Hoja 8: Anillos (Polinomios)

1. Descompón los siguientes polinomios como producto de polinomios irreducibles en los anillos $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{Z}_2[x]$ y $\mathbb{Z}_3[x]$:
$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6,\ 5x^3 - 35x^2 + 5x - 35,\ (x^2 - 3)(x^2 + 2x + 2)$$

2. Sea K un cuerpo y $f \in K[x]$ un polinomio de grado 1. Demuestra que f tiene una única raíz en K.

3. Calcula en $\mathbb{R}[x]$ el máximo común divisor de x^2+2x+1 y x^2-1 usando el algoritmo de Euclides. Calcula una identidad de Bezout para estos polinomios.

4. Calcula en $\mathbb{R}[x]$ el máximo común divisor de $x^2 - 4$ y $x^2 - 5x + 6$ sin utilizar el algoritmo de Euclides.

   Pista: Usa la descomposición en factores irreducibles de los polinomios.

5. Determina todos los polinomios irreducibles de grados $1, 2, 3$ y 4 en $\mathbb{Z}_2[x]$.

6. Estudia la reducibilidad de todos los polinomios de $\mathbb{Z}_3[x]$ de grado menor o igual que 3.

7. Sean K un cuerpo infinito y $f(x), g(x) \in K[x]$. Demuestra que si las funciones $f, g : K \longrightarrow K$ inducidas por esos polinomios son iguales, entonces $f(x) = g(x)$.

   Pista: Usa el resultado de teoría que dice que un polinomio no constante de grado n tiene a lo sumo n raíces.

8. Demuestra que el resultado anterior no es cierto si K es finito.

   Pista: Encuentra dos polinomios distintos que induzcan la misma función. Por ejemplo, prueba que los polinomios $x^4 + x + 1$ y $x^3 + x^2 + 1$ en $\mathbb{Z}_3[x]$ inducen la misma función sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_3$. También es interesante que trates de encontrar dos polinomios más sencillos de grados 1 y 2 respectivamente que induzcan la misma función sobre $\mathbb{Z}_2$.