

Hoja 2: Sucesiones

1.- Estudiar el límite de las siguientes sucesiones

- (a) $\left\{ \frac{n^2}{n+2} \right\}$ (b) $\left\{ \frac{n^3}{n^3+2n+1} \right\}$ (c) $\left\{ \frac{n}{n^2-n-4} \right\}$
(d) $\left\{ \frac{\sqrt{2n^2-1}}{n+2} \right\}$ (e) $\left\{ \frac{\sqrt{n^3+2n+n}}{n^2+2} \right\}$ (f) $\left\{ \frac{\sqrt{n+1+n^2}}{\sqrt{n+2}} \right\}$
(g) $\left\{ \frac{(-1)^n n^2}{n^2+2} \right\}$ (h) $\left\{ \frac{n+(-1)^n}{n} \right\}$ (i) $\left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\}$
(j) $\left\{ \left(\frac{5}{3}\right)^n \right\}$ (k) $\left\{ \frac{2^n}{4^n+1} \right\}$ (l) $\left\{ \frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}} \right\}$
(m) $\left\{ \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n} \right\}$ (n) $\left\{ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right\}$ (ñ) $\left\{ \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right\}$

2.-

(a) Utilizar la igualdad $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ para simplificar la expresión $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

(b) Como aplicación calcular el límite de la sucesión

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

3.- Calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2} + \dots + \frac{n+n}{n^2+n} \right).$$

4.- Sea $a > 1$. Se define por recurrencia la sucesión $\{a_n\}$ por la relación $a_n = \sqrt{a \cdot a_{n-1}}$, $a_1 = \sqrt{a}$. Probar que la sucesión es monótona creciente y acotada. Hallar su límite.

5.- Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales tal que $a_1 > -\frac{3}{2}$ y $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$. Demostrar que la sucesión converge y calcular su límite. Indicación: distinguir el caso $a_1 \geq 3$ y $a_1 < 3$.

6.- Sea $a_1 = 1$. Definimos las siguientes sucesiones por recurrencia:

(a) $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n$, (b) $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}a_n$, (c) $a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n$, (d) $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}a_n$.

Probar que cada una de ellas es acotada y monótona. Hallar el límite.

7.- Se define recurrentemente la sucesión $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}$, donde $a_1 = a > 0$. ¿Es convergente la sucesión?

8.- Interpretar las expresiones siguientes como el límite de una sucesión definida de forma recurrente:

$$(a) \quad \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} \quad (b) \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}, \quad (c) \quad 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}.$$

Probar que esos límites existen y calcular su valor numérico.

9.- Demostrar que si $a_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \frac{1}{e}.$$

10.- Calcular, si existen, los límites de las sucesiones que tienen como término general

$$a_n = \left(\frac{n^2 + 1}{n^2}\right)^{2n^2 - 3}, \quad b_n = \left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right)^{2n^2 + 3}, \quad c_n = a_n + \frac{1}{b_n}.$$

11.-

(a) Probar por inducción que para $n = 1, 2, \dots$ se tienen las desigualdades

$$2^{n-1}n! \leq n^n \leq e^{n-1}n!$$

(b) Como aplicación probar las siguientes afirmaciones

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n}} = \infty.$$

12.- Hallar los siguientes límites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 - 1)^{\frac{1}{3n}} \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left((n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}} \right).$$

13.- Demostrar que si $A \subset \mathbb{R}$ está acotado superiormente, existe una sucesión $\{a_n\}$ con $a_n \in A$ y tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup A$.

14.- La sucesión de término general $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ cumple que, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$ para $n > n_0$. Demostrar que, sin embargo, la sucesión no es de Cauchy.