Universidad Rey Juan Carlos

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS
GRADOS CON MATEMÁTICAS
CURSO 2015-16

HOJA 15: GRUPOS (ACCIONES DE GRUPOS)

1. Considera la acción natural del grupo $G = A_6 \cap D_6$ sobre el conjunto $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (por ser los elementos de G permutaciones, actúan de la manera obvia sobre los elementos de B). Calcula las órbitas y los estabilizadores de todos los elementos de B.

   Pista: El ejercicio se puede hacer considerando los elementos de G como permutaciones, pero considerarlos como movimientos geométricos que transforman los vértices de un hexágono regular puede ayudar y hacer el ejercicio más corto.

2. Se dice que una acción es **transitiva** si para cualquier par de elementos $b_1, b_2 \in B$ existe $g \in G$ tal que $g \cdot b_1 = b_2$. Demuestra que una acción es transitiva si y solo si existe $b \in B$ tal que $o(b) = B$, es decir, sólo hay una órbita.

3. Consideramos un grupo G y como conjunto el propio grupo G, es decir, $B = G$. El grupo G actúa sobre sí mismo usando la operación de G, esto es, dados $g, b \in G$, tenemos la acción $g \cdot b := gb$.

   a) Demuestra que lo que acabamos de definir es una acción.
   b) Calcula las órbitas y los estabilizadores de todos los elementos de G bajo esta acción.
   c) Demuestra que la acción que hemos definido es transitiva.
   d) Dados $b_1, b_2 \in G$ encuentra explíctamente un elemento $g \in G$ tal que $g \cdot b_1 = b_2$.

4. Sean B un grupo y G un subgrupo de B. Vamos a definir una acción de G sobre B, que recibe el nombre de **acción por conjugación**. Dados $g \in G$ y $b \in B$ se define $g \cdot b := gbg^{-1}$.

   a) Demuestra que lo que acabamos de definir es una acción.
   b) Supongamos que B es abeliano. Calcula las órbitas y los estabilizadores de todos los elementos de B.
   c) Supongamos $B = S_3$ y $G =< (1\ 2) >$. Calcula las órbitas y los estabilizadores de todos los elementos de B.
   d) Supongamos $B = S_3$ y $G =< (1\ 2\ 3) >$. Calcula las órbitas y los estabilizadores de todos los elementos de B.