MATEMÁTICAS CON ORDENADOR

Curso 2020/2021

HOJA 2

1. Dibuja los primeros valores de las siguientes sucesiones y di su límite (si existe):

i) $\lim\limits_{n\to\infty}(2^{n+1}n^2 - 2^n n^3)$ **ii)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\left(\dfrac{n^2+3}{n+1}\right)^{n^2}}$ **iii)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^n + (-\mathrm{e})^n}{\pi^n}$

iv) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{\dfrac{1}{n^4}}$ **v)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos(n\pi)}{n^2}$ **vi)** $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ **vii)** $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n n$

2. Considera la sucesión definida por

$$\begin{cases} x_0 = 1,\ x_1 = \dfrac{1}{7} \\ x_{n+1} = \dfrac{22}{7}x_n - \dfrac{3}{7}x_{n-1},\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Trabajando en precisión infinita, se tiene que el término x_{n+1} así definido coincide con $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{n+1}$. Genera los 100 primeros términos de la sucesión usando ambas alternativas en su expresión y comenta lo que observas que sucede

3. Comprueba que se cumplen los siguientes criterios de convergencia sobre las sucesiones dadas

i) Stolz sobre $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n)}{n^2}$ **ii)** Raíz sobre $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n^3}}$ **iii)** Raíz sobre $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3n]{\dfrac{n^2}{2n^2+5}}$

iv) Stolz sobre $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{2n^2+1}$

4. Simula n repeticiones de una prueba de Bernoulli con probabilidad de éxito $p = 1/3$ mediante el comando `binornd` de Matlab. Representa, para n variando de 100 a 700 en intervalos de 10, la proporción de éxitos observados, y comprueba que tiende a p cuando n aumenta. Representa en la misma gráfica las curvas $p \pm 2\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$, que engloban dos desviaciones típicas alrededor de la media

5. Usa alguno de los criterios que conoces para decidir si las siguientes series son convergentes o no:

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}$ **ii)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)^n\mathrm{e}^{-n^2}$ **iii)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^n}$

iv) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{n+1}$ **v)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n^3}{4^n}$ **vi)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$

vii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(5n^2+4)^n}{(2n+1)^{2n}}$ **viii)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{n^3}}{8^{n+3}}$ **ix)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^4}{\cos^2(n)}$

6. Halla la suma (si existe) de las siguientes series:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ **ii)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+4^n}{5^n}$ **iii)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+8n+3}$ **iv)** $\sum_{n=1}^{\infty} (3^{-n}-2^{-n-1})$

7. ¿Cuántos términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ has de sumar para obtener un resultado con valor absoluto del error menor que una centésima? ¿Cuánto da esa suma?

8. ¿Por qué puedes aplicar el criterio de Leibniz a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^2}$? Comprueba que, tal como afirma el criterio, se cumple que $|S_\infty - S_{50}| < |a_{51}|$

9. Representa y calcula las primeras 30 sumas parciales en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{3^{n+2}}$ y comprueba que el límite de las mismas coincide con la suma de la serie

10. Comprueba que uno de los dos apartados da una buena aproximación al valor exacto de la suma de la serie y el otro no. ¿A qué crees que se puede deber?
i) Representa el resultado de las primeras 100 sumas parciales de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ y observa si van convergiendo a su suma. ¿Cuánto valdrá ésta?
ii) Calcula las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.001}}$ mientras la diferencia en valor absoluto entre dos consecutivas sea mayor que 10^{-3}, represéntalas y observa si van convergiendo a su suma. ¿Cuánto valdrá ésta? ¿Cuántas iteraciones has realizado?

11. Halla el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ **ii)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n x^n$ **iii)** $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(n+1)!$ **iv)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{2n}}{n+2}(x-3)^n$