MATEMÁTICAS CON ORDENADOR

Curso 2020/2021

HOJA 1

1. Comprueba si $v = (1, -2, 3)$ es solución del sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 4x & + & 5y & + & 6z & = & 12 \\ 9x & & & + & z & = & 12 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 8 \end{array}\right\}$$

2. Programa el cálculo de todos los menores principales de una matriz cuadrada de tamaño arbitrario n. Aplícalo a:

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 & 6 & 1 & 7 \\ 2 & 9 & 0 & 5 & 4 \\ 6 & 8 & 2 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 9 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Di si los siguientes sistemas son compatibles, determinados, homogéneos, ... Utiliza para ello los comandos `rank` y/o `rref`. En los sistemas que tengan solución, calcúlala

i) $$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 16 \\ 2 & 4 & 8 \\ -2 & -2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ii) $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 0 & -1 \\ 6 & 6 & 1 & 1 \\ -2 & -6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

iii) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

iv) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 6 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -8 \\ -29 \end{pmatrix}$$

4. Resuelve simultáneamente los sistemas $Ax = b_1$ y $Ax = b_2$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. Añadiendo a la derecha de la matriz A del ejercicio anterior la identidad de su mismo tamaño, aplica `rref` y comprueba que la matriz que aparece en el último paso a la derecha es la inversa de A.

6. Un ingeniero de obras públicas necesita para un proyecto de construcción 4800 m^3 de arena, 5800 m^3 de grava fina y 5700 m^3 de grava gruesa. Hay tres canteras, cuya composición viene dada en la tabla, de las que puede extraer el material.

	Arena (%)	Grava fina (%)	Grava gruesa (%)
1	55	30	15
2	25	45	30
3	25	20	55

Plantea el problema como un sistema lineal. ¿Cuántos m^3 deberán sacar los obreros de cada una para satisfacer su demanda? ¿Y si necesitara 5000 m^3 de arena? Resuelve ambas versiones del problema simultáneamente

7. Para el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

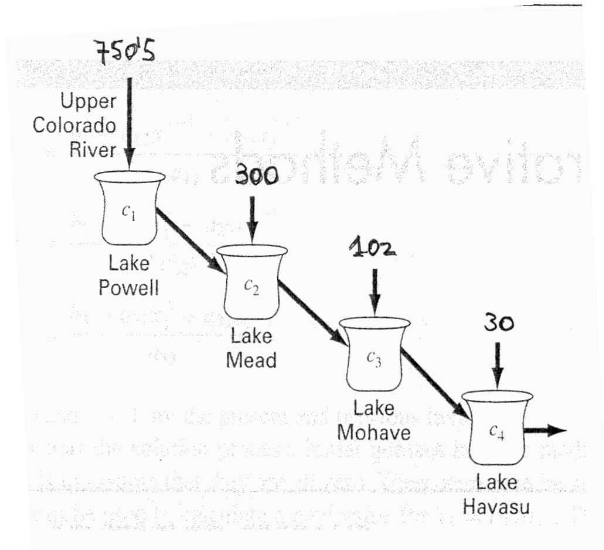
i) Resuélvelo de todas las maneras que sepas usando comandos de Matlab
ii) Escribe una *function* programando eliminación gaussiana en el caso general, y aplícaselo
iii) Escribe un *script* programando sustitución regresiva para resolver un sistema triangular superior en el caso general y aplícaselo

8. El siguiente sistema de ecuaciones sirve para determinar las concentraciones $\{c_i\}_{i=1}^{3}$ (en g/m^3) en una serie de 3 reactores acoplados como función de la cantidad de masa que entra a cada uno de ellos, estando dados los miembros de la derecha en $g/$día:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 15c_1 & - & 3c_2 & - & c_3 & = & 3300 \\ -3c_1 & + & 18c_2 & - & 6c_3 & = & 1200 \\ -4c_1 & - & c_2 & + & 12c_3 & = & 2400 \end{array}\right\}$$

i) Resuelve el sistema usando la inversa de la matriz de coeficientes
ii) Di cuánto habrá que incrementar la tasa de masa de entrada al tercer reactor para que aumente $10g/m^3$ la concentración en el primer reactor
iii) ¿Cuánto se reduciría la concentración en el tercer reactor si la tasa de masa de entrada a los reactores 1 y 2 se redujera en 700 y 350 $g/$día respectivamente?

9. El Bajo Río Colorado consiste de cuatro embalses, como se ve en la figura:



GURE P11.12

Escribiendo las ecuaciones de balance de masas para cada uno de ellos, se obtiene el sistema:

$$\begin{pmatrix} 13.422 & 0 & 0 & 0 \\ -13.422 & 12.252 & 0 & 0 \\ 0 & -12.252 & 12.377 & 0 \\ 0 & 0 & -12.377 & 11.797 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 750.5 \\ 300 \\ 102 \\ 30 \end{pmatrix}$$

donde $\{c_i\}_{i=1}^4$ es la concentración de cloro resultante en los lagos Powell, Mead, Mohave y Havasu respectivamente, y el vector de la derecha son las cargas de cloro en cada uno de ellos.

i) Resuelve el sistema usando la inversa de la matriz de coeficientes

ii) ¿Cuánto habría que reducir la carga del lago Powell para que la concentración del lago Havasu fuera 75?

10. Considera el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} 10x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 6 \\ -x_1 & + & 11x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 25 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 10x_3 & - & x_4 & = & -11 \\ & & 3x_2 & - & x_3 & + & 8x_4 & = & 15 \end{array}\right\}$$

Resuélvelo programando y aplicándole el método iterativo de Jacobi, el cual consiste en lo siguiente: en la ecuación i-ésima de un sistema de n ecuaciones lineales se despeja la variable x_i en función de las demás incógnitas, con lo que, en la k-ésima iteración, el sistema se reescribe en la forma $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$ para alguna matriz T y algún vector c, relacionados con los A, b del sistema inicial $Ax = b$. Llamando D a la diagonal de A, U a su parte estrictamente triangular superior y L a su parte estrictamente triangular inferior, de manera que $A = L + D + U$, tendremos que $x^{(k+1)} = -D^{-1} \cdot (U + L) \cdot x^{(k)} + D^{-1} \cdot b$, con lo que $T = -D^{-1} \cdot (U + L)$ y $c = D^{-1} \cdot b$; si, en vez de matricialmente, lo expresamos para las componentes, sería

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}.$$

Se parte de unos valores iniciales arbitrarios para las componentes de $x^{(0)}$, y se detiene el proceso cuando la diferencia entre dos iteraciones consecutivas cumpla que $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty < \epsilon$ para una cierta tolerancia ϵ prefijada (ten en cuenta que $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \{|x_i|\}$). ¿Cuántas iteraciones has necesitado para converger?

11. Clasifica las siguientes formas cuadráticas :

i) $q_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1^2+3x_1x_2+x_2x_1-3x_1x_4+3x_4x_1-4x_2^2-2x_2x_3+2x_3x_2-4x_3x_4+2x_4x_3-x_3^2-x_4^2$
ii) $q_2(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$

Escribe la forma cuadrática simétrica asociada a cada una y exprésala en una nueva base de manera que no aparezcan términos cruzados

12. Un vector con componentes no negativas, la suma de las cuales asciende a uno, se llama vector de probabilidad. Una matriz estocástica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ está compuesta por vectores columna que son vectores de probabilidad. Una cadena de Markov, dado un $x^{(0)}$ inicial, es una sucesión $x^{(k)} = Ax^{(k-1)}$, la cual describe un sistema, y sus componentes nos indican la probabilidad de que el sistema se encuentre en cada uno de n estados posibles. Si el sistema tiende a un valor finito a largo plazo, $\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} A^k x^{(0)}$, sucederá que habrá un x_r de manera que $Ax^{(r)} = x^{(r)}$; es decir, será un vector de equilibrio. Nótese que $x^{(r)}$ es entonces un vector propio asociado al valor propio $\lambda = 1$. Considérese la matriz estocástica:

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.25 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.1 & 0.2 & 0.05 & 0.15 \\ 0.15 & 0.2 & 0.1 & 0.05 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.05 & 0.2 & 0.05 & 0.2 & 0.25 \\ 0.05 & 0.05 & 0.25 & 0.1 & 0.25 & 0.05 \\ 0.1 & 0.1 & 0.15 & 0.2 & 0.05 & 0.15 \end{pmatrix}$$

en la que a_{ij} representa la proporción de votantes del candidato j-ésimo que, en la siguiente elección, pasarán a votar al candidato i-ésimo. Si, inicialmente, la probabilidad de cada candidato de ser votado viene dada por $x^{(0)} = (0.1, 0.15, 0.25, 0.1, 0.15, 0.25)$, averigua cuál será la distribución de proporción de votos estable.

13. Una estructura de hormigón está deteriorada en un 25% debido a la corrosión. Para revertir el proceso, se la envuelve en una malla de titanio a la que se aplica un microvoltaje, con lo cual cada mes se recupera el 40% de la zona dañada, si bien se continúa deteriorando mensualmente el 20% de la zona sana. ¿Se conseguirá sanar toda la estructura algún día?

14. Programa el cálculo de la proyección ortogonal de un vector de $\mathbb{R}^n$ sobre un subespacio para el producto escalar canónico. Aplícalo al siguiente caso: considera en $\mathbb{R}^4$ el vector v=(-3,1,4,2) y el subespacio W generado por la base $B = \{(-2, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

i) Comprueba que el sistema B es ortogonal
ii) Halla la proyección ortogonal de v sobre W
iii) Calcula la distancia de v a W
iv) Descompón v como la suma de un vector sobre W y uno sobre $W^{\perp}$

15. Considera el espacio de las funciones reales continuas en $[0,2\pi]$, en el que definimos el producto escalar $f \cdot g = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$. Considera asimismo su subespacio W=$\mathcal{L}\{$1,cos(t),sen(t),cos(2t),sen(2t)$\}$. Halla la mejor aproximación de la función $f(t) = t$ mediante funciones en W, a través de su proyección ortgonal, la cual se denomina aproximación de Fourier (de orden 2 en este caso). Comprueba previamente que la base dada es ortogonal. Representa juntas f y su proyección

16. Dadas las bases $B_1 = \{(1,1,1),(2,1,0),(2,1,1)\}$ y $B_2 = \{(1,2,2),(1,1,1),(1,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y los vectores $v_1 = (2,2,3)_{B_1}, v_2 = (6,5,7)_C, v_3 = (-5,-4,-8)_C, v_4 = (-1,1,2)_{B_2}$
i) Halla (simultáneamente) las coordenadas de v_2, v_3 respecto de la base B_1
ii) Encuentra la matriz de cambio de la base B_1 a la base B_2 y la de cambio de B_2 a B_1
iii) Da las coordenadas de v_1 en la base B_2
iv) Da las coordenadas de v_4 en la base B_1

17. Razona si son ciertas las siguientes afirmaciones:
i) $A_1 = \{(1,2,-1,3,5),(-1,1,4,-2,0),(1,1,-1,3,12),(0,4,3,1,-2)\}$ forma un sistema linealmente independiente en $\mathbb{R}^5$
ii) $A_2 = \{(1,2,-1,3,5),(-1,1,4,-2,0),(1,1,-1,3,12),(0,4,3,1,-2),(-1,0,2,3,4)\}$ forma un sistema generador de $\mathbb{R}^5$
iii) El vector (3,-5,-3) se puede escribir como combinación lineal de los vectores (2,-1,1) y (1,3,5)

18. Dada la aplicación lineal:
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \rightsquigarrow & (x, x+2y, x-2y) \end{array}$$
y las bases $B = \{(1,1),(1,-1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $B' = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$, halla la matriz asociada a f en dichas bases y calcula la imagen del vector de coordenadas (5,4) en la base canónica

19. Dada la aplicación lineal:
$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \rightsquigarrow & (2x-8y-z+6t, x+3y+3z, 8y+4z-2t) \end{array}$$
halla una base de su subespacio imagen y otra del núcleo. ¿Es g biyectiva?

20. Calcula el ángulo (expresándolo en grados, minutos y segundos) que forman los vectores (-2,3,4,0,6) y (5,1,-2,4,3) usando el producto escalar canónico de $\mathbb{R}^5$