# Hoja 14: Grupos (raíces de la unidad)

1. Demuestra que el conjunto de números complejos

$$\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}$$

   es un subgrupo de $\mathbb{C}^*$ (geométricamente es la circunferencia de centro 0 y radio 1). Encuentra un isomorfismo entre $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

2. Dado $n \in \mathbb{N}$ consideramos

$$R_n = \{z \in \mathbb{C} \ / \ z^n = 1\}$$

   cuyos elementos reciben el nombre de **raíces $n$-ésimas** de la unidad. Demuestra que $R_n$ es un subgrupo cíclico de $\mathbb{S}_1$ y que tiene orden $n$. Construye un isomorfismo entre $R_n$ y $\mathbb{Z}_n$.

3. Halla explícitamente todos los elementos de $R_8$, tanto en forma polar como cartesiana. Determina cuáles de ellas son generadores de $R_8$ (estos elementos reciben el nombre de **raíces primitivas**).

4. Consideramos el conjunto $R$ formado por todas las **raíces de la unidad**, es decir, $R = \cup_{n=1}^{\infty} R_n$. Demuestra que $R$ es un subgrupo de $\mathbb{S}_1$ isomorfo a $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Verifica que $R$ es un grupo infinito pero que todos sus elementos tienen orden finito.

5. Encuentra un elemento de orden infinito en $\mathbb{S}_1$.