Universidad Rey Juan Carlos

Hoja 10: Grupos

1. Sea G un grupo y $a, b \in G$. Demuestra que se cumple $(a^{-1})^{-1} = a$ y que $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

2. Considera el grupo aditivo $(\mathbb{Z}_2, +)$ y el conjunto de números complejos $G = \{1, -1, i, -i\}$, que con la multiplicación habitual constituye un grupo. Escribe la tabla de la operación del grupo producto $\mathbb{Z}_2 \times G$.

3. Determina si los siguientes conjuntos dotados de la operación $*$ son grupos:

   a) $G = \mathbb{Q}$; $\quad a * b := a + b + 3$

   b) $G = \{r \in \mathbb{Q} \ / \ r \neq 0\}$; $\quad a * b := (ab)/3$

   c) $G = \{r \in \mathbb{Q} \ / \ r \neq -1\}$; $\quad a * b := a + b + ab$

   d) $G = \{r \in \mathbb{R} \ / \ r \neq 0\}$; $\quad a * b := |a|b$

4. De un grupo de 4 elementos $G = \{e, a, b, c\}$ se sabe que e denota el elemento neutro y que $a * a = b * b = e$. Escribe la tabla de G.

5. Consideramos, para cada $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, la función $T_{a,b} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $T_{a,b}(x) = ax + b$. Demuestra que el conjunto $G = \{T_{a,b} \ / \ a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$, junto con la operación composición de funciones, forma un grupo no abeliano.