

Hoja 6: Integrales

1.- Calcular, aplicando directamente la definición,  $\int_0^2 x dx$ .

2.- Probar que la función  $y = [x]$  es integrable en  $[0, 5]$  y calcular  $\int_0^5 [x] dx$ .

3.- Expresar como integrales los siguientes límites:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n+k}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)k}{n^3}.$$

4.- Sea  $f$  una función continua en  $[a, b]$ , no negativa, y que cumple  $\int_a^b f(x) dx = 0$ . Probar que  $f$  es cero en todos los puntos.

5.- Dar un ejemplo de una función definida en un intervalo  $[a, b]$ , no integrable, y tal que  $f^2$  sea integrable.

6.- Demostrar que, para cada  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c \neq 0$ , se tiene:

$$\int_a^b f(x+c) dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x) dx, \quad \int_a^b f(cx) dx = \frac{1}{c} \int_{a-c}^{b-c} f(x) dx.$$

7.- Sea una función continua en  $[a, b]$ . Definimos la *media* o *valor esperado* de  $f$  sobre  $[a, b]$  como

$$E(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

(a) Sean  $M$  y  $m$  respectivamente el máximo y el mínimo de  $f$  sobre  $[a, b]$ . Demostrar que  $m \leq E(f) \leq M$ . Si  $f$  es constante, ¿cuál es su valor esperado?

(b) Usando el teorema de los valores intermedios y el apartado anterior probar el siguiente resultado:

Sea  $f$  una función continua en  $[a, b]$ . Entonces, existe  $c \in [a, b]$  tal que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c).$$

(c) Supongamos que  $f$  es impar (es decir,  $f(x) = -f(-x)$ ). Hallar  $E(f)$  sobre  $[-a, a]$ . Sugerencia: interpretar la integral en términos de áreas.

(d) Evaluar  $\int_{-a}^a x^7 \sin(x^4) dx$ .

8.- Sabiendo que  $\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$  para todo  $a > 0$ , calcular  $\int_0^a \sqrt{x} dx$ .

9.- Sea

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1], \\ x + 1 & \text{si } x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Definimos  $F$  con  $F(0) = 0$  y  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ , si  $x \in (0, 2]$ . Determinar  $F$  de forma explícita y probar que es continua en el intervalo  $[0, 2]$ , aunque  $f$  no lo sea.

10.- Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$$F(x) = \int_0^{x^2} (\operatorname{sen} t^2) \log(1 + t^2) dt, \quad G(x) = \int_{-e^x}^{\operatorname{sen}^2 x} \cos(\log(2t^2)) dt.$$

11.- Encontrar una función  $f$  definida y continua en  $[0, \infty)$  tal que

$$\int_0^{x^2} (1 + t) f(t) dt = 6x^4.$$

12.- Sea  $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x < 3, \\ x + a & \text{si } 3 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

¿Qué valor debemos dar a  $a$  para que exista una función  $F$  en  $[0, 4]$  con  $F'(x) = f(x)$ ? Encontrar todas las funciones  $F$  posibles que cumplan la condición anterior.

13.- Evaluar las siguientes integrales indefinidas:

- |   |   |  |
|---|---|--|
| (1) $\int (6x^2 - 8)^{25} x dx$                 | (2) $\int \frac{dx}{2x^2 + 8}$  | (3) $\int \frac{3x^2 + 2x - 1}{x + 2} dx$          |
| (4) $\int \frac{e^x}{2e^x - 1} dx$              | (5) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + 8} dx$   | (6) $\int \frac{x^4}{x^2 + 4} dx$                  |
| (7) $\int x^3 \sqrt{x^2 - 1} dx$                | (8) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}} dx$  | (9) $\int x^2 \sqrt{1 + x} dx$                     |
| (10) $\int \frac{dx}{9x^2 + 6x + 5}$            | (11) $\int \frac{x^3}{x^3 - 3x + 2} dx$   | (12) $\int \frac{x}{x^3 - x^2 + 4x - 4} dx$        |
| (13) $\int \frac{e^x + 3e^{-x}}{e^{2x} + 1} dx$ | (14) $\int \frac{dx}{2 + 3 \cos x}$   | (15) $\int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2}$                 |
| (16) $\int \frac{x}{(x^2 - 1)^2} dx$            | (17) $\int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2}$  | (18) $\int \frac{x^5 + 2x + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} dx$ |
| (19) $\int \frac{dx}{(x - 1)^2(x^2 + 3)}$       | (20) $\int \frac{x}{1 + x^4} dx$  | (21) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$      |
| (22) $\int \frac{dx}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$  | (23) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos x}$  | (24) $\int \frac{dx}{\cos x}$                      |
| (25) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$                 | (26) $\int \log x dx$   | (27) $\int x \log x dx$                            |
| (28) $\int x^2 \operatorname{sen} x dx$         | (29) $\int x^3 e^{-2x} dx$  | (30) $\int \cos(2x) e^{3x} dx$                     |
| (31) $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^6 x dx$  | (32) $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^6 x dx$  | (33) $\int \operatorname{sen}(2x) \cos(5x) dx$     |
| (34) $\int \arctan x dx$                        | (35) $\int \left( \frac{\operatorname{arc} \operatorname{sen} x}{1 - x^2} \right)^{\frac{1}{2}} dx$ | (36) $\int x^2 \operatorname{arc} \cos x dx$       |

14.-

- (a) Hallar  $\int \tan x dx$ ,  $\int \tan^2 x dx$ . Calcular  $\int \tan^n x dx$ , expresando esta integral en términos de  $\int \tan^{n-2} x dx$ . Como aplicación dar una fórmula para  $\int \tan^{10} x dx$  y para  $\int \tan^{13} x dx$ .
- (b) Hallar  $\int \sec^2 x dx$ ,  $\int \sec^3 x dx$ . Calcular  $\int \sec^n x dx$ , expresando esta integral en términos de  $\int \sec^{n-2} x dx$ . Como aplicación dar una fórmula para  $\int \sec^{14} x dx$  y para  $\int \sec^9 x dx$ .

15.- Calcular los siguientes límites expresándolos como límites de sumas de Riemann:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^r + 2^r + \cdots + n^r}{n^{r+1}}, \quad r > 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n(n+n)}} \right).$$

16.- Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias y en caso afirmativo calcular su valor:

$$(1) \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx \quad (2) \int_2^{\infty} \frac{x}{x^2 - x - 2} dx \quad (3) \int_0^1 \log x dx \quad (4) \int_1^{\infty} \frac{x}{1+x^4} dx$$
$$(5) \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \log^2 x} \quad (6) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{4+x^2} dx \quad (7) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \quad (8) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

17.- Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

$$(1) \int_1^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (2) \int_0^{\infty} \frac{dx}{2x + (x^3 + 1)^{\frac{1}{2}}} \quad (3) \int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x^4)^{\frac{1}{2}}} dx$$
$$(4) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(-\log x)^{\alpha} x}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (5) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\cosh x} dx \quad (6) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

18.-

- (a) Demostrar la fórmula de reducción  $\int x^{\alpha} e^{\beta x} dx = \frac{1}{\beta} x^{\alpha} e^{\beta x} - \frac{\alpha}{\beta} \int x^{\alpha-1} e^{\beta x} dx$ , para  $\alpha > 0$ ,  $\beta \neq 0$ .
- (b) La función  $\Gamma$  se define para  $x > 0$  como  $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ . Demostrar que se tiene  $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ . Deducir entonces que  $\Gamma(n+1) = n!$ .

19.-

- (a) Calcular el área comprendida entre las curvas  $y = x e^{-x}$ ,  $y = x^2 e^{-x}$  para valores de  $x \geq 1$ .
- (b) Hallar el área limitada por la curva  $y = \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{1}{2}}$ , su asíntota vertical y los ejes de coordenadas.