CÁLCULO 1 Curso 2014-2015.

1^0 del grado de Matemáticas y doble grado MAT-IngINF

Hoja 8: la integral de Riemann

1.- Probar que la función $y = [x]$ es integrable en $[0, 5]$ y calcular $\int_0^5 [x]\, dx$.

2.- Sea f una función continua en $[a, b]$, no negativa, y que cumple $\int_a^b f(x)\, dx = 0$. Probar que f es cero en todos los puntos.

3.- Dar un ejemplo de una función definida en un intervalo $[a, b]$, no integrable, y tal que f^2 sea integrable.

4.- Sea una función continua en $[a, b]$. Definimos la *media* o *valor esperado* de f sobre $[a, b]$ como

$$E(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

(a) Sean M y m respectivamente el máximo y el mínimo de f sobre [a,b]. Demostrar que $m \leq E(f) \leq M$. Si f es constante, ¿cuál es su valor esperado?

(b) Usando el teorema de los valores intermedios y el apartado anterior probar el siguiente resultado: Sea f una función continua en $[a, b]$. Entonces, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx = f(c).$$

(c) Supongamos que f es impar (es decir, $f(x) = -f(-x)$). Hallar $E(f)$ sobre $[-a, a]$. Sugerencia: interpretar la integral en términos de áreas.

(d) Evaluar $\int_{-a}^{a} x^7 \operatorname{sen}(x^4)\, dx$.

5.- Sea

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [0, 1], \\ x+1 & \text{si} \quad x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Definimos F con $F(0) = 0$ y $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, si $x \in (0, 2]$. Determinar F de forma explícita y probar que es continua en el intervalo $[0, 2]$, aunque f no lo sea.

6.- Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$$F(x) = \int_0^{x^2} (\operatorname{sen} t^2)\, \log(1+t^2)\, dt, \quad G(x) = \int_{x^2}^{1} \cos^2 t^2\, dt, \quad H(x) = \int_{-e^x}^{\operatorname{sen}^2 x} \cos(\log(2\, t^2))\, dt.$$

7.- (*) Encontrar una función f definida y continua en $[0, \infty)$ tal que

$$\int_0^{x^2} (1+t)\, f(t)\, dt = 6\, x^4.$$

8.- Sea $f : [0, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x < 3, \\ x+a & \text{si} \quad 3 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

¿Qué valor debemos dar a a para que exista una función F en $[0, 4]$ con $F'(x) = f(x)$? Encontrar todas las funciones F posibles que cumplan la condición anterior.

9.- Calcular las primitivas siguientes:

$$(1) \int \frac{\sqrt[5]{x^3} + \sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}} dx \qquad (2) \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \qquad (3) \int \frac{e^x + e^{2x}}{e^{3x}}\, dx$$

$$(4) \int a^x\, dx \qquad (5) \int (\tan x)^2\, dx \qquad (6) \int \frac{dx}{x^2+4}$$

$$(7) \int \frac{8x^2 + 6x + 4}{x+1}\, dx \qquad (8) \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$$

10.- Calcular las primitivas siguientes, usando la fórmula de integración por partes:

$$(1)\ \int x^2 e^x dx \qquad (2)\ \int e^{ax}\,\mathrm{sen}(bx)\,dx \qquad (3)\ \int (\ln x)^3\,dx$$

$$(4)\ \int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx \qquad (5)\ \int \cos(\ln x)\,dx \qquad (6)\ \int x(\ln(x))^2 dx$$

11.- Calcular las primitivas siguientes, usando el cambio de variables adecuado en cada caso:

$$(1)\ \int e^x \mathrm{sen}(e^x) dx \qquad (2)\ \int \frac{\ln x}{x}\,dx \qquad (3)\ \int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}\,dx$$

$$(4)\ \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx \qquad (5)\ \int x\sqrt{1-x^2}\,dx \qquad (6)\ \int \ln(\cos x)\tan x\,dx$$

12.- Calcular las primitivas siguientes, usando cambios de variable trigonométricos:

$$(1)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (2)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (3)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$(4)\ \int \sqrt{1-x^2}\,dx \qquad (5)\ \int \sqrt{4+x^2}\,dx \qquad (6)\ \int \sqrt{x^2-4}\,dx$$

13.- Calcular las primitivas siguientes, mediante descomposición en fracciones simples:

$$(1)\ \int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}dx \qquad (2)\ \int \frac{x^3+x+2}{x^4+2x^2+1}\,dx \qquad (3)\ \int \frac{2x^2+x+1}{(x+3)(x-1)^2}\,dx$$

$$(4)\ \int \frac{dx}{x^4+1} \qquad (5)\ \int \frac{x^3+1}{x^2+x+1}\,dx$$

14.- Calcular las primitivas siguientes:

$$(1)\ \int (6\,x^2-8)^{25}\,x\,dx \qquad (2)\ \int \frac{dx}{2\,x^2+8} \qquad (3)\ \int \frac{3\,x^2+2\,x-1}{x+2}\,dx$$

$$(4)\ \int \frac{e^x}{2\,e^x-1}\,dx \qquad (5)\ \int \frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x+8}\,dx \qquad (6)\ \int \frac{x^4}{x^2+4}\,dx$$

$$(7)\ \int x^3\,\sqrt{x^2-1}\,dx \qquad (8)\ \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad (9)\ \int x^2\,\sqrt{1+x}\,dx$$

$$(10)\ \int \frac{dx}{9\,x^2+6\,x+5} \qquad (11)\ \int \frac{x^3}{x^3-3\,x+2}\,dx \qquad (12)\ \int \frac{x}{x^3-x^2+4\,x-4}\,dx$$

$$(13)\ \int \frac{e^x+3\,e^{-x}}{e^{2\,x}+1}\,dx \qquad (14)\ \int \frac{dx}{2+3\,\cos x} \qquad (15)\ \int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$$

$$(16)\ \int \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx \qquad (17)\ \int \frac{dx}{(x^2+2)^2} \qquad (18)\ \int \frac{x^5+2\,x+1}{x^4+2\,x^2+1}\,dx$$

$$(19)\ \int \frac{dx}{(x-1)^2\,(x^2+3)} \qquad (20)\ \int \frac{x}{1+x^4}\,dx \qquad (21)\ \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$$

$$(22)\ \int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (23)\ \int \frac{dx}{\mathrm{sen}^2\,x\,\cos x} \qquad (24)\ \int \frac{dx}{\cos x}$$

$$(25)\ \int \frac{dx}{\cos^3 x} \qquad (26)\ \int \log x\,dx \qquad (27)\ \int x\,\log x\,dx$$

$$(28)\ \int x^2\ \mathrm{sen}\,x\,dx \qquad (29)\ \int x^3\,e^{-2\,x}\,dx \qquad (30)\ \int \cos(2\,x)\,e^{3\,x}\,dx$$

$$(31)\ \int \mathrm{sen}^4\,x\ \cos^6\,x\,dx \qquad (32)\ \int \mathrm{sen}^3\,x\ \cos^6\,x\,dx \qquad (33)\ \int \mathrm{sen}(2\,x)\ \cos(5\,x)\,dx$$

$$(34)\ \int \arctan x\,dx \qquad (35)\ \int \left(\frac{\mathrm{arc\,sen}\,x}{1-x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\,dx \qquad (36)\ \int x^2\ \mathrm{arc\,cos}\,x\,dx$$

15.- (*)

(a) Hallar $\int \tan x\, dx$, $\int \tan^2 x\, dx$. Expresar $\int \tan^n x\, dx$ en términos de $\int \tan^{n-2} x\, dx$. Como aplicación dar una fórmula para $\int \tan^8 x\, dx$ y para $\int \tan^7 x\, dx$.

(b) Hallar $\int \sec^2 x\, dx$, $\int \sec^3 x\, dx$. Expresar $\int \sec^n x\, dx$ en términos de $\int \sec^{n-2} x\, dx$. Como aplicación dar una fórmula para $\int \sec^6 x\, dx$ y para $\int \sec^7 x\, dx$.

16.- (*) Calcular los siguientes límites expresándolos como límites de sumas de Riemann:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^r + 2^r + \cdots + n^r}{n^{r+1}}, \quad r > 0; \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n\,(n+1)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n\,(n+n)}} \right).$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,n + k}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k)\,k}{n^3}.$$

17.- Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias y en caso afirmativo calcular su valor:

$$(1)\ \int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\, dx \qquad (2)\ \int_2^\infty \frac{x}{x^2 - x - 2}\, dx \qquad (3)\ \int_0^1 \log x\, dx \qquad (4)\ \int_1^\infty \frac{x}{1 + x^4}\, dx$$

$$(5)\ \int_2^\infty \frac{dx}{x \log^2 x} \qquad (6)\ \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{4 + x^2}\, dx \qquad (7)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x\,(1-x)}} \qquad (8)\ \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

18.- Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

$$(1)\ \int_1^\infty e^{-x}\, x^\alpha dx, \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad (2)\ \int_0^\infty \frac{dx}{2\,x + (x^3 + 1)^{\frac{1}{2}}} \qquad (3)\ \int_0^\infty \frac{x}{(1 + x^4)^{\frac{1}{2}}}\, dx$$

$$(4)\ \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(-\log x)^\alpha\, x}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad (5)\ \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{\cosh x}\, dx \qquad (6)\ \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx$$

19.- (*)

(a) Usar la fórmula de integración por partes para demostrar la fórmula de reducción

$$\int x^\alpha\, e^{\beta\, x}\, dx = \frac{1}{\beta}\, x^\alpha\, e^{\beta\, x} - \frac{\alpha}{\beta} \int x^{\alpha - 1}\, e^{\beta\, x}\, dx, \quad \textit{para} \quad \alpha > 0, \quad \beta \neq 0.$$

(b) La función Γ se define para $x > 0$ como $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$. Demostrar que se tiene $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$. Deducir entonces que $\Gamma(n+1) = n!$.

20.-

(a) Hallar el área limitada entre las gráficas de $f(x) = 8 - x^2$, $g(x) = x^2$.

(b) Hallar el área limitada entre las gráficas de $f(x) = 1/(x^2 + 1)$, $g(x) = \dfrac{1}{2}|x|$.

(c) Calcular el área comprendida entre las curvas $y = x\, e^{-x}$, $y = x^2\, e^{-x}$ para valores de $x \geq 1$.

(d) Hallar el área limitada por la curva $y = \left(\dfrac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{1}{2}}$, su asíntota vertical y los ejes de coordenadas.

21.- Sea $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$, y sea G su función inversa. Hallar $G'(0)$.

22.- (*) Sean f, g continuas, con $f \geq 0$ y g creciente. Demostrar que existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(t) g(t) dt = g(a) \int_a^c f(t) dt + g(b) \int_c^b f(t) dt.$$

23.- (*) Calcular

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen} x + x - 4}{\cos x + 2} dx$$