LECCIÓN 6: MUESTREO ALEATORIO

1. Introducción

El objetivo básico de la estadśtica es estudiar, de un modo aproximado, alguna característica de una población.

Supongamos que en un cierto estudio científico sobre alimentación, tenemos que estudiar la altura de las personas que viven en España, para tomar cierta medidas de precaución en los comedores de los colegios públicos. Podemos entender por **población** los 50 millones de personas que viven actualmente en España, y el **tamaño** de esta población será de 50 millones. La característica que queremos estudiar es la altura. Esta la vamos a entender como un fenómeno aleatorio, en el sentido de que si realizamos el experimento aleatorio de tomar una persona al azar y medimos su altura, si repetimos este experimento en las mismas condiciones, los resultados son diferentes e imposibles de predecir.

Consideramos la variable aleatoria X que a cada persona de la población le hace corresponder su altura. Si conocemos la función de probabilidad de X, podemos conocer los resultados posibles del fenómeno y asignar a cada uno de ellos un indicador de las posibilidades que tienen de ocurrir, denominado probabilidad. Bajo este esquema es posible adoptar las decisiones que correspondan en cada caso, conociendo el riesgo inherente a las mismas. Sin embargo, este escenario es , con frecuencia, irreal, ya que el fenómeno aleatorio que estamos estudiando casi nunca puede ser completamente caracterizado por un modelo de probabilidad, (lo que exigiría conocer su distribucuón de probabilidad). Tenemos que trabajar con la información de un conjunto, **muestra**, de alturas de "tamaño"mucho menor que 50 millones, y que sea representativa"de la poblacion española actual, para obtener información del modelo de probabilidad de la variable aleatoria X.

Hasta ahora hemos indicado que queremos estudiar una cierta carasterística de una determinada población. La característica vamos a verla como una variable aleatoria X. No conocemos la distribución de probabilidad de esta variable aleatoria X; (si la conociéramos el problema que nos ocupa dejaría de existir). Con el fin de obtener información sobre esta, vamos a estudiar la característica sobre muestra de la población.

A partir de ahora, para referirnos a este problema, diremos: çonsideramos la población X con función de probabilidad P, si la variable aleatoria es discreta, (función de densidad f, si la variable aleatoria es continua)", y tenemos que entender que tenemos una población donde queremos estudiar una cierta característica y esta característica la vemos como una variable aleatoria X.

Sea una población X con función de masa P, (densidad f), como hemos indicado en el ejemplo anterior, tendremos que trabajar con la información de la característica X solo en una "muestra pequeña"de la población con respecto al tamaño de esta. Esto es debido, generalmente, a alguna de las tres razones siguientes

- El fenómeno adquiere una dimensión infinita, imposible de medir en toda su extensión.

  Análisis de los datos plurimétricos de una determinada cuenca fluvial. Resulta claro que no es posible obtener información de las precipitaciones en todos y cada uno de los puntos de la cuenca, sino que es preciso estudiarlos a partir de observaciones obtenidas en un conjunto finito de estaciones de aforo convenientemente elegidas.

- La obtención de observaciones lleva a procesos costosos en tiempo y en recursos.

  El estudio del comportamiento de detrminados materiales de construcción en situaciones extremas de presión y temperatura, supone un alto coste en los ensayos necesarios para la obtención de las muestras en dichas condiciones.

- La obtención de observaciones implica la realización de un ensayo destructivo, que si se extiende a la "totalidad"de pobleción, podría implicar su desaparición.

Si tenemos entonces que trabajar con una muestra, naturalmente esta debe de ser representativa"de la población que se quiere estudiar. Esta representatividad"puede definirse de muchas maneras diferentes. Cada una de estas definiciones nos llevaría a un concepto diferente de muestra. La definición con la que vamos a trabajar pensamos que es la más sencilla y habitual, pero es necesario indicar que hay otros conceptos diferentes de "muestreos", que nosotros no vamos a estudiar.

Definición 1 *Una muestra aleatoria de tamaño n de una población X con función de probabilidad P (X discreta), o función de densidad f (X es continua), es un vector aleatorio $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ donde:*

1. *La función de distribución marginal de cada X_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, viene dada por P (0 f).*
2. *X_1, X_2, $\cdots$, X_n son independientes.*

Ejemplo 2 *Estudio de la altura en los alumnos de primer curso matriculados en las universidades públicas de España en el curso académico 2011-12.*

La población está formada por los estudiantes matriculados en primero en el curso académico 2011-12. El tamaño de la población vamos a suponer que es de 187.632, lo que quiere decir que se matricularon este número de estudiantes a principio de este curso académico. La característica que estamos estudiando es la altura. Esta la vemos como una variable aleatoria X, que vamos a suponer que su función de distribución sigue una $N(170, \sigma)$. De la distribución de probabilidad, sabemos que sigue una normal, pero desconocemos su desviación típica.

¿Qué significa una muestra de tamaño 5 de la población X?.

Es un vector aleatorio $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$. La función de distribución de cada variable aleatoria X_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, sigue una $N(170, \sigma)$.

Tomamos una muestra, **(no debe de confundir el estudiante muestra con muestra aleatoria)**, de la población formada por 5 estudiantes

$$\{\text{Pedro, Marta, Julia, Antonio, Alberto}\},$$

aplicamos el vector aleatorio a la muestra tomada

$$(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)\,(\{\text{Pedro, Marta, Julia, Antonio, Alberto}\}) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5).$$

$x_2 = X_2(\text{Marta})$, es el valor de la variable aleatoria X en Marta, es decir que la variable aleatoria X_2 representa el valor de la variable X en el segundo elemento de la muestra

$$\{\text{Pedro, Marta, Julia, Antonio, Alberto}\}.$$

Decir que la función de distribución de la variable aleatoria X_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, sigue una distribución $N(170, \sigma)$, significa, de manera informal, que todos los elementos de la población tienen la misma oportunidad de aparecer en la muestra. Dicho de otra manera, la probabilidad de que un valor correspondiente a una altura aparezca por ejemplo en la segunda observación, $x_2 = 168$, depende solo de la probabilidad que tiene este valor 168 de aparecer en la población. En cierto sentido, esto es lo que nos puede hacer ver a la muestra representativa".

Parece claro que, por ejemplo, X_2 y X_4 variables aleatorias independientes. El valor que la variable aleatoria X toma en el segundo elemento de la muestra no influye para el valor que toma en el cuarto elemento de la muestra.

Suponer que en una muestra aleatoria las .ºbservaciones", variables aleatorias, X_1, X_2, $\cdots$, X_n son independientes, es cómodo para el desarrollo teórico del modelo del muestreo aleatorio. Otra vez, desde un punto de vista informal, está independencia significa que cada vez que hacemos una observación de un elemento de la población, a esto elemento lo devolvemos a la población. En otras palabras, que el tamaño de la población es muy grande comparado con el tamaño de la muestra.

Si

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-170)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

es la función de densidad de la variable aleatoria X, por la independencia de las variableas aleatorias X_1, X_2, $\cdots$, X_5, la función de densidad del vector aleatorio $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ es

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot f(x_3) \cdot f(x_4) \cdot f(x_5) \qquad (1) \\ & = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1-170)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_2-170)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_3-170)^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

$$\cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_4-170)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_5-170)^2}{2\sigma^2}}, \quad (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5.$$

$\square$

Definición 3 *Consideremos una población y X la característica que queremos estudiar de la población. Sea $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ una muestra aleatoria.*

- *Si X es discreta, sea P su función de probabilidad. La función de probabilidad de la muestra $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, que volvemos a designarla por P, es*

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n) \tag{2}$$

$$= P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \cdots P(X_n = x_n),$$

  donde $x_1, x_2, \cdots, x_n$ son elementos del rango de X, (puede repetirse).

- *Si X es continua, sea f su función de densidad. La función de densidad de la muestra aleatoria $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, que volvemos a designarla por f, es*

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdots f(x_n), \tag{3}$$

  donde $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Las funciones (2) y (3) son conocidas como las funciones de verosimilitud asociadas a la muestra aleatoria $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$.

La función de verosimilitud de la muestra aleatoria $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ del ejemplo 2 es (1).

Ejemplo 4 *Supongamos que queremos ver si una moneda está bien construida. Para ello vamos a utilizar el criterio que al tirarla un número grande veces, salga esencialmente el mismo número de caras que de cruces.*

El experimento aleatorio es tirar la moneda y ver si sale C=cara o X=cruz. El espacio muestral es $\Omega = \{C; X\}$. Consideramos la variable aleatoria

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longmapsto \{0, 1\} \subset \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow X(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega = C \\ 0 & \omega = X \end{cases} \end{aligned}$$

X es una variable aleatoria discreta con rango$= \{0, 1\}$. Su función de probabilidad es

$$P(X = 1) = P(\{C\}) = \theta, \qquad P(X = 0) = P(\{X\}) = 1 - \theta. \tag{4}$$

El estudiante debe observar que θ no tiene por qué ser $\frac{1}{2}$, pues si supusiésemos esto, estaríamos dando por cierto que la moneda está bien construida.

Consideramos una muestra aleatoria de tamaño 4, (X_1, X_2, X_2, X_4). Cada una de las variables aleatorias $X_i,\ i = 1, 2, 3, 4$, es discreta y con función de probabilidad dada por (4),

$$P(X_i = 1) = P(\{C\}) = \theta, \qquad P(X_i = 0) = P(\{X\}) = 1 - \theta, . \tag{5}$$

En este caso, podemos interpretar la componente i-ésima del vector aleatorio (X_1, X_2, X_2, X_4), $X_i,\ i = 1, 2, 3, 4$, como la variable aleatoria que refleja el resultado de la i-ésima tirada de la moneda.

La función de verosimilitud asociada al vector aleatorio (X_1, X_2, X_2, X_4) es

$$\begin{aligned} P(x_1, x_2, x_3, x_4) &= P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \cdot P(X_3 = x_3) \cdot P(X_4 = x_4) \\ &= \theta^{x_1}(1-\theta)^{1-x_1} \cdot \theta^{x_2}(1-\theta)^{1-x_2} \cdot \theta^{x_3}(1-\theta)^{1-x_3} \cdot \theta^{x_4}(1-\theta)^{1-x_4} \\ &= \theta^{x_1+x_2+x_3+x_3}(1-\theta)^{4-(x_1+x_2+x_3+x_4)} = \theta^{\sum_{i=1}^4 x_i}(1-\theta)^{4-\sum_{i=1}^4 x_i}. \end{aligned}$$

donde x_1, x_2, x_3 y x_4 son elementos del rango del rango de X, esto es de $\{0, 1\}$, en otra palabras, solo pueden tomar los valores 0 o 1. Si por ejemplo $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 0, 0)$, entonces

$$\begin{aligned} P(0, 1, 0, 0) &= P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 1) \cdot P(X_3 = 0) \cdot P(X_4 = 0) \\ &= (1-\theta) \cdot \theta \cdot (1-\theta) \cdot (1-\theta) = \theta(1-\theta)^3. \end{aligned}$$

$\square$

En el ejemplo anterior, el objetivo era tomar una muestra aleatoria $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, como ya hemos indicado la variable aleatoria X_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, refleja el resultado de la iésima tirada, obtener la n observaciones, (tirar n veces la moneda y ver los n resultados obtenidos), y si en estas esencialmente el mismo número de caras que de cruces, inferir que la moneda est bien construida.

La variable aleatoria $X = \sum_{i=1}^n X_i$ refleja el número de caras que hemos obtenido en las n tiradas, aunque prescinde del orden en el que se han obtenido las caras y las cruces, y esta información es irrelevante en nuestro estudio. Esta variable aleatoria X tiene "toda la información del θ del ejemplo anterior". Parece entonces que podríamos simplificar los datos muestrales, y en vez de trabajar con n variables aleatorias X_1, X_2, $\cdots$, X_n, solo trabajar con una, $X = \sum_{i=1}^n X_i$, lo cual simplificaría nuestro trabajo.

$\sum_{i=1}^n X_i$ es una combinación lineal de las componentes del vector aleatorio, y es por tanto una nueva variable aleatoria. Esta, es lo que vamos a conocer como un estadístico.

Definición 5 *Sea X una población y $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$una muestra aleatoria. Un estadístico $T = T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ es una función real de la la muestra aleatoria.*

Si X una población y $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ una muestra aleatoria, los estadísticos más utilizados asociados a esta muestra aleatoria son

- **Media muestral**, designada por $\overline{X}$ y definida por

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{6}$$

- **Varianza muestral**, designada por S^2 y definida por

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2. \tag{7}$$

- **Cuasi-varianza muestral**, designada por $\widehat{S}^2$ y definida por

$$\widehat{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{n}{n-1}\overline{X}^2. \tag{8}$$

La relación entre la varianza y cuasivarianza muestral es

$$\widehat{S}^2 = \frac{n}{n-1}S^2. \tag{9}$$

Proposición 6 *Sea X una población con media μ y varianza σ^2. Sea $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ una muestra aleatoria. Se verifica*

1. $E[\overline{X}] = \mu$.
2. $V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$.
3. $E[S^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$.
4. $E[\widehat{S}^2] = \sigma^2$.
5. $V(\widehat{S}^2) = \frac{(n-1)^2}{n^3}E\left[(X-\mu)^4\right] - \frac{n^2-4n+3}{n^3}\sigma^2$.

Proof. Al ser$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ una muestra aleatoria de la población X, se verifica que

$$E[X_i] = \mu, \qquad V(X_i) = \sigma^2 \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

1.
$$E[\overline{X}] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \frac{n\mu}{n} = \mu.$$

2.
$$V(\overline{X}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{n^2},$$

como las variables aleatorias X_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, son independientes, tenemos

$$V(\overline{X}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} V(X_i)}{n^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sigma^2}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

■

Tres distribuciones asociadas a la normal usaremos con bastante frecuencia en la teoría del muestreo aleatorio.

- **Distribución χ^2 de Pearson con n grados de libertad**

  Si X_1, X_2, $\cdots$, X_n son variables aleatorias tales que

  1. son independientes,
  2. X_i sigue una $N(0;1)$, $\;i = 1, 2, \cdots, n$,

  la distribución χ^2 de Pearson con n grados de libertad, designada por χ^2_n, es la distribución de la variable aleatoria

  $$\chi^2_n = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2.$$

  La función de densidad de esta variable aleatoria es

  $$f(x,n) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

  Se verifica:

  1. $E[\chi^2_n] = n$.
  2. $V(\chi^2_n) = 2n$.

- **Distribución t de Student con n grados de libertad**

  Si Y, X_1, X_2, $\cdots$, X_n son variables aleatorias tales que

  1. son independientes,
  2. La variable Y y las X_i, $\;i = 1, 2, \cdots, n$, siguen una $N(0;1)$

  la distribribución t de Student con n grados de libertad, designada por t_n, es la distribución de la variable aleatoria

  $$\frac{Y}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}}.$$

  Su función de densidad es

  $$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\frac{n\sqrt{n\pi}}{2}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

  Se verifica

  1. $f(x)$ es una función par. $f(x) = f(-x)$, $\;x \in \mathbb{R}$.

2. $E[t_n] = 0$.
3. $V(t_n) = \frac{n}{n-2}$.

- **Distribución F de Fisher-Snedecor con m y n grados de libertad**

  Si X_1, X_2, $\cdots$, X_m, Y_1, Y_2, $\cdots$, Y_n (n+m) variables, tales que

  1. son independientes,
  2. Las variables Y_j, $\ j = 1, 2, \cdots, n$ y las X_i, $\ i = 1, 2, \cdots, m$, siguen una $N(0; 1)$

  la distribución F de Fisher-Snedecor con m y n grados de libertad, designada por $F_{m,n}$, es la distribución de la variable aleatoria

$$\frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i^2}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j^2}.$$

  Su función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right) n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{(nx+m)^{\frac{n+m}{2}}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

  Se verifica

  1. $E[F_{m,n}] = \frac{m}{m-2}$, $\ m > 2$.
  2. $V(F_{m,n}) = \frac{2m^2(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)}$, $\ m > 4$.
  3. $F_{m,n} = \frac{1}{F_{n,m}}$, lo que implica

$$P\left(F_{m,n} \geq \frac{1}{a}\right) = P(F_{n,m} \leq a), \quad a > 0.$$

Por su importancia, tratamos de forma particular, aunque sin demostración, los estadísticos más usuales para una población X normal $N(\mu; \sigma)$.

Proposición 7 *Sea X una población normal $N(\mu; \sigma)$ y $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ una muestra aleatoria de tamaño n.*

- *La media muestral $\overline{X}$ satisface*

$$E[\overline{X}] = \mu, \qquad V(\overline{X}) = \frac{\sigma}{n},$$

$$\textit{la distribución de } \overline{X} \textit{ sigue una } N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

- *La varianza muestral S^2 satisface*

$$E[S^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2, \qquad V(S^2) = \frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4,$$

$$\text{la distribución de } \frac{nS^2}{\sigma^2} \text{ sigue una } \chi^2_{n-1}.$$

- *Las variables aleatorias $\overline{X}$ y S^2 son independientes.*

2. Ejercicios

Ejercicio 8 *Calcule*

1. $P(\chi^2_{10} \leq 3{,}25)$. *Solución: 0.025*
2. $P(\chi^2_{17} \geq 8{,}672)$. *Solución: 0.95*
3. $P(16{,}92 \leq \chi^2_9 \leq 23{,}6)$. *Solución: 0.045*
4. $P(\chi^2_{60} \leq 72)$. *Solución: 0.84*

Ejercicio 9 *Si $X \sim \chi^2_{18}$, obtener un intervalo $[a, b]$ de manera que contenga un $95\,\%$ de probabilidad y que deje a la derecha e izquierda la probabilidad restante igualmente repartida.*

Solución $[8, 231; 31; 53]$.

Ejercicio 10 *Calcule*

1. $P(t_8 < -0{,}899)$. *Solución 0,2*
2. $P(2, 093 < t_{19} < 2, 861)$. *Solución 0,02*

Ejercicio 11 *Calcule t_0 tal que*

1. $P(t_7 < t_0) = 0{,}99$. *Solución* $t_0 = 2, 998$
2. $P(|t_{18}| > t_0) = 0{,}05$. *Solución* $t_0 = 2, 101$

Ejercicio 12 *En una población normal $N(2; 0{,}6)$ se toma una muestra aleatoria de tamaño 9. Determinar la probabilidad de que la media muestral sea inferior a 2,08 y la probabilidad de que la varianza muestral sea inferior a 0,2.*

Ejercicio 13 *Dada una variable aleatoria X que sigue una distribución de χ^2 de Pearson con n grados de libertad, cuando n es grande, $n \geq 30$, se puede aproximar la distribución $\sqrt{2x}$ a una normal con media $\sqrt{2n-1}$ y desviación típica 1, es decir*

$$\sqrt{2X} \sim N(\sqrt{2n-1}, 1).$$

Utilizando esta idea, calcule $P(\chi^2_{61} \leq 72)$.

Solución 0,8413

Ejercicio 14 *Si* X *sigue una* t *de Student con* n *grados de libertad, y* n *es grande,* $n \geq 30$, X *puede aproximarse por una* $N(0,1)$.

Utilizando este procedimiento, calcule $P(t_{200} > 0,9)$.

Solución 0.841

Ejercicio 15 *En una población* X *normal* $N(3;2)$ *se toma una muestra aleatoria de tamaño* 15. *Calcule*

1. *probabilidad de que* X *se desvíe de la media en más de una décima,*
2. *la suma de los valores muestrales, observados, esté entre* 40 *y* 50,
3. *la media muestral se desvíe de su valor medio en mas de una décima,*
4. *la varianza muestral sea menor que* 4,56.

Ejercicio 16 *Consideramos una población* X *normal* $N(0;1)$. *Se toma una muestra aleatoria de tamaño* 10. *Calcule la probabilidad del suceso* $\{\overline{X} < 0{,}2\} \cap \{S^2 < 1{,}9\}$.

Ejercicio 17 *Si se parte de una población con distribución* $N(2,4)$ *y se extraen muestras aleatorias de tamaño 64, cuál es la probabilidad de que la media muestral tome un valor superior a 1 e inferior a 3?*

Solución 0,9546.

Ejercicio 18 *Se pretende realizar inferencias acerca de la media de una población normal de varianza igual a 9, de manera que se verifique que la probabilidad de la diferencia entre la media muestral y la poblacional sea menor o igual que 1,287 sea del* 99 %. *Cuál deberá ser el tamaño muestral seleccionado para lograr el objetivo?*

Solución $n \geq 36$

Ejercicio 19 *De una población con distribución* $N(\mu, 12)$ *se extraen muestras aleatorias de tamaño 101, cual es la probabilidad de que la varianza muestral sea superior a 105,82 e inferior a 199,99?.*

Solución $0,97$

Ejercicio 20 *El tiempo de vida medio de unos dispositivos que se encuentran en el mercado es de* 63 *horas y su varianza de* 38,44. *Se toma una muestra compuesta por 40 de ellos. Calcule*

1. *Probabilidad de que la duración media de la muestra pertenezca al intervalo* $(61,65)$.
2. *Probabilidad de que la duración media de la muestra pertenezca al intervaalo* $(60{,}4, 65{,}5)$