INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA EMPRESA
EJERCICIOS — CONTINUIDAD Y DERIVADAS (II)

1. Continuidad.

Ejercicio 1. En el Ejercicio 7 de la hoja titulada «Conceptos básicos» dedujiste una expresión para la función $I(s)$ que calcula el IRPF que se retiene a un contribuyente cuyos ingresos son s euros anuales. ¿Debería ser $I(s)$ una función continua, intuitivamente? A la vista de la expresión que obtuviste para ella, ¿realmente lo es?

Ejercicio 2. Estudia la continuidad de las siguientes funciones definidas a trozos. Haz un dibujo esquemático de las funciones en las proximidades de sus puntos de discontinuidad.

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ -x^2 + 2x - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$3) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$4) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x} & \text{si } x < -1 \\ 2x + 5 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 2 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$5) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{x^2 - 2} & \text{si } x < -1 \\ x^2 - 2 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ 3x + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$6) \quad f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Ejercicio 3. Calcula el valor que deben tomar los parámetros (denotados por las letras a y b) para que las siguientes funciones sean continuas en todo $\mathbb{R}$.

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3a + \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x & \text{si } x \leq 1 \\ 4x^2 + ax + b & \text{si } 1 < x < 2 \\ 3x + b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

2. Cálculo de derivadas usando la definición.

Recuerda que la *definición formal* de derivada de una función f en un punto x_0 venía dada por el siguiente límite:

$$(*) \quad f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Ejercicio 4. Utilizando la definición de derivada en un punto calcula $f'(x_0)$ para las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ll} 1) \quad f(x) = -2x^2 + x + 2 \text{ en } x_0 = -1 & 3) \quad f(x) = \frac{1}{x+1} \text{ en } x_0 = 1 \\ 2) \quad f(x) = x^3 - 3x + 1 \text{ en } x_0 = 0 & 4) \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \text{ en } x_0 = 1 \end{array}$$

Haz luego el cálculo con las reglas usuales de derivación y compara los resultados.

Ejercicio 5. Estudia si la siguiente función tiene derivada en los puntos $x_0 = 1$ y $x_0 = -1$ (tendrás que volver a usar la definición):

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ -x^3 + 2 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3. Algunos ejercicios más técnicos.

Ejercicio 6. La función $f(x)$ que estudiaste en el Ejercicio 3 de la hoja sobre límites, ¿es derivable en algún punto?

Ejercicio 7. Utilizando la definición formal de derivada (es decir, la definición a través del límite (*) escrito más arriba), demuestra que la derivada de la suma $f + g$ en un punto x_0 es la suma de las derivadas de f y g en x_0 ; es decir, $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$. Compara con la demostración que hicimos en clase utilizando la fórmula de los incrementos.

Ejercicio 8. El teorema de Bolzano dice que si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$ tal que $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo, entonces f se anula en algún punto c del intervalo; es decir, $f(c) = 0$ para algún $c \in [a, b]$.

Considera la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[a, b] = [-1, 1]$. La función f es continua y obviamente $f(-1)$ y $f(1)$ tienen el mismo signo. ¿Podemos deducir del teorema de Bolzano que f no se anula en ningún punto del intervalo $[-1, 1]$?

Ejercicio 9. Recuerda el teorema de Weierstrass: toda función continua f en un intervalo $[a, b]$ alcanza su máximo y mínimo globales en ese intervalo. Vimos en clase que el teorema puede no ser válido cuando f no es continua, y en la misma línea preguntamos lo siguiente:

- ¿Es válido el teorema para intervalos que no sean cerrados? (Por ejemplo, piensa en un intervalo de la forma $(a, b]$ en lugar de $[a, b]$.)
- ¿Es válido el teorema para intervalos que no sean acotados? (Por ejemplo, piensa en un intervalo de la forma $[a, +\infty)$.)