Universidad Rey Juan Carlos



# Hoja 7: Anillos (Teoremas de isomorfía)

1. *a*) Demuestra que el conjunto
$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \ / \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$
es un subanillo de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   *b*) Demuestra que el conjunto
$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ / \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$
es un ideal de $T$.

   *c*) Demuestra que $I$ no es un ideal de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   *d*) Demuestra que en el cociente $T/I$ cada clase tiene un representante de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$.

   *e*) Demuestra que $T/I$ es isomorfo a $\mathbb{R}$.

2. **Segundo teorema de isomorfía.** Sean $I, J$ ideales de un anillo $A$. Entonces:

   *a*) $I \cap J$ es ideal de $I$.

   *b*) $J$ es ideal de $I + J$.

   *c*) Los anillos $I/(I \cap J)$ y $(I + J)/J$ son isomorfos.

   Pista: Demuestra que la aplicación $f : I \longrightarrow (I + J)/J$ definida como $f(i) := i + J$ es un homomorfismo suprayectivo y aplica el primer teorema de isomorfía.

3. **Tercer teorema de isomorfía.** Sean $I, K$ ideales de un anillo $A$ tales que $I \subseteq K$. Entonces $(A/I)/(K/I)$ y $A/K$ son anillos isomorfos.

   Pista: Demuestra que la aplicación $f : A/I \longrightarrow A/K$ definida como $f(a + I) := a + K$ está bien definida y es un homomorfismo suprayectivo; aplica el primer teorema de isomorfía.