

## HOJA 13: GRUPOS (SUBGRUPOS NORMALES)

---

1. Demuestra que todo subgrupo de índice dos es normal.
2. Calcula todos los subgrupos de  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  y de  $D_4$ . Determina cuáles son normales. Describe los cocientes que producen los subgrupos normales (determina a qué grupo son isomorfos).
3. Encuentra un subgrupo no normal de  $S_n$ .
4. Encuentra el subgrupo normal (no trivial) de  $D_n$  de orden más grande.
5. Sea  $f : G \rightarrow H$  un homomorfismo de grupos. ¿Es  $im(f)$  normal en  $H$ ?
6. Sea  $f : G \rightarrow H$  un homomorfismo de grupos. Prueba que si el orden de  $im(f)$  es mayor que la mitad del orden de  $H$ , entonces  $f$  es sobreyectiva.
7. Un grupo  $G$  es **simple** si sus únicos subgrupos normales son los triviales. Demuestra que si  $f : G \rightarrow H$  es un homomorfismo suprayectivo y  $G$  es simple, entonces o bien  $f$  es isomorfismo o bien  $H = \{e\}$ .