Universidad Rey Juan Carlos

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS
GRADOS CON MATEMÁTICAS
CURSO 2015-16

HOJA 5: ANILLOS (IDEALES)

El objetivo de esta hoja es demostrar, siguiendo una serie de indicaciones, la siguiente proposición, que permite determinar todos los ideales de un cociente a partir de los ideales del anillo sin cocientar:

Proposición. Sea A un anillo e I un ideal de A. Se cumple:

- Si I, K son ideales de un anillo A tales que $I \subseteq K$, entonces el conjunto
$$K/I := \{k + I \ / \ k \in K\}$$
es un ideal en el cociente A/I.
- Todo ideal N del cociente es de esta forma, es decir, $N = K/I$ para algún ideal K de A tal que $I \subseteq K$.

Ejercicios que sirven para demostrar la proposición anterior:

1. Demuestra que si I, K son ideales de un anillo A tales que $I \subseteq K$, entonces I es un ideal de K. Por tanto podemos considerar el cociente K/I.
2. Demuestra que si I, K son ideales de un anillo A tales que $I \subseteq K$, entonces el conjunto
$$K/I := \{k + I \ / \ k \in K\}$$
es un ideal en el cociente A/I (esto es la primera parte de la proposición que estamos demostrando).
3. Sean $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos y J un ideal de B.

   Sea $I := f^{-1}(J) = \{a \in A \ / \ f(a) \in J\}$. Demuestra que I es un ideal de A que contiene a $Ker(f)$.
4. Sea I un ideal de un anillo A. Demuestra que todo ideal del cociente A/I es de la forma K/I para algún ideal K de A tal que $I \subseteq K$ (esto es la segunda parte de la proposición que estamos demostrando).

   Pista: Utiliza los ejercicios 2 y 3. Como homomorismo para aplicar el ejercicio 3 usa la proyección sobre el cociente $\pi : A \longrightarrow A/I$ definida como $\pi(a) := a + I$.