Universidad Rey Juan Carlos

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS
GRADOS CON MATEMÁTICAS
CURSO 2015-16

HOJA 3: ANILLOS

---

1. Sean A y B dos anillos conmutativos y $f : A \longrightarrow B$ un isomorfismo de anillos. Demuestra que si $a \in A$ es divisor de cero en A entonces $f(a)$ es divisor de cero en B. Concluye que si A es dominio de integridad, entonces B también lo es.

2. Considera los siguientes pares de anillos y da un argumento que demuestre que no son isomorfos:

   a) $\mathbb{Z}_{16}$ y $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8$

   b) $\mathbb{Z}_{16}$ y $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$

   c) $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$

   d) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Demuestra que si $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ es un isomorfismo, entonces f es la aplicación identidad.

   Pista: Halla $f(2)$ como $f(1+1)$, $f(3)$ como $f(1+1+1)$ y así sucesivamente. Determina después f de los números negativos.

4. Demuestra que la aplicación $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida como $f(z) = \overline{z}$ es un isomorfismo de anillos. Nota: si $z = a + bi$ se define el conjugado de z como $\overline{z} = a - bi$.

5. Demuestra que la aplicación $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n$, definida como $f(a) = [a]_n$, es un homomorfismo de anillos suprayectivo. Demuestra que no es inyectivo.

6. Construye las tablas de multiplicar de $\mathbb{Z}_6$ y de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. Úsalas para encontrar un isomorfismo entre los dos anillos.

7. Demuestra que la aplicación $f : \mathbb{Z}_{10} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$, definida como $f([a]_{10}) = ([a]_2, [a]_5)$, es un isomorfismo de anillos.

   Observación: Además de las propiedades de isomorfismo, tienes que probar que la aplicación f está bien definida, es decir, que su definición no depende de la elección de representantes.

8. Generaliza el resultado del ejercicio anterior, es decir, demuestra lo siguiente:

   Si m y n son primos entre sí, entonces la aplicación $f : \mathbb{Z}_{mn} \longrightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, definida como $f([a]_{mn}) = ([a]_m, [a]_n)$, es un isomorfismo de anillos.

   Observación: Además de las propiedades de isomorfismo, tienes que probar que la aplicación f está bien definida, es decir, que su definición no depende de la elección de representantes.

9. (**Difícil**) El resultado anterior no es cierto si m y n no son primos entre sí: demuestra que, en ese caso, $\mathbb{Z}_{mn}$ y $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ no son isomorfos.

   Pista: Considera $k = m.c.m.(m, n)$ y demuestra que, si f es isomorfismo entre los anillos indicados, entonces $f([k]_{mn}) = 0$, lo cual es una contradicción.

10. El hecho de que un conjunto sea un anillo con unidad depende de cómo estén definidas las operaciones. Demuestra que $2\mathbb{Z}$ con la suma habitual y un nuevo producto definido como $a * b = (ab)/2$ es un anillo conmutativo con unidad. Demuestra que es isomorfo a $\mathbb{Z}$ con la suma y producto habituales.