Universidad Rey Juan Carlos

Estructuras Algebraicas
Grados con Matemáticas
Curso 2015-16

# Hoja 2: Anillos

---

1. Considera el anillo booleano $A = (\mathcal{P}(X), \uplus, \cap)$ (como en el ejercicio 1 de la hoja 1). Fijamos el conjunto $X$ de manera que tenga 2 elementos, por ejemplo $X = \{a, b\}$. Construye las tablas de sumar y multiplicar de $A$.

2. Construye las tablas de sumar y multiplicar de $\mathbb{Z}_4$.

3. **Producto cartesiano de anillos.** Sean $(A, +_1, \cdot_1)$ y $(B, +_2, \cdot_2)$ dos anillos. En el producto cartesiano $A \times B$ definimos dos operaciones de la forma natural:

$$(a, b) + (a', b') := (a +_1 a', b +_2 b')$$

$$(a, b) \cdot (a', b') := (a \cdot_1 a', b \cdot_2 b')$$

   Habitualmente, si no hay lugar a confusión, no usaremos los subíndices para las operaciones.

   Es trivial demostrar que $A \times B$ dotado de estas operaciones es un anillo. Además si $A$ y $B$ son conmutativos, también lo es $A \times B$. Si $A$ y $B$ tienen unidad, también la tiene $A \times B$. Daremos por hecho todo esto (no lo demostraremos por ser muy fácil pero muy pesado).

   *a*) ¿Es cierto que si $A$ y $B$ son dominios de intregridad, también lo es $A \times B$?

   *b*) ¿Es cierto que si $A$ y $B$ son cuerpos, también lo es $A \times B$?

4. Construye las tablas de sumar y multiplicar de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

5. Los anillos de los ejercicios 1, 2 y 4 de esta hoja y el anillo del ejercicio 7 de la hoja 4 de Álgebra I tienen todos 4 elementos. Compara entre sí sus tablas de sumar y multiplicar y piensa, pareja por pareja si son “el mismo anillo”, es decir, si se podrían renombrar los elementos de manera que sus tablas de sumar y multiplicar fueran la misma.

6. Considera, dentro de $\mathbb{Z}_{10}$, el subconjunto $P = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ (para aligerar la notación no escribimos los corchetes para las clases). Demuestra que $P$ es subanillo de $\mathbb{Z}_{10}$. ¿Es conmutativo? ¿Tiene unidad? ¿Es un cuerpo?

7. Consideramos el conjunto

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} \ / \ a, b \in \mathbb{Q}\}$$

Demuestra que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ es subanillo de $\mathbb{R}$. ¿Es cuerpo?