Análisis I
Primero de Físicas

Curso 2016-2017.

Hoja 4: Límites y derivadas

1.- Sea f tal que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. probar que

$$\lim_{x\to a}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e.$$

2.- Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan^3 x}{x^4+x^3}$ (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(e^x-1)^2 \operatorname{sen}^2 x}{\tan^3 x}$ (c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)^2}{3 \operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen}^5 x}$

(d) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}$ (e) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^{[x]}}$ (f) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\log(x^4+x^2+1)}{\log(x^{10}+x^7+100)}$

(g) $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{2x-1}$ (h) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{2+x\,2^x}{2+x\,3^x}\right)^{\frac{1}{x}}$ (i) $\lim_{x\to 1^-} (x^5-2x^4+3)^{\frac{-2}{(x-1)^3}}$

(j) $\lim_{x\to 0^+} |\operatorname{sen} x|^{\frac{1}{\log x}}$ (k) $\lim_{x\to 1^+} (x^5-2x^4+3)^{\frac{-2}{(x-1)^3}}$ (l) $\lim_{x\to\infty} (7x+5x^4)^{\frac{1}{6+2\log(2x+1)}}$

3.- Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

(a) $y = \log \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ (b) $y = \operatorname{sen}(\log x)$ (c) $y = \log(x^2 \log^3 x)$

(d) $y = x^{\tan(2\pi x)}$ (e) $y = \operatorname{arc\,sen} \sqrt{x^2-1}$ (f) $y = \arctan \sqrt{x^2-1}$

(g) $y = x^{x^{\cos x}}$ (h) $y = x^{\log x}$ (i) $y = (\log x)^x$

(j) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$ (k) $y = \tan(x^2 + \log x + \arctan x)$ (l) $y = 2^{\sec(x^3+7x-10)}$

(m) $y = \sec(\operatorname{cosec} x)$ (n) $y = (x^2+1)^{e^x}$ (ñ) $y = \sqrt[5]{\operatorname{cotan}^8(x^2)}$

(o) $y = x^{\frac{1}{x}}$ (p) $y = \log_x e^x$ (q) $y = e^{e^{e^x}}$

4.- Estudiar la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones. Calcular la derivada en los puntos que exista.

(a) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ (b) $f(x) = \arccos x$ (c) $f(x) = \dfrac{x^3}{|x|}$

(d) $f(x) = 2^{-\frac{1}{|x|}}$ (e) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ (f) $f(x) = \log |x|$

(g) $f(x) = \log\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$ (h) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ (i) $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

5.- Hallar el valor de los parámetros para que las funciones que se definen a continuación sean derivables en todo su dominio:

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 2, \\ a \cdot x + b & \text{si} \quad x > 2. \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} a + b \cdot x^2 & \text{si} \quad |x| \leq 2, \\ \dfrac{1}{|x|} & \text{si} \quad |x| > 2. \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} a \cdot \cos x & \text{si} \quad x \leq 0, \\ b - x^2 & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ c \cdot \arctan x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\pi\, x) + a & \text{si} \quad x \leq 0, \\ a + b \cdot x & \text{si} \quad 0 < x < 2, \\ c \cdot e^{x^2} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

6.- Probar que si $y = f(x)$ es derivable en $x = a$ y $f(a) \neq 0$ entonces $y = |f(x)|$ es derivable en $x = a$.

7.- ¿Cuántas derivadas sucesivas existen para la función $f(x) = |x|^3$? Calcularlas. Hacer lo mismo con $g(x) = x\,|x|$.

8.- Sean I un intervalo abierto y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ un función derivable en cierto $a \in I$. Definimos $t(x) = f(a) + f'(a)\,(x - a)$. Probar que $t(x)$ es la mejor aproximación lineal a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$, es decir, demostrar:

(I) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - t(x)}{x - a} = 0.$

(II) Si $l(x) = m \cdot x + n$ y $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - l(x)}{x - a} = 0$, entonces $l(x) = t(x)$.

9.- Calcular el valor máximo y mínimo de la función $f(x) = x^3 - 3\,x^2 - 9\,x + 1$ en el intervalo $[-2, 6]$.

10.- Dados $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, encontrar el mínimo valor de la función

$$F(x) = \Big(\sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

11.- Encontrar justificadamente el valor máximo de las siguientes funciones $F(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-2|}$ y $G(x) = \frac{1}{1+|x-1|} + \frac{1}{1+|x+1|}$.

12.- Demostrar que de entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es el cuadrado.

13.- Una empresa de tomate frito quiere fabricar latas cilíndricas de volumen fijo V. ¿Cuál debe ser la relación entre el radio de la base R y la altura de la lata h, para que su construcción requiera el mínimo gasto de material?

14.- Se dice que una función f definida en un intervalo I es Lipschitz si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $x, y \in I$, se verifica $|f(x) - f(y)| \leq C\,|x - y|$. En general, se dice que es Hölder continua de orden $\beta > 0$ si $|f(x) - f(y)| \leq C\,|x - y|^{\beta}$.

(a) Probar que una función Hölder continua es continua.

(b) Probar que si f es Hölder continua de orden β, $\beta > 1$, entonces f es derivable. Mostrar de hecho que f debe ser constante.

15.- Obtener las siguientes desigualdades usando el Teorema del valor medio:

(a) $1 + x \leq e^{x}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\log(1 + x) < x$, para todo $x > 0$.

16.- Demostrar que la ecuación $x^3 - 3\,x + k = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, tiene a lo sumo una solución en $[-1, 1]$. ¿Para qué valores de k existe efectivamente la solución?

17.- Demostrar que la ecuación $6\,x^4 - 7\,x + 1 = 0$ no tiene más de dos raíces reales distintas.

18.- Demostrar que la ecuación $6\,x^5 + 13\,x + 1 = 0$ tiene exactamente una raíz real.