HOJA 4: ANILLOS (IDEALES)

1. Demuestra que la intersección arbitraria (finita o infinita) de ideales de un anillo vuelve a ser ideal de ese anillo.

   Pista: Puedes practicar demostrando primero que la intersección de dos ideales es ideal.

2. Sean I, J ideales de un anillo A. ¿Es $I \cup J$ ideal de A?

3. Sean I, J ideales de un anillo A. Definimos el conjunto

   $$I + J := \{x + y \;/\; x \in I,\ y \in J\}$$

   que recibe el nombre de **suma** de I y J. Demuestra que $I+J$ es un ideal. Demuestra que contiene tanto a I como a J. Demuestra que es el ideal más pequeño con esta propiedad (esto quiere decir que si R es otro ideal que contiene tanto a I como a J, entonces R contiene a $I + J$).

4. Sean A un anillo conmutativo con unidad e I un ideal de A. Demuestra:

   a) Si $1_A \in I$ entonces $I = A$.

   b) Si $u \in I$ con u invertible, entonces $I = A$.

5. Consideramos el anillo $A = \mathbb{Z}$. Describe el ideal suma en cada caso:

   a) $2\mathbb{Z} + 4\mathbb{Z}$

   b) $4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z}$

   c) $3\mathbb{Z} + 5\mathbb{Z}$

6. Sea K un cuerpo. Demuestra que K sólo contiene dos ideales: el propio K y (0).

   Pista: Usa el ejercicio 4.

7. Sea A un anillo conmutativo con unidad tal que sus únicos ideales son A y (0). Demuestra que A es un cuerpo.

   Pista: Para probar que un elemento $a \neq 0$ tiene inverso, considera el ideal generado por a.

8. Sea $a \in \mathbb{R}$. Demuestra que el conjunto

$$I_a := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \ / \ p(a) = 0\}$$

es un ideal de $\mathbb{R}[x]$. Demuestra que I_a es el ideal principal generado por el polinomio $q(x) = x - a$.

Observación: Date cuenta de que la segunda afirmación implica la primera, con lo cual no es necesario demostrar la primera para completar el ejercicio, basta con la segunda. Pero puedes demostrar la primera de forma independiente para practicar.

Pista: Para probar la segunda afirmación, utiliza que todo polinomio que tenga a como raíz, tiene que tener $x - a$ como factor. Utliza esto para demostrar el doble contenido entre I_a y el ideal principal generado por $x - a$.

9. (**Difícil**) Demuestra que todo ideal de $\mathbb{Z}$ es principal (es decir, todo ideal de $\mathbb{Z}$ es de la forma $m\mathbb{Z}$).

Pista: Dado un ideal I distinto de (0), considera el mínimo a positivo que pertenece a I y demuestra que $I = (a)$. Te será útil el teorema de la división en $\mathbb{Z}$.

10. Determina todos los ideales de $\mathbb{Z}_n$.

Pista: Utiliza la proposición enunciada en la hoja 5 junto con el ejercicio 9.