en cuyo caso la serie de Taylor se denomina también **serie de McLaurin**: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!}x^n$

Si calculamos la serie de Taylor de f centrada en x_o (para lo cual necesitamos conocer las sucesivas derivadas de f en dicho punto),

¿podemos escribir directamente $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_o)}{n!}(x-x_o)^n$?

3. SERIES DE TAYLOR

¿Podemos escribir directamente $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_o)}{n!}(x-x_o)^n$?

Claramente no, pues deberemos especificar los x para los que se cumple:

- En primer lugar, y obviamente, **x debe pertenecer al dominio de f**
- En segundo lugar, **la serie deberá converger para ese valor de x** (si divergiera, no tendría un valor suma $f(x)$ asociado).
- **Hay una tercera condición**, que veremos en breve (aunque para la mayoría de las funciones, f y su serie de Taylor coinciden si se cumplen las dos primeras)

3. SERIES DE TAYLOR

SERIES DE TAYLOR DE FUNCIONES ELEMENTALES EN $x=0$

$f(x)=e^x$ en $x=0$

- $f^n(x) = e^x \Rightarrow f^n(0) = 1$
- La serie de Taylor es así: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \dots$
- Podemos comprobar que la serie converge $\forall x$ real (crit. cociente).
- Luego demostraremos que, en efecto,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \dots \ \forall x \in \mathbb{R}$$

3. SERIES DE TAYLOR

SERIES DE TAYLOR DE FUNCIONES ELEMENTALES EN $x = 0$

$f(x) = \log(x+1)$ **en** $x = 0$

$$'(x) = \frac{1}{1+x},\ f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2},\ f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3},\ f^4(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}$$

$\Rightarrow f(0) = 0$ **y** $f^n(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$ **para** $n = 1, 2, 3...$

- **La serie de Taylor es así:** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}...$**, que converge si** $x \in (-1, 1]$
- **Luego demostraremos que, en efecto,**

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}... \text{ si } x \in (-1, 1]$$

3. SERIES DE TAYLOR

SERIES DE TAYLOR DE FUNCIONES ELEMENTALES EN $x = 0$

$f(x) = \sin x$ **en** $x = 0$

$$f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x,\ f^4(x) = \sin x$$

- **La serie de Taylor es así:** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}...$**, que converge** $\forall x \in \mathbb{R}$
- **Luego demostraremos que, en efecto,**

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}... \ \forall x \in \mathbb{R}$$

(ver tabla resumen de las series de Taylor de las func. elementales)

3. SERIES DE TAYLOR

Un ejemplo curioso:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Podemos comprobar que $f^n(0) = 0$, luego su serie de Taylor en $x = 0$ es $0 + 0 + 0 + ...$, que obviamente converge para cualquier real. Sin embargo la serie no coincide con f salvo en $x = 0$.

¡Ojo! No olvidemos que NO basta con que la serie converja para que f sea igual a la serie...

3. SERIES DE TAYLOR (no centradas en x=0)

Las series de Taylor en $x = 0$ son las más usadas, pero existen tantas series de Taylor asociadas a una función como puntos en los que la función sea infinitamente derivable .

Ejemplo: Vimos que $\displaystyle e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}... \ \forall x \in \mathbb{R}$

Si queremos la serie de Taylor de e^x en $x = 2$, basta tener en cuenta que $f^n(x) = e^2$ y la serie será:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2(x-2)^n}{n!} = e^2\left(1 + (x-2) + \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(x-2)^3}{6}...\right)$$ **, y**

también podremos comprobar que para cualquier real se cumple:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2(x-2)^n}{n!} = e^2\left(1 + (x-2) + \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(x-2)^3}{6}...\right)$$

3. SERIES DE TAYLOR

- ¿Por qué este empeño en intentar reescribir las funciones como series de Taylor?
  Ya dijimos que al ser como polinomios infinitos, a veces simplificarán los cálculos...
- Pero, ¿qué ocurriría si nos bastara con una aproximación a la función? ¿Nos bastaría con usar unos cuántos términos de ese polinomio infinito?
  Si la función es igual a la suma de los infinitos términos, es razonable pensar que si "truncamos" la serie en un cierto n, obtendremos una aproximación razonable a la función...Esta es la idea de los POLINOMIOS DE TAYLOR.
- Pero, ¿dónde truncar? ¿Qué significado tienen los distintos términos de la serie de Taylor?

4. POLINOMIOS DE TAYLOR

DEFINICIÓN

Dada una función N veces derivable en un punto x_o, se define el polinomio de Taylor de f centrado en x_o de grado N como:

$$P_{N,x_o}(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^n(x_o)}{n!}(x-x_o)^n$$

- Es como una "serie de Taylor truncada en grado N". O podríamos decir que la serie de Taylor es como "un polinomio de Taylor de grado infinito"
- En general, el polinomio de Taylor de grado N en x_o será el polinomio de grado N que mejor aproxima a la función en las cercanías del punto x_o. ¿POR QUÉ ES ESTO ASÍ?

4. POLINOMIOS DE TAYLOR

$$P_{N,x_o}(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^n(x_o)}{n!}(x-x_o)^n =$$

$$f(x_o)+f'(x_o)(x-x_o)+f''(x_o)\frac{(x-x_o)^2}{2}+\ldots+f^N(x_o)\frac{(x-x_o)^N}{N!}$$

Si calculamos las derivadas sucesivas de este polinomio en x_o comprobaremos que, en general, el polinomio de Taylor de grado N en x_o es el polinomio de grado N que mejor aproxima a la función en las cercanías del punto x_o porque coincide con f y sus N primeras derivadas en dicho punto:

$$P^k_{N,x_o}(x) = f^k(x_o), \text{ con } k = 0\ldots N$$

4. POLINOMIOS DE TAYLOR

Ejemplo: ¿Cuál es el polinomio de grado 1 que mejor aproxima a e^x cerca de $x=0$?

$$P_{1,0}(x) = f(x_o)+f'(x_o)(x-x_o) = 1+x$$

Lógico, el polinomio de Taylor de grado 1 que mejor aproxima a una función cerca de un punto es la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto.

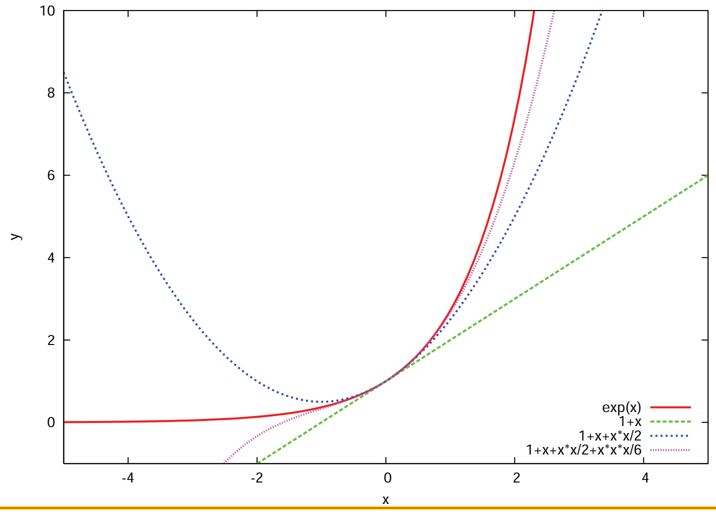
¿Cuál es el polinomio de grado 2 que mejor aproxima a e^x cerca de $x=0$?

$$P_{2,0}(x) = f(x_o)+f'(x_o)(x-x_o)+f''(x_o)\frac{(x-x_o)^2}{2} = 1+x+\frac{x^2}{2}$$

A medida que añadimos términos, nos vamos acercando más y más al comportamiento de e^x y la aproximación funcionará mejor para valores cada vez más alejados del 0...

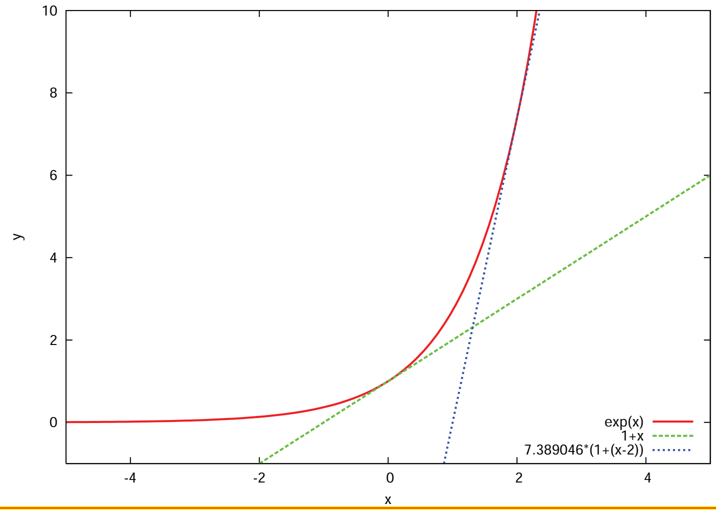
4. POLINOMIOS DE TAYLOR

POLINOMIOS DE TAYLOR DE e^x en $x = 0$



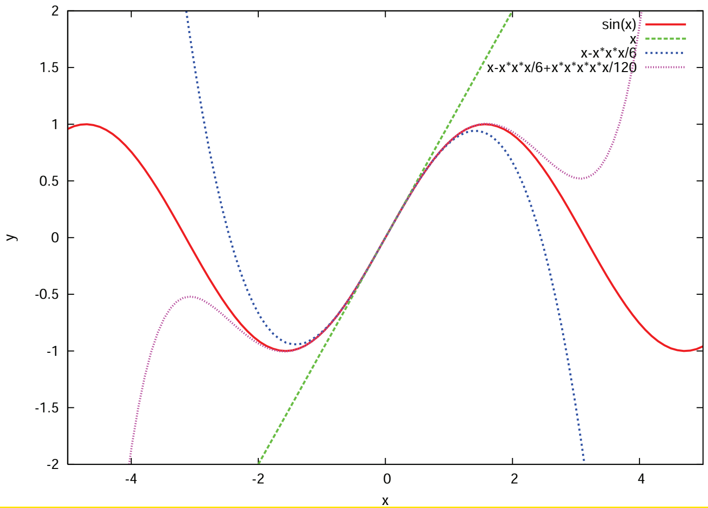
4. POLINOMIOS DE TAYLOR

POLINOMIOS DE TAYLOR DE GRADO 1 DE e^x en $x = 0$ Y EN $x = 2$



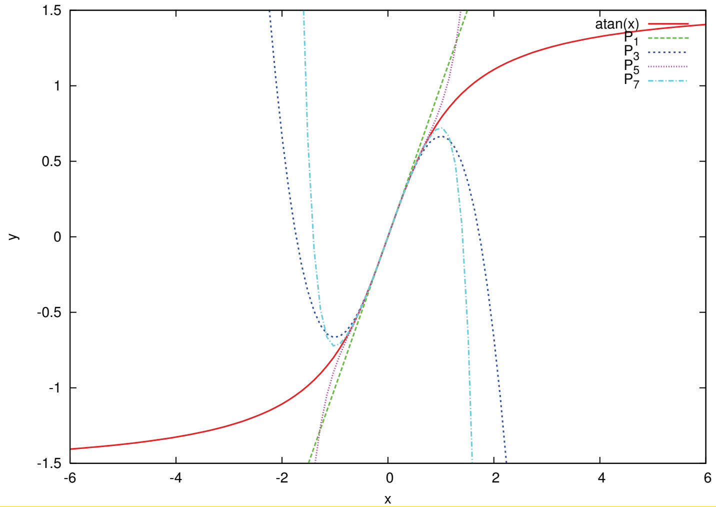
4. POLINOMIOS DE TAYLOR

POLINOMIOS DE TAYLOR DE $\sin x$ en $x = 0$



4. POLINOMIOS DE TAYLOR

POLINOMIOS DE TAYLOR DE $\arctan x$ en $x = 0$



4. POLINOMIOS DE TAYLOR

RESTO DE TAYLOR

El polinomio de Taylor de grado N en x_o asociado a una función es una aproximación a la función. A la diferencia que existe entre polinomio y función se le llama resto:

$$f(x) = P_{N,x_o}(x) + R_{N,x_o}(x)$$

Ese resto será, normalmente:

- Más pequeño cuánto más cerca estemos del punto x_o.
- Más pequeño también conforme aumenta N (el grado del polinomio).

Dicho de otra forma, aproximar f por un polinomio de Taylor en x_o funcionará, en general, mejor cuánto más cerca estemos del punto x_o y cuántos más términos cojamos (como vemos en los ejemplos).

4. POLINOMIOS DE TAYLOR

Hay expresiones para estos restos que nos permiten estimar y/o acotar el error que cometemos cuando aproximamos f por $P_{N,x_o}(x)$. Una de ellas es:

FORMA DE LAGRANGE DEL RESTO DE TAYLOR

$$R_{N,x_o}(x) = \frac{f^{N+1}(c)}{(N+1)!}(x-x_o)^{N+1} \text{ con } c \in (x_o, x) \text{ si } x > x_o$$
$$c \in (x, x_o) \text{ si } x < x_o$$

Aprenderemos a usarla en ejercicios

4. POLINOMIOS DE TAYLOR

RELACIÓN ENTRE SERIES Y POLINOMIOS DE TAYLOR

- El polinomio de Taylor de grado N en x_o sirve para aproximar f:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^n(x_o)}{n!}(x-x_o)^n + R_{N,x_o}(x)$$

- Sabemos que la serie de Taylor de f centrada en x_o es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_o)}{n!}(x-x_o)^n,$$

y no siempre la función es igual a esta serie de Taylor...

¿CONDICIÓN SUFICIENTE para escribir $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_o)}{n!}(x-x_o)^n$?

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_o)}{n!}(x-x_o)^n \Leftrightarrow \lim_{N\to\infty} R_{N,x_o}(x) = 0$$

4. POLINOMIOS DE TAYLOR

Ejemplo: Probar que $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots$ $\forall x \in \mathbb{R}$

- Partimos de la expresión del polinomio de Taylor de grado N en 0 y su resto de Lagrange:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{(-1)^{N+1} x^{2N+3}}{(2N+3)!}\cos c,$$

donde $c \in (0, x)$ si $x > 0$ y $c \in (x, 0)$ si $x < 0$

- Comprobamos que $\lim_{N\to\infty} R_{N,x_o}(x) = 0 \; \forall x$:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{(-1)^{N+1} x^{2N+3}}{(2N+3)!}\cos c = 0 \text{ (acotado } \cdot 0)$$

1. SERIES DE FUNCIONES

EJEMPLOS DE APLICACIONES DE SERIES DE FUNCIONES

- **¿Cuál es la fuerza de la gravedad sobre un objeto de masa m a una altura h sobre la superficie de la Tierra? ¿$F = mg$?**
- **Relación entre la energía cinética relativista y la no relativista.**
- **La teoría de perturbaciones en Física Cuántica (por ejemplo, para hallar niveles de energía de átomos)**
- **El desarrollo del virial en Termodinámica para modelizar gases reales.**
- **Las funciones de Bessel que surgen en la ecuación diferencial que nos da la distribución de T de una placa circular o las vibraciones de un tambor.**
- **Descomposición en armónicos de señales eléctricas (Fourier)...**