INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA EMPRESA
EJERCICIOS — LÍMITES

1. Sobre la definición de límite.

Los ejercicios de este apartado tienen por finalidad revisar la definición (casi) formal de límite que vimos en clase, así como su conexión con la idea intuitiva de límite. En ellos $f(x)$ es una función cuyo dominio es $\mathbb{R}$ (por simplicidad) y x_0 es un punto fijado.

Ejercicio 1. La idea intuitiva de lo que significa $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ es que cuando x se aproxima a x_0, la función $f(x)$ se aproxima a L. Explica, en estos mismos términos intuitivos, lo que significa que el límite de $f(x)$ en x_0 *no* sea L.

Ejercicio 2. Supongamos que queremos calcular el límite de $f(x)$ en el punto $x_0 = 0$ y observamos que podemos encontrar valores de x arbitrariamente próximos a $x_0 = 0$ para los que sucede que $f(x) = 1$. ¿Podemos concluir que el límite de f en x_0 es 1?

Ejercicio 3. Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Así, por ejemplo, $f(2) = 0$ y también $f(-2/3) = 0$ porque tanto 2 como $-2/3$ son racionales, pero $f(\sqrt{2}) = 1$ o también $f(\pi) = 1$ ya que $\sqrt{2}$ y π son irracionales.

La pregunta que hay que responder es esta: ¿cuál es el límite de esta función en $x_0 = 0$, si es que existe? (No se puede hacer un dibujo útil de esta función, así que tendrás que usar tu imaginación.)

Recuerda que para entender gráficamente la definición formal de límite usábamos un código de colores: las bandas horizontales eran rojas y los intervalos en torno al punto x_0 eran azules. Seguiremos refiriéndonos a ellos como "bandas rojas" e "intervalos azules".

Ejercicio 4.

- Supón que para una banda roja de anchura $\epsilon = 1$ encuentras un intervalo azul que satisface los requerimientos de la definición de límite. Ahora tomas una banda de anchura $\epsilon = 2$. ¿Podría ser que para ella no pudieses encontrar un intervalo azul adecuado?
- ¿Siempre sucede que al estrechar la banda roja necesitas estrechar también el intervalo azul? ¿Podrías poner un ejemplo en el que eso no ocurra?

Ejercicio 5. Consider la función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Convéncete, utilizando la definición formal de límite, de que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Para una banda roja de anchura $\epsilon = 1$, ¿qué longitud máxima puede tener el intervalo azul correspondiente para satisfacer la condición requerida por la definición de límite? ¿Y para una banda roja de anchura $\epsilon > 0$ arbitraria? Repite ahora para el punto $x_0 = 1$ (ten en cuenta que ahora el límite de la función en el punto será otro, no ya 0).

Ejercicio 6. Repite lo mismo que has hecho en el ejercicio anterior, también para los puntos $x_0 = 0$ y $x_0 = 1$, con la función $f(x) = x^2$.

2. Cálculo de límites.

<u>*Recordatorio de la teoría.*</u> Recuerda que en clase hemos visto algunas técnicas generales para eliminar indeterminaciones:

- $0/0$ en una función f racional: factorizar numerador y denominador y cancelar factores comunes;
- $0/0$ en una función que involucre raíces: utilizar la técnica del conjugado;
- ∞/∞: comparar los tamaños de los infinitos más grandes en el numerador y el denominador;
- 1^∞: utilizar la fórmula

$$\lim_{x\to x_0} f^g = e^L, \quad \text{donde } L = \lim_{x\to x_0} g\cdot(f-1).$$

También dedicamos algunos minutos a discutir qué queremos decir cuando escribimos expresiones como $0/0$, $0\cdot\infty$, 1^∞, ∞/∞ y otras semejantes, que no tienen sentido matemático. En este sentido va el próximo ejercicio:

Ejercicio 7. De las siguientes, señala cuáles son indeterminaciones y cuáles no, y razona en cada caso por qué:

$$1^\infty \quad , \quad 2^\infty \quad , \quad (1/2)^\infty \quad , \quad 0^\infty.$$

Ejercicio 8. Calcula los siguientes límites (en algunos casos puede ser necesario calcular límites laterales). *No* utilices la regla de l'Hôpital en ninguno.

Nota. Si recuerdas bien cómo se calculan límites probablemente no hace falta que hagas el ejercicio entero, pero sí deberías hacer los apartados 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 15, 19, 20, 21, 23 y 31, 32, 33 y 34.

1) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\sqrt{x^2-9}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{(x-2)^2}$

3) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{1}{x^2-9}$

4) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-2x+1}$

5) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\frac{2x^2-3x+1}{-x^2+2x+1}$

6) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^3-3x^2+3x-1}$

7) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\frac{2x+5}{x^2-7x+3}$

8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

9) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{x^2-1}}$

10) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$

11) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{x^2-2x}$

12) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$

13) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$

14) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

15) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$

16) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2+1}{x-2}\right)$

17) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+x}\right)$

18) $\lim_{x\to-\infty}\frac{6x+1}{\sqrt[3]{8x^3-2x^2+1}}$

19) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^4+x^2+1}}{x^2+1}$

20) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{x-1}$

21) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-3}{x+1}\right)^{x}$

22) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x-1}{\sqrt{x^6-2x}}$

23) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-1}{3x+2}\right)^{x^2}$

24) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-2}{3+2x}\right)^{x+1}$

25) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-1}-2x\right)$

26) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

27) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+2}-4}$

28) $\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{\sqrt{3+x}-1}$

29) $\lim_{x\to2}\left(\frac{x-2}{x^2-4}-\frac{x^2-4}{x-2}\right)$

30) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

31) $\lim_{x\to2^+}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2-x}}$

32) $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{x}$

33) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+4}\right)^{\frac{x^2}{x+1}}$

34) $\lim_{x\to0}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$

Ejercicio 9. Calcula los siguientes límites utilizando la regla de l'Hôpital. Los apartados 1) y 2) también se pueden calcular de forma elemental; hazlos de ambas maneras y compara los resultados.

1) $\lim_{x\to-1}\frac{x^3+2x^2+3x+2}{2x^3+x^2-3x-2}$

2) $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x^2-5}-2}{x-3}$

3) $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

4) $\lim_{x\to\pm\infty}(x^2-3x+1)e^{2x+1}$

5) $\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{1-e^x}$

6) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2x+\ln x}$

7) $\lim_{x\to0^+}(x^3-x)\cdot\ln x$

8) $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}\cdot\ln x$

Ejercicio 10. Haz un dibujo esquemático de cada una de las siguientes funciones en las proximidades de aquellos puntos x_0 que *no* pertenecen a su dominio. Para ello necesitarás calcular los límites laterales de f a la izquierda y a la derecha de x_0.

1) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-2x+1}$

2) $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x^2+2x+4}$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

4) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^3-x^2+x-1}$

5) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2x+1}$

6) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^3+x^2-2x}$