

Capítulo 2:

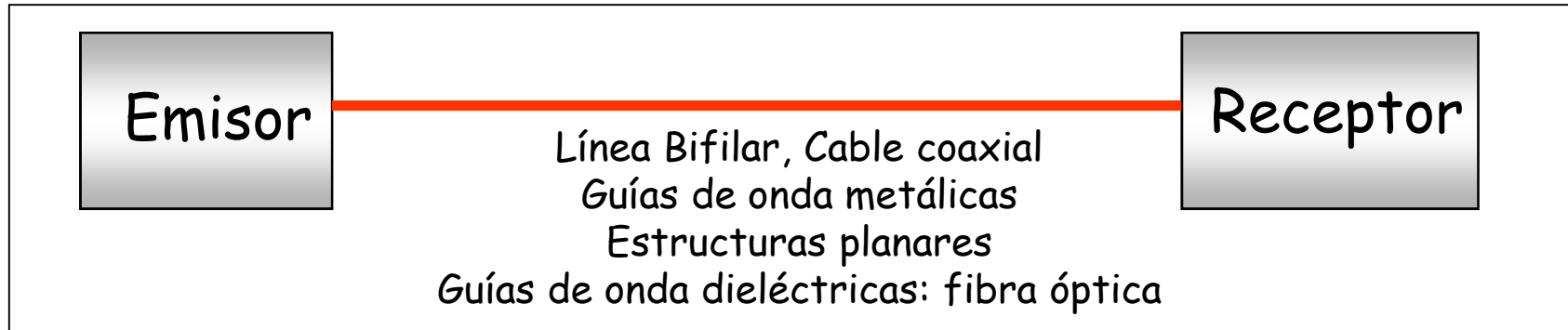
Guías de onda y líneas de transmisión

En el presente capítulo se va a analizar una solución general de las ecuaciones de Maxwell, en un medio sin fuentes, en el que se permitirá la existencia de variación de las magnitudes con las tres coordenadas espaciales.

Dada la complejidad del problema completo nos centraremos en problemas que pueden ser descritos sistemas curvilíneos ortogonales con simetría de traslación.



Transmisión de energía electromagnética por soporte físico **Medios de Transmisión**



Ondas guiadas



Modos

TEM

TE

TM

Híbridos

Teoría electromagnética de las ondas guiadas

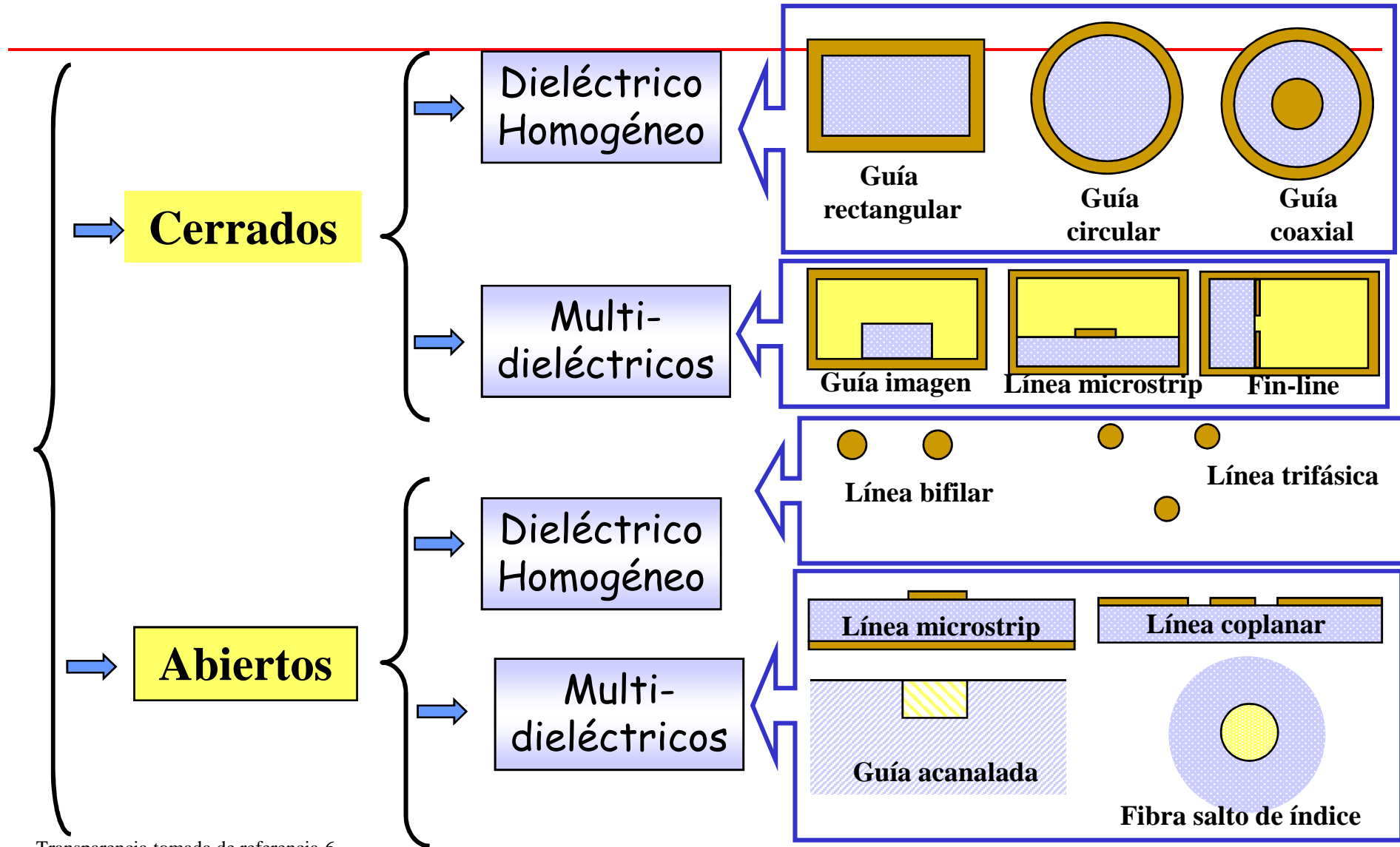
Field Theory of Guided Waves

Transparencia tomada de referencia 6



Frecuencias	λ	Denominación	Medio de Transmisión		Tipo Onda Guiada
			Distancia	Circuitería	
1 KHz	100 Km	Audio	Línea Bifilar	Circuitos Impresos P.C.B.	TEM
10 KHz		Muy Baja Frecuencia			
100 KHz		Baja Frecuencia			
1 MHz	1 Km	Frecuencias Medias	~~~~~	~~~~~	casi-TEM
10 MHz	100 m	Alta Frecuencia			
100 MHz	10 m	Muy alta Frecuencia			
1 GHz	1 m	Ultra alta Frecuencia	~~~~~	Línea strip	TE
10 GHz	10 cm	Microondas	Guías de onda	Línea μ strip	
100 GHz	1 cm	Milimétricas		Líneas coplanares	
100 THz	1 mm	Infrarrojos	~~~~~	~~~~~	Híbridos
1 PHz	1 μ m	Visible	Fibra Óptica	guías dieléctricas planas	

CLASIFICACIÓN DE LOS MEDIOS DE TRANSMISIÓN



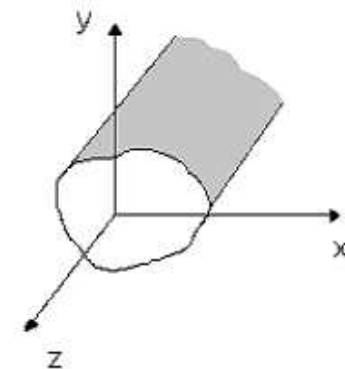
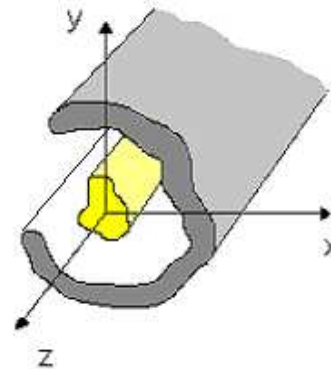
Transparencia tomada de referencia 6



INTRODUCCIÓN (I)

- Definición: medio sin fuentes donde pueden variar las magnitudes electromagnéticas con tres coordenadas espaciales. Limitaciones:
 - Complejidad del problema EM completo
 - Descripción del problema mediante sistema curvilíneo ortogonal (u_1, u_2, u_3)
 - Simetría de traslación: $u_3 = \text{cte}$, planos paralelos entre sí.
 - Los factores de escala quedan:

$$h_3 = 1; \quad \frac{\partial h_1}{\partial u_3} = \frac{\partial h_2}{\partial u_3} = 0; \quad \hat{u}_3 = \hat{z}$$



- Ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia en un medio homogéneo caracterizado por ϵ y μ en donde no existen fuentes:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -j\omega\mu \cdot \vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} &= j\omega\epsilon \cdot \vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Tomando rotacionales en las dos primeras y considerando las otras dos

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta \vec{E} - \gamma_o^2 \vec{E} &= 0 \\ \Delta \vec{H} - \gamma_o^2 \vec{H} &= 0 \\ \gamma_o^2 &= -\omega^2 \cdot \mu \cdot \epsilon \end{aligned} \right. \quad (1)$$



INTRODUCCIÓN (II)

- Resolución de las ecuaciones (1) (tomamos la del campo eléctrico)

- Separación del campo en componentes longitudinal y transversal:

$$\Delta \vec{E}_T + \Delta \vec{E}_z - \gamma_o^2 \vec{E}_T - \gamma_o^2 \vec{E}_z = 0$$

- Sistema con simetría de traslación

$$\begin{cases} \Delta \vec{E}_T - \gamma_o^2 \vec{E}_T = 0 \\ \Delta \vec{E}_z - \gamma_o^2 \vec{E}_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta \vec{E}_z = (\Delta E_z) \cdot \hat{z} = \left(\Delta_T E_z + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \right) \cdot \hat{z}$$

- Aplicando la técnica de separación de variables:

$$E_z = F_E(u_1, u_2) \cdot Z(z)$$



$$\frac{\Delta_T F_E}{F_E} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \gamma_o^2 = 0 \quad (2)$$

- Las ecuaciones diferenciales han de ser igual a una constante

$$\frac{\Delta_T F_E}{F_E} = \gamma_c^2 \quad (3); \quad \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \gamma^2 \quad (4); \Rightarrow \gamma_c^2 = \gamma_o^2 - \gamma^2 \Rightarrow \gamma_c^2 + \gamma^2 = \gamma_o^2$$

$$k_c^2 = k^2 - \beta^2$$

(Poza)

- constante en la dirección transversal
- constante en la dirección longitudinal



INTRODUCCIÓN (III)

- La solución de la ecuación (3) tiene sólo componentes transversales y (4) longitudinales
- La forma de esta solución puede ser

$$Z(z) = A \cdot \exp(-\gamma \cdot z) + B \cdot \exp(\gamma \cdot z)$$

$$Z(z) = C \cdot \cosh(\gamma \cdot z) + D \cdot \sinh(\gamma \cdot z)$$

- Solución A: formada por ondas progresivas y regresivas: componente longitudinal
- Solución B: constituye una onda estacionaria.: componente transversal
- El campo en la dirección longitudinal será:

$$\begin{cases} \vec{E}_z = \hat{z} \cdot F_E(u_1, u_2) \cdot \exp(-\gamma \cdot z) \\ \vec{H}_z = \hat{z} \cdot F_H(u_1, u_2) \cdot \exp(-\gamma \cdot z) \end{cases}$$

donde se ha considerado sólo la onda progresiva



CLASIFICACIÓN DE LAS SOLUCIONES (I)

- MODOS TEM: transversales electromagnéticos, no hay campo eléctrico ni magnético longitudinal

$$\vec{E}_z = 0; \vec{H}_z = 0 \longrightarrow \nabla \times \vec{E}_t = -j\omega \cdot \mu \cdot \vec{H}_t$$

- las ecuaciones de Maxwell quedan

$$\nabla \times \vec{H}_t = j\omega \cdot \varepsilon \cdot \vec{E}_t$$

- calculando el rotacional en sentido longitudinal y utilizando la otra ecuación

$$\Delta_z \vec{E}_T - \gamma_o^2 \cdot \vec{E}_T = 0$$

$$\vec{E}_{TEM} = \vec{F}_{E_T}(u_1, u_2) \cdot \exp(-\gamma_o \cdot z)$$

- Introduciendo esta expresión en el correspondiente rotacional se puede extraer el valor del campo magnético transversal como:

$$\vec{H}_T = \frac{\hat{z} \times \vec{E}_T}{Z_{TEM}}; Z_{TEM} = \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (3)$$

- Los vectores \vec{E} , \vec{H} están contenidos en planos perpendiculares a z.
- El vector \vec{H} se obtiene a partir de la expresión (3)
- No confundir la impedancia del modo TEM que coincide con la intrínseca del medio y sólo depende de las características del medio con la impedancia característica que depende del material que rellena la línea y de la forma de la misma



CLASIFICACIÓN DE LAS SOLUCIONES (II)

- MODOS TM: transversales magnéticos, no existe componente longitudinal del campo magnético por lo que también se les llama modos E: $\vec{H}_z = 0$

- La componente longitudinal es:
$$\begin{cases} \vec{E}_z = \hat{z} \cdot F_E(u_1, u_2) \cdot \exp(-\gamma \cdot z) \\ \text{con } F_E(u_1, u_2) \text{ solución de: } \Delta_T F_E - \gamma_c^2 F_E = 0 \end{cases}$$

- Tomando las expresiones de los rotacionales, multiplicando por $j\omega\epsilon$ la primera y tomando la segunda

$$\Delta_z \vec{H}_T - \gamma_o^2 \vec{H}_T = j\omega\epsilon \nabla_T \times \vec{E}_z$$

- Ecuación diferencial completa cuya solución homogénea es el modo TEM.
- La solución para modos TM:

$$\left. \begin{aligned} \vec{H}_T &= \frac{j\omega\epsilon}{\gamma^2 - \gamma_o^2} \nabla_T \times \vec{E}_z = -\frac{j\omega\epsilon}{\gamma_c^2} \nabla_T E_z \times \hat{z} \\ \vec{E}_T &= \frac{\gamma}{\gamma_c^2} \nabla_T E_z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{H}_T = \frac{j\omega\epsilon}{\gamma} \hat{z} \times \vec{E}_T$$

- \vec{H} está contenido en planos perpendiculares a z

$$Z_{TM} = \frac{\hat{z} \times E_T}{\vec{H}_T} = \frac{\gamma}{j\omega\epsilon}$$



CLASIFICACIÓN DE LAS SOLUCIONES (III)

- MODOS TE: transversales eléctricos, no existe componente longitudinal del campo eléctrico por lo que también se les llama modos H: $\vec{E}_z = 0$

- La componente longitudinal es :
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{H}_z = \hat{z} \cdot F_H(u_1, u_2) \cdot \exp(-\gamma \cdot z) \\ \text{con } F_H(u_1, u_2) \text{ solución de: } \Delta_T F_H - \gamma_c^2 F_H = 0 \end{array} \right.$$

- Siguiendo un proceso análogo al de los modos TM resulta:

$$\Delta_z \vec{E}_T - \gamma_o^2 \vec{E}_T = -j\omega\mu \nabla_T \times \vec{H}_z$$

- Ecuación diferencial completa cuya solución homogénea es el modo TEM

- La solución para modos TM:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E}_T = \frac{j\omega\mu}{\gamma_c^2} \nabla_T \times \vec{H}_z \\ \vec{H}_T = \frac{\gamma}{\gamma_c^2} \nabla_T H_z \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{E}_T = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \vec{H}_T \times \hat{z}$$

- \vec{E} está contenido en planos perpendiculares a z

- Se puede definir una impedancia del modo como

$$Z_{TE} = \frac{\hat{z} \times E_T}{\vec{H}_T} = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$$



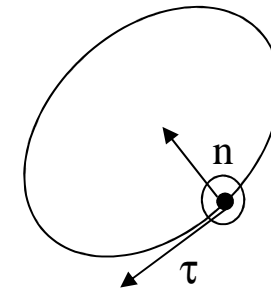
CLASIFICACIÓN DE LAS SOLUCIONES (IV)

- Cuando no se satisface ninguna de las condiciones anteriores la solución se forma por superposición de los casos anteriores. La técnica de separación de variables deja de ser válida cuando la sección no es un cilindro recto.
- Las condiciones de contorno laterales definen la variación de los modos.
- Las condiciones en planos $z=\text{cte}$ determinan cuántos y cuáles son los modos.
- La constante de propagación viene determinada $\gamma = \gamma_o = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$
 - Por las características del medio: modos TEM
 - Por las características del medio y las condiciones de contorno $\gamma = \sqrt{\gamma_o^2 - \gamma_c^2}$
- La constante de propagación es una función compleja de ω : $\gamma(\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega)$
 - Constante de atenuación describe cómo varían las amplitudes de los campos
 - Constante de fase la forma cómo varía la fase del campo $\lambda(\omega) = \frac{2\pi}{\beta(\omega)} = \frac{v_f(\omega)}{\omega/2\pi}$
 - Longitud de onda: distancia entre dos puntos de igual fase:
 - Velocidad de fase: velocidad con que se desplazan los planos de fase constante
 - Dos situaciones:
 - Modo no se propaga. $\alpha(\omega) \geq \beta(\omega)$ Modo se propaga $\alpha(\omega) \leq \beta(\omega)$



CONDICIONES DE CONTORNO LATERALES (I)

- Determinan cuántos y cuáles modos son necesarios considerar para obtener la solución completa.
- Casos más comunes
 - Región limitada por un conductor perfecto sin discontinuidades.
 - Características de buen conductor
 - Parte de la superficie límite se encuentra en el infinito
 - Discontinuidades en el medio (línea microstrip)
- Condiciones de conductor perfecto:
 - La región de contorno es un conductor perfecto:



$$\hat{n} \times \vec{E} \Big|_C = 0 \Rightarrow \hat{n} \times (\vec{E}_T + \vec{E}_z) \Big|_C = 0 \Rightarrow \begin{cases} \hat{n} \times \vec{E}_T \Big|_C = 0 \\ E_z = 0 \end{cases} \quad (4)$$

- Modos TE: la segunda condición la cumplen automáticamente

- De la primera se deriva:

$$\hat{n} \times \vec{E}_T \Big|_C = \hat{n} \times (\vec{H}_T \times \hat{z}) \Big|_C = \vec{H}_T (\hat{n} \cdot \hat{z}) - \hat{z} (\hat{n} \cdot \vec{H}_T) \Big|_C = 0 \Rightarrow (\hat{n} \cdot \vec{H}_T) \Big|_C = 0$$

$$(\hat{n} \cdot \vec{H}_T) = \frac{\gamma}{\gamma_c^2} \cdot \left(\frac{\partial H_z}{\partial n} \hat{n} + \frac{\partial H_z}{\partial \tau} \hat{\tau} \right) \cdot \hat{n} \Rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial n} = \frac{\partial F_H}{\partial n} = 0$$



CONDICIONES DE CONTORNO LATERALES (II)

- Condiciones de conductor perfecto:

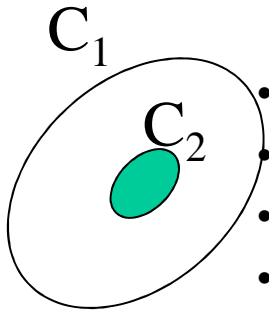
- Modos TM:

- La condición $E_z=0$ supone C es una línea de E_z cte, su gradiente es normal
- Tomando la segunda condición de (4): \vec{E}_T tiene dirección normal

- Modos TEM:

- Las condiciones $\hat{n} \times \vec{E}_T \Big|_C = 0; \nabla_T \times \vec{F}_{E_T} = 0$ coinciden con el planteamiento de un problema estático.
- Los campos transversales coinciden con los campos estáticos entre conductores

$$\left. \begin{array}{l} \vec{F}_{E_T} = -\nabla_T \Phi(x, y) \\ \nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \epsilon \vec{E} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta_T \Phi(x, y) = 0 \\ \Phi(x, y) \Big|_C = cte \end{array} \right.$$



- El campo TEM coincide con la solución de un problema electrostático $\Delta_T \Phi(x, y) = 0$
- En una región limitada por un recinto simplemente conexo no puede haber modos TEM
- En una región múltiplemente conexa: $V_{12} = \Phi_1 - \Phi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$
- El número de modos TEM independientes es el número de partes de la frontera menos 1.
- La corriente que fluye viene dada por la ley de Ampere $I = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l}$
- En cada punto de la línea se puede definir unívocamente un voltaje y una corriente



CARACTERÍSTICAS DE LOS MODOS PARA CONDICIONES DE CONDUCTOR PERFECTO (I)

- Teorema de Green:

- Sea un campo vectorial definido a partir de un potencial como: $\vec{A} = F^*(x, y) \cdot \nabla F(x, y)$
- Cálculo de la divergencia $\nabla \vec{A} = \nabla F^*(x, y) \cdot \nabla F(x, y) + F^*(x, y) \cdot \Delta F(x, y)$
- Teorema de Green para dos dimensiones

$$\int_{S_i} \nabla \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \int_{S_i} \nabla F^*(x, y) \cdot \nabla F(x, y) + F^*(x, y) \cdot \Delta F(x, y) = \oint_C F^*(x, y) \cdot \nabla F(x, y) \cdot d\vec{l}$$

$$\int_{S_i} \nabla_T F^* \cdot \nabla_T F + F^* \cdot \Delta_T F = \oint_C F^* \cdot \frac{\partial F}{\partial n} \cdot d\vec{l}$$

- Condiciones de contorno de conductor perfecto

$$\left. \begin{array}{l} (TM) : F_E = 0 \\ (TE) : \frac{\partial F_H}{\partial n} \Big|_C = 0 \end{array} \right\} \Delta_T F = \gamma_c^2 \cdot F \Rightarrow \int_{S_i} \nabla_T F^* \cdot \nabla_T F = -\gamma_c^2 \cdot \int_{S_i} F^* \cdot F \cdot ds$$

- Ambas integrales son positivas luego tiene que cumplirse $\gamma_c^2 < 0$
 - la constante de propagación es real si $\omega < \omega_c$ luego no se propaga y el modo está al corte
 - la constante de propagación es imaginaria si $\omega > \omega_c$, el modo se propaga
- La propagación es de tipo paso alto con

$$f_c = \frac{\sqrt{-\gamma_c^2}}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}$$

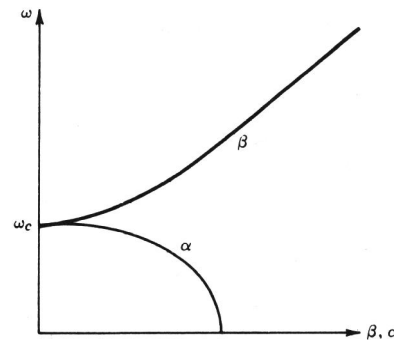


CARACTERÍSTICAS DE LOS MODOS PARA CONDICIONES DE CONDUCTOR PERFECTO (II)

- En función del valor de la frecuencia de corte se puede poner:

$$\gamma = \pm \gamma_o \cdot \sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2}}; Z_{TE} = \pm \frac{\eta}{\sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2}}}; Z_{TM} = \pm \eta \cdot \sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2}}$$

- El signo + corresponde a $f > f_c$.
- El signo - corresponde a $f < f_c$ Así Z_{TE} , por debajo del corte, será inductivo y Z_{TM} capacitivo.
- Representación de la constante de propagación: diagrama de dispersión



CARACTERÍSTICAS DE LOS MODOS PARA CONDICIONES DE CONDUCTOR PERFECTO (III)

- Representación de la constante de propagación: diagrama de dispersión

$$\gamma^2 = \gamma_o^2 - \gamma_c^2;$$

Si $\omega < \omega_c \Rightarrow$ no _ propagación $\Rightarrow \alpha = \gamma$

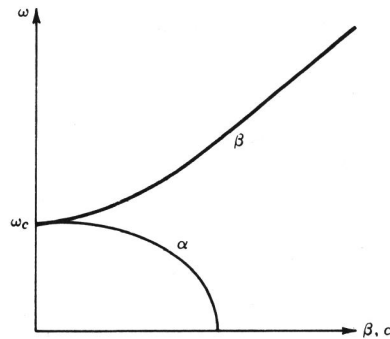
$$\alpha^2 = \gamma_o^2 - \gamma_c^2$$

$$\alpha^2 = -\omega^2 \cdot \mu \cdot \epsilon - \gamma_c^2 \Rightarrow$$

$$\alpha^2 + \omega^2 \cdot \mu \cdot \epsilon = -\gamma_c^2$$

$$\frac{\alpha^2}{-\gamma_c^2} + \frac{\omega^2 \cdot \mu \cdot \epsilon}{-\gamma_c^2} = 1$$

$$\frac{\alpha^2}{\left(\sqrt{-\gamma_c^2}\right)^2} + \frac{\omega^2}{\left(\frac{\sqrt{-\gamma_c^2}}{\sqrt{\mu \cdot \epsilon}}\right)^2} = 1 \Rightarrow \textit{elipse}$$



$$\gamma^2 = \gamma_o^2 - \gamma_c^2;$$

Si $\omega > \omega_c \Rightarrow$ sí _ propagación $\Rightarrow j\beta = \gamma$

$$-\beta^2 = \gamma_o^2 - \gamma_c^2$$

$$-\beta^2 = -\omega^2 \cdot \mu \cdot \epsilon - \gamma_c^2 \Rightarrow$$

$$-\beta^2 + \omega^2 \cdot \mu \cdot \epsilon = -\gamma_c^2$$

$$\frac{-\beta^2}{-\gamma_c^2} + \frac{\omega^2 \cdot \mu \cdot \epsilon}{-\gamma_c^2} = 1$$

$$\frac{\omega^2}{\left(\frac{\sqrt{-\gamma_c^2}}{\sqrt{\mu \cdot \epsilon}}\right)^2} - \frac{\beta^2}{\left(\sqrt{-\gamma_c^2}\right)^2} = 1 \Rightarrow \textit{hipérbola}$$

- Existe un número infinito de soluciones (autofunciones) cada una correspondiéndose con un valor de γ_c^2 (autovalores). El menor de dicho autovalor corresponde a un modo TE



CONCEPTOS DE VELOCIDAD DE FASE Y DE GRUPO: DISPERSIÓN

- Hasta ahora se ha considerado dos velocidades relacionadas con la propagación de ondas em:
 - Velocidad de la luz: $c = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \epsilon}}$
 - Velocidad de fase: $v_p = \frac{\omega}{\beta}$
- La diferencia entre ambas es que la velocidad de la luz coincide con la velocidad a la que una onda plana se propagaría en dicho medio mientras que la velocidad de fase es la velocidad a la que un frente de onda viaja. Para el caso de un modo TEM ambas coinciden.
- Concepto de dispersión:
 - Cuando la velocidad de fase y la atenuación no cambian con f la línea es no dispersiva.
 - Cuando la velocidad de fase es diferente a distintas frecuencias se dice que el medio es dispersivo.
- Si el ancho de banda de la señal es pequeño o la dispersión es baja, se puede acudir al concepto de velocidad de grupo que se puede definir como la velocidad a la que una onda modulada se propaga en un límite de variación frecuencial. Viene dada por: $v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)^{-1}$
- Particularizada para las guías de onda antes descritas tenemos:

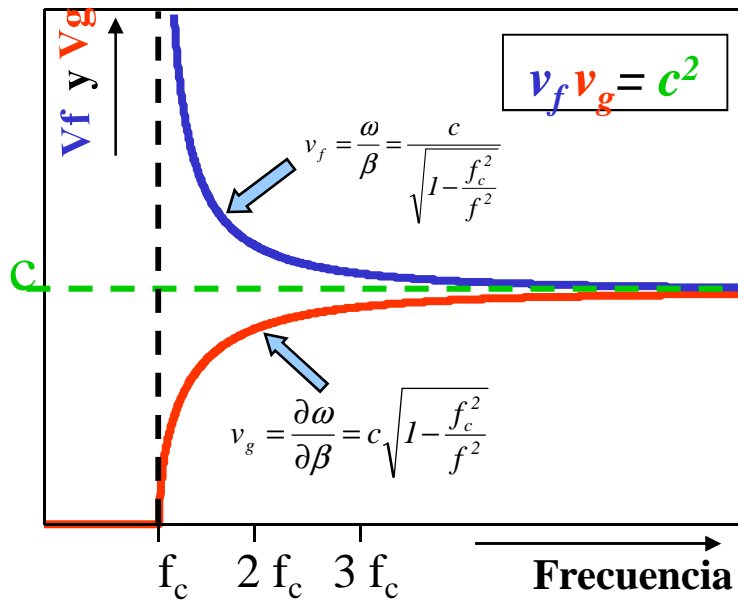
$$v_g = c \cdot \sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2}};$$

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2}}};$$



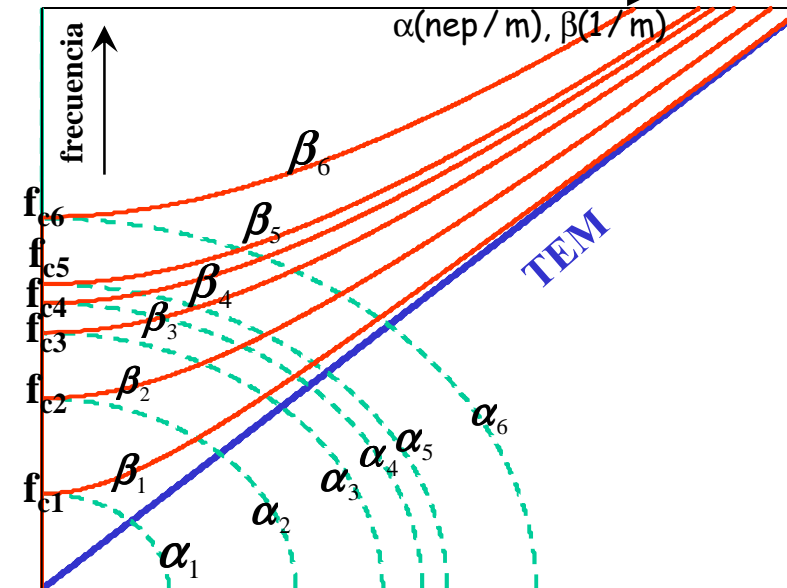
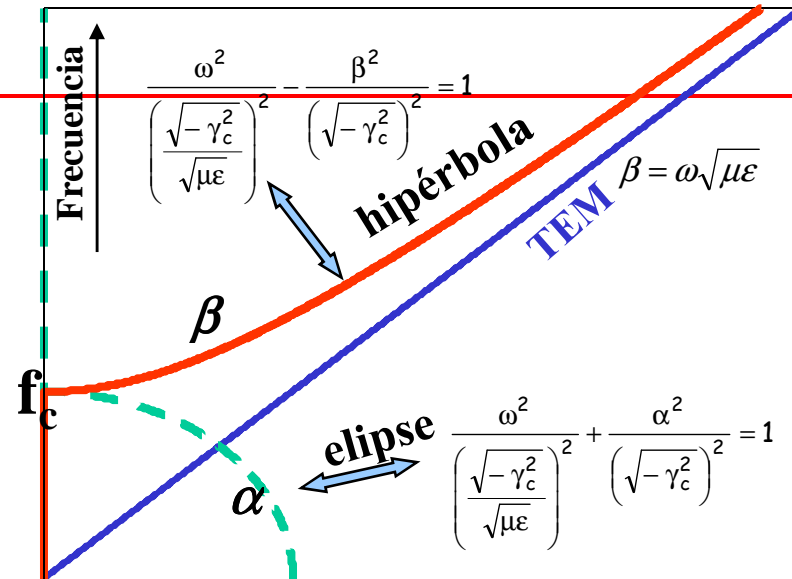
CARACTERÍSTICAS DE LOS MODOS PARA CONDICIONES DE CONDUCTOR PERFECTO (III)

Velocidades de fase y grupo para modos TE y TM



Transparencia tomada de referencia 6

Diagrama de Dispersión - Diagrama de Brillouin



CARACTERÍSTICAS DE LOS MODOS PARA CONDICIONES DE CONDUCTOR PERFECTO (IV)

- Conclusiones:
 - Si se traza una recta $\omega=cte$ se verán inmediatamente los modos que se propagan.
 - También se puede obtener la velocidad de fase, que depende de la frecuencia (dispersión) y es siempre mayor que la velocidad de la luz en el medio.
 - Si la frecuencia es menor que la frecuencia correspondiente al menor γ_c^2 no existe ningún modo que se propague constituyendo dicha f_c la frecuencia de corte absoluto.
 - El modo de menor f_c se denomina modo dominante y el resto modos superiores.
 - En los sistemas capaces de soportar modos TEM no existe frecuencia de corte absoluta
- Medio con pérdidas (se supone que no hay pérdidas magnéticas $\text{Im}(\mu)=0$):
 - La constante de propagación será: $\gamma(\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega)$
 - La permitividad se modifica como: $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$
 - Luego queda:

$$\gamma^2 = (\alpha + j\beta)^2 = \gamma_o^2 - \gamma_c^2 = -\omega^2 \cdot \mu(\epsilon' - j\epsilon'') - \gamma_c^2 \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha\beta = \omega^2 \cdot \mu\epsilon'' \\ \alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2 \cdot \mu\epsilon' - \gamma_c^2 \end{cases}$$
 - Frecuencia de corte: valor de f que hace $\alpha=\beta$

$$f_c = \frac{\sqrt{-\gamma_c^2}}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon'}} \quad \gamma = \gamma_o \cdot \sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2} \cdot \frac{\epsilon'}{\epsilon}}; Z_{TE} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2} \cdot \frac{\epsilon'}{\epsilon}}}; Z_{TM} = \eta \cdot \sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2} \cdot \frac{\epsilon'}{\epsilon}}$$



CARACTERÍSTICAS DE LOS MODOS PARA CONDICIONES DE CONDUCTOR PERFECTO (V)

- Las constantes de atenuación y fase quedan entonces:

$$\alpha_d = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[\left(-\omega^2 \cdot \mu\epsilon' - \gamma_c^2 \right) + \sqrt{\left(-\omega^2 \cdot \mu\epsilon' - \gamma_c^2 \right)^2 + \left(\omega^2 \cdot \mu\epsilon'' \right)^2} \right]}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[-\left(-\omega^2 \cdot \mu\epsilon' - \gamma_c^2 \right) + \sqrt{\left(-\omega^2 \cdot \mu\epsilon' - \gamma_c^2 \right)^2 + \left(\omega^2 \cdot \mu\epsilon'' \right)^2} \right]}$$

$\epsilon'' \ll \epsilon'$

- En el caso que las pérdidas dieléctricas sean pequeñas:
 - La constante de fase coincide con la obtenida despreciando las pérdidas
 - La constante de atenuación vale:

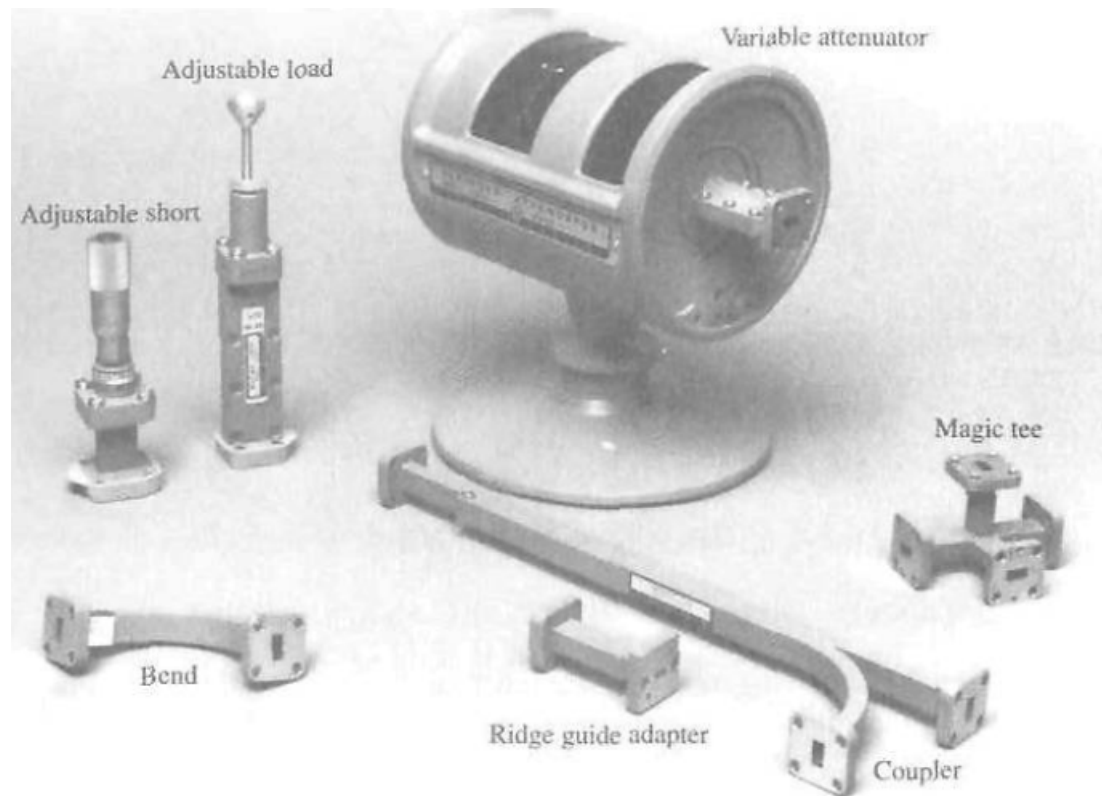
$$\alpha_d = \frac{\omega^2 \cdot \mu\epsilon'}{2\beta} \cdot \frac{\epsilon''}{\epsilon'} = \frac{\omega^2 \cdot \mu\epsilon'}{2\beta} \cdot \text{tg } \delta$$

- Para modos TEM, considerando $\epsilon'' \ll \epsilon'$ resulta:

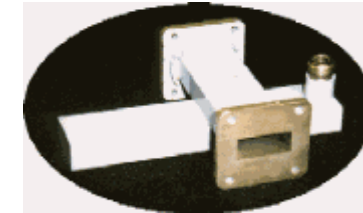
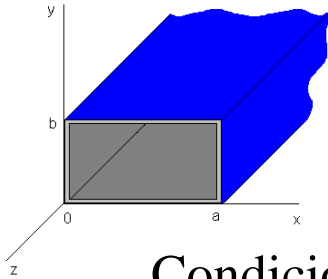
$$\alpha_d = \frac{\omega \cdot \sqrt{\mu\epsilon'}}{2} \cdot \frac{\epsilon''}{\epsilon'} = \frac{\omega \cdot \sqrt{\mu\epsilon'}}{2} \cdot \text{tg } \delta = \frac{k}{2} \cdot \text{tg } \delta$$



GUÍAS RECTANGULARES (I)



ESTUDIO DE LA GUÍA RECTANGULAR (II)



Condiciones de contorno para conductor perfecto

$$TE : \frac{\partial H_z}{\partial n} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0 \text{ en } x = 0, a \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 \text{ en } y = 0, b \end{cases}$$

$$F(x, y) = X(x)Y(y) \Rightarrow \begin{cases} Y \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - \gamma_c^2 XY = 0 \\ -k_x^2 - k_y^2 = \gamma_c^2 \end{cases}$$

$$TM : E_z = 0 \text{ en } x = 0, a; y = 0, b$$

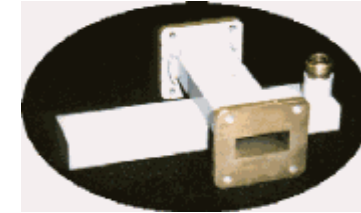
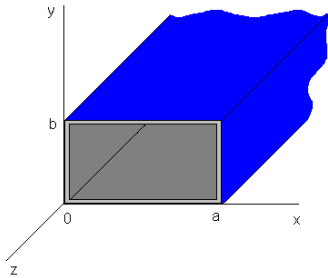
$$\gamma_{m,n} = \begin{cases} \sqrt{\gamma_0^2 - \gamma_c^2} \\ j \cdot \sqrt{k^2 - k_c^2} \end{cases} = \sqrt{-\omega^2 \mu \epsilon + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \Rightarrow f_c = \frac{1}{2\pi \sqrt{\mu \cdot \epsilon}} \cdot \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\mu \cdot \epsilon}} \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \Big|_{TE_{10}} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu \cdot \epsilon}}$$

Nomenclatura Pozar



ESTUDIO DE LA GUÍA RECTANGULAR (III)



Aplicando separación de variables y las condiciones de contorno para despejar las constantes, resulta:

$$\left. \begin{aligned} X(x, y) &= (A \sin k_x x + B \cos k_x x) \\ Y(x, y) &= (C \sin k_y y + D \cos k_y y) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} A = C = 0 \\ k_x = \frac{m\pi}{a}; k_y = \frac{n\pi}{b} \end{cases}$$

$$TE : \vec{H}_{z,mn} = \hat{z} \cdot P \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y \cdot \exp(-\gamma_{mn} z)$$

$$TM : \vec{E}_{z,mn} = \hat{z} \cdot Q \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \cdot \exp(-\gamma_{mn} z)$$



ESTUDIO DE LA GUÍA RECTANGULAR (IV): resumen

TABLE 3.2 Summary of Results for Rectangular Waveguide

Quantity	TE _{mn} Mode	TM _{mn} Mode
k	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$
k_c	$\sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$	$\sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$
β	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$
λ_c	$\frac{2\pi}{k_c}$	$\frac{2\pi}{k_c}$
λ_g	$\frac{2\pi}{\beta}$	$\frac{2\pi}{\beta}$
v_p	$\frac{\omega}{\beta}$	$\frac{\omega}{\beta}$
α_d	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$
E_z	0	$B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
H_z	$A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	0
E_x	$\frac{j\omega\mu n\pi}{k_c^2 b} A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	$-\frac{j\beta m\pi}{k_c^2 a} B_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
E_y	$-\frac{j\omega\mu m\pi}{k_c^2 a} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	$-\frac{j\beta n\pi}{k_c^2 b} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
H_x	$\frac{j\beta m\pi}{k_c^2 a} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	$\frac{j\omega\epsilon n\pi}{k_c^2 b} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
H_y	$\frac{j\beta n\pi}{k_c^2 b} A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	$-\frac{j\omega\epsilon m\pi}{k_c^2 a} B_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
Z	$Z_{TE} = \frac{k\eta}{\beta}$	$Z_{TM} = \frac{\beta\eta}{k}$

No válidos subíndices
00, 01 y 10 para los modos
TM. Primer modo TM₁₁



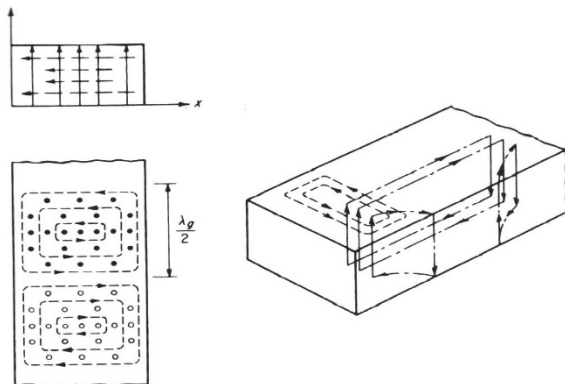
ESTUDIO DE LA GUÍA RECTANGULAR (V)

Modo dominante TE₁₀

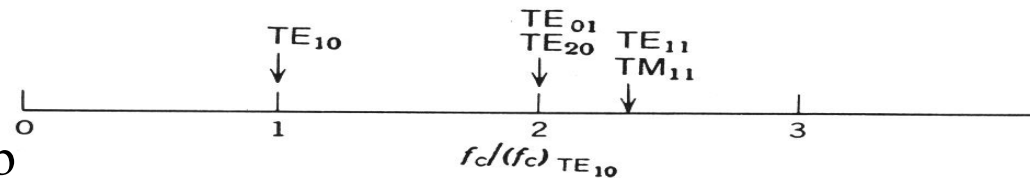
$$f_{c10} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\epsilon}} \Rightarrow \lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2}}} > \lambda_0$$

Banda X: a=22.86 mm, b=10.16mm

Distribución de campo



Ubicación de modos para el caso a=2b



$$E_{y,10} = -\frac{j\omega\mu a}{\pi} P \sin \frac{\pi}{a} x \cdot \exp(-\gamma_{10}z)$$

$$E_{x,10} = E_{z,10} = 0$$

$$H_{x,10} = \frac{\gamma a}{\pi} P \cdot \text{sen} \frac{\pi}{a} x \cdot \exp(-\gamma_{10}z)$$

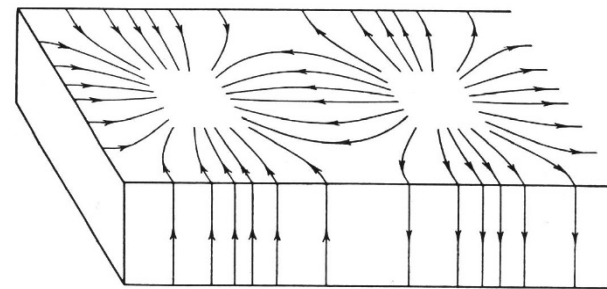
$$H_{y,10} = 0$$

$$H_{z,10} = P \cos \frac{\pi}{a} x \cdot \exp(-\gamma_{10}z)$$

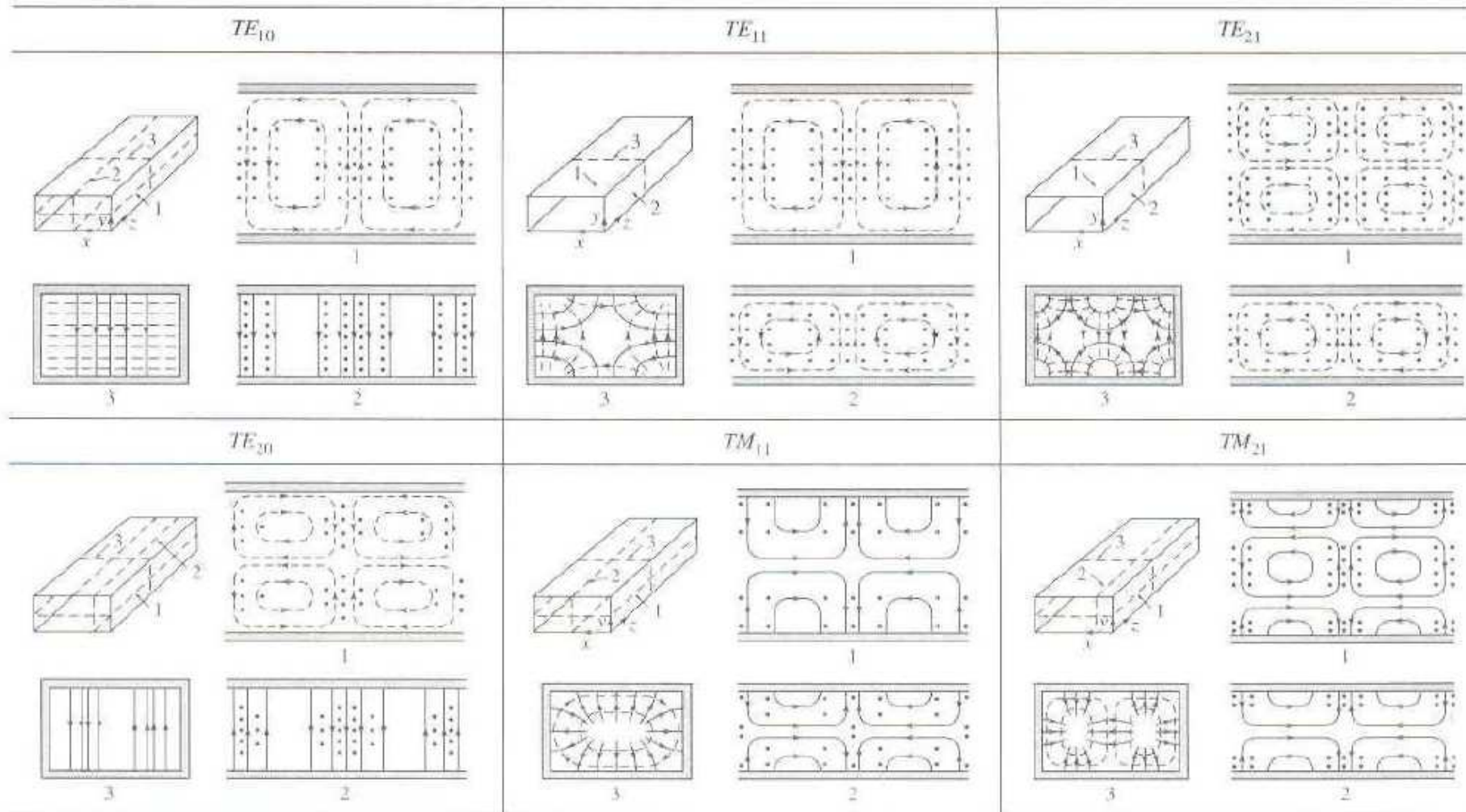
Distribución de corriente

La densidad de corriente superficial en las paredes metálicas puede ponerse como:

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}$$



ESTUDIO DE LA GUÍA RECTANGULAR (VI)



Tomado de referencia 4

Distribución de campos en la guía rectangular



ESTUDIO DE LA GUÍA RECTANGULAR (VII): guías rectangulares standard

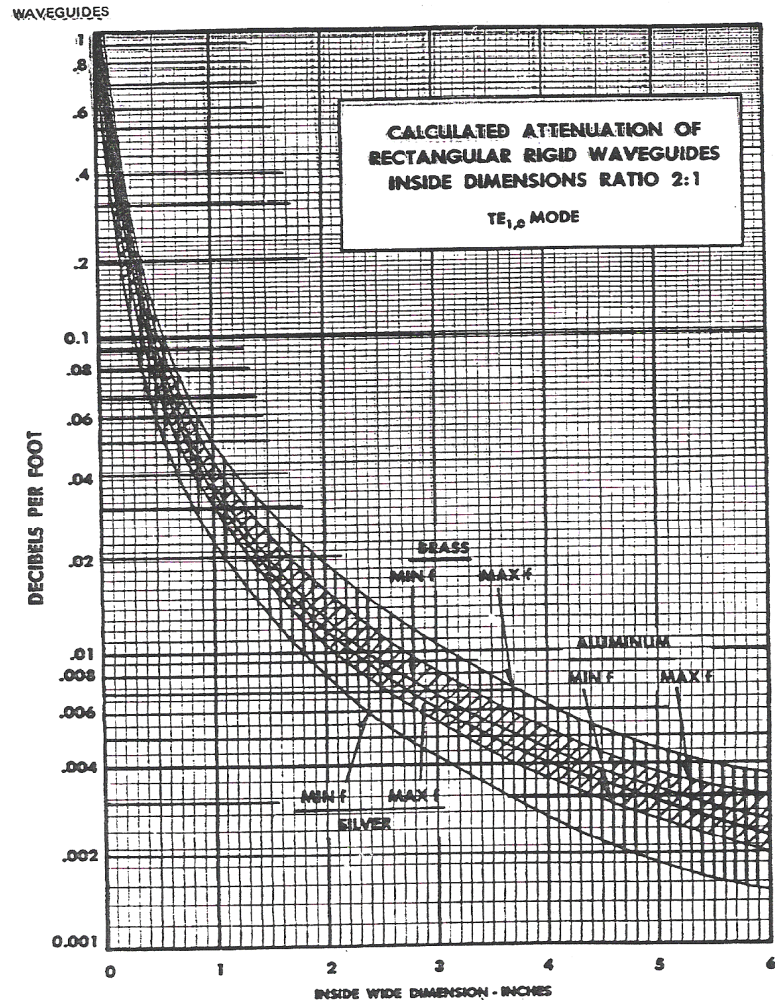
Band*	Recommended Frequency Range (GHz)	TE ₁₀ Cutoff Frequency (GHz)	EIA Designation WR-XX	Inside Dimensions Inches (cm)	Outside Dimensions Inches (cm)
L	1.12–1.70	0.908	WR-650	6.500×3.250 (16.51×8.255)	6.660×3.410 (16.916×8.661)
R	1.70–2.60	1.372	WR-430	4.300×2.150 (10.922×5.461)	4.460×2.310 (11.328×5.867)
S	2.60–3.95	2.078	WR-284	2.840×1.340 (7.214×3.404)	3.000×1.500 (7.620×3.810)
H (G)	3.95–5.85	3.152	WR-187	1.872×0.872 (4.755×2.215)	2.000×1.000 (5.080×2.540)
C (J)	5.85–8.20	4.301	WR-137	1.372×0.622 (3.485×1.580)	1.500×0.750 (3.810×1.905)
W (H)	7.05–10.0	5.259	WR-112	1.122×0.497 (2.850×1.262)	1.250×0.625 (3.175×1.587)
X	8.20–12.4	6.557	WR-90	0.900×0.400 (2.286×1.016)	1.000×0.500 (2.540×1.270)
Ku (P)	12.4–18.0	9.486	WR-62	0.622×0.311 (1.580×0.790)	0.702×0.391 (1.783×0.993)
K	18.0–26.5	14.047	WR-42	0.420×0.170 (1.07 ×0.43)	0.500×0.250 (1.27 ×0.635)
Ka (R)	26.5–40.0	21.081	WR-28	0.280×0.140 (0.711×0.356)	0.360×0.220 (0.914×0.559)
Q	33.0–50.5	26.342	WR-22	0.224×0.112 (0.57 ×0.28)	0.304×0.192 (0.772×0.488)
U	40.0–60.0	31.357	WR-19	0.188×0.094 (0.48 ×0.24)	0.268×0.174 (0.681×0.442)
V	50.0–75.0	39.863	WR-15	0.148×0.074 (0.38 ×0.19)	0.228×0.154 (0.579×0.391)
E	60.0–90.0	48.350	WR-12	0.122×0.061 (0.31 ×0.015)	0.202×0.141 (0.513×0.356)
W	75.0–110.0	59.010	WR-10	0.100×0.050 (0.254×0.127)	0.180×0.130 (0.458×0.330)
F	90.0–140.0	73.840	WR-8	0.080×0.040 (0.203×0.102)	0.160×0.120 (0.406×0.305)
D	110.0–170.0	90.854	WR-6	0.065×0.0325 (0.170×0.083)	0.145×0.1125 (0.368×0.2858)
G	140.0–220.0	115.750	WR-5	0.051×0.0255 (0.130×0.0648)	0.131×0.1055 (0.333×.2680)

Tomado de referencia 4

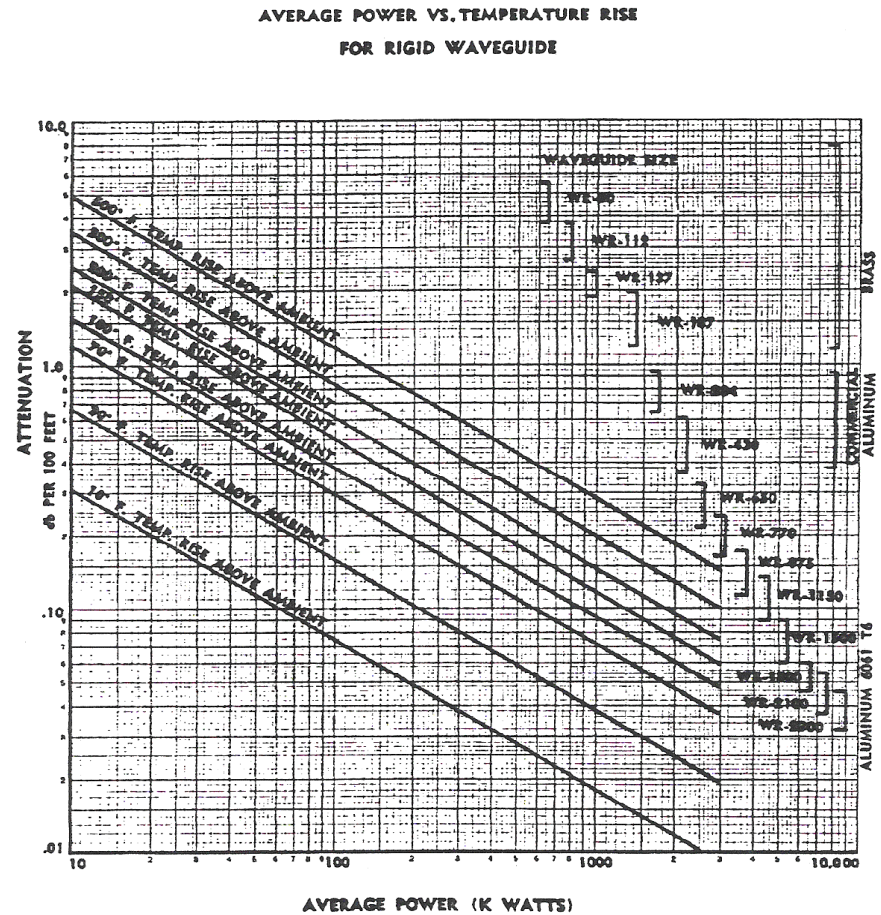
* Letters in parentheses denote alternative designations.



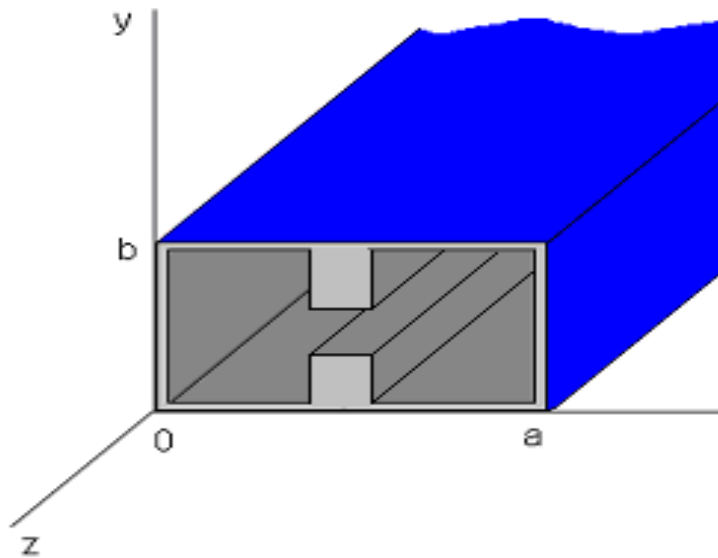
ESTUDIO DE LA GUÍA RECTANGULAR (VII)



Courtesy of Airtron, a Division of Litton Industries.



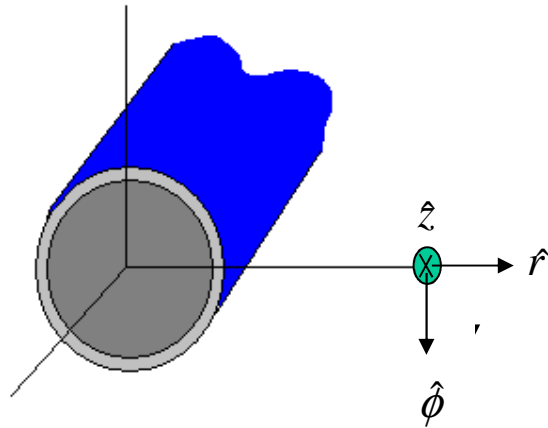
GUÍA ESTRANGULADA (REENTRANTE O RIDGED)



- Ancho de banda de la guía rectangular está limitado a una octava.
- Los “raíles” disminuyen la frecuencia de corte del fundamental.
- La capacidad de transmitir potencia decrece
- Posibilidad de adaptar impedancias



GUÍAS CIRCULARES (I)



Utilización de coordenadas cilíndricas.

Condiciones de contorno para conductor perfecto

$$TE: \left. \begin{array}{l} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} = 0 \\ \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \Big|_{\phi=0} = 0 \\ \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \Big|_{\phi=2\pi} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow F(\rho, \phi) = R(\rho) \cdot P(\phi)$$

$$TM: E_z \Big|_{\rho=a} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \cdot \frac{\partial F}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} - \gamma_c^2 F = 0 \\ \frac{\rho^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{\rho}{R} \cdot \frac{\partial R}{\partial \rho} - \gamma_c^2 \rho^2 = -\frac{1}{P} \frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{P} \frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2} = k_\phi^2 \\ \frac{\rho^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{\rho}{R} \cdot \frac{\partial R}{\partial \rho} - (\gamma_c^2 \rho^2 + k_\phi^2) \cdot R = 0 \end{array} \right.$$

Las soluciones de ambas ecuaciones son del tipo:

$$P(\phi) = A \sin(k_\phi \phi) + B \cos(k_\phi \phi)$$

Modos TE

$$R(\rho) = C J_n(\gamma_c \rho) + D Y_n(\gamma_c \rho)$$

Modos TM

$$F_H(\rho, \phi) = (A \sin(n\phi) + B \cos(n\phi)) J_n(\gamma_c \rho)$$

$$F_E(\rho, \phi) = (A \sin(n\phi) + B \cos(n\phi)) J_n(\gamma_c \rho)$$



GUÍAS CIRCULARES (II)

Modos TE

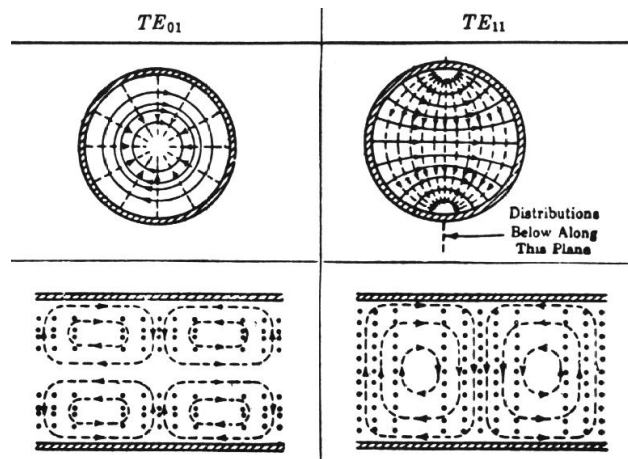
Modos TM

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} = 0 &\Rightarrow J'_n(\gamma_c \rho) = 0 \\ \gamma_{c,nm} = \frac{p'_{nm}}{a} &\Rightarrow \gamma = \sqrt{\gamma_0^2 - \left(\frac{p'_{nm}}{a}\right)^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f_{c,nm} = \frac{p'_{nm}}{2\pi a \sqrt{\mu\epsilon}}$$

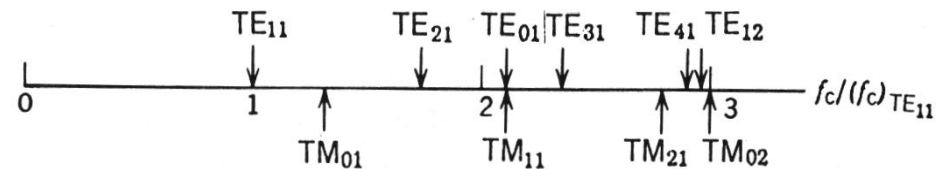
$$\left. \begin{aligned} E_z(a, \phi) = 0 &\Rightarrow J_n(k_c a) = 0 \\ \gamma_{nm} = \sqrt{\gamma_0^2 - k_c^2} &= \sqrt{\gamma_0^2 - \left(\frac{p_{nm}}{a}\right)^2} \end{aligned} \right\} f_{cmn} = \frac{p_{nm}}{2\pi a \sqrt{\mu\epsilon}}$$

n	p'_{n1}	p'_{n2}	p'_{n3}
0	3.832	7.016	10.174
1	1.841	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.970

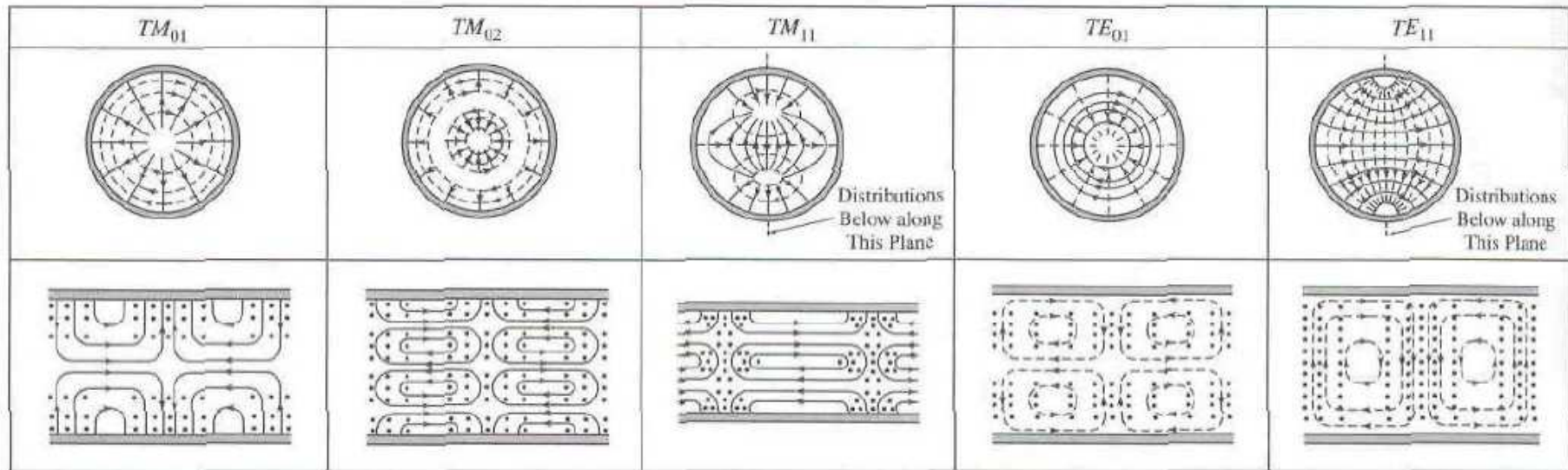
n	p_{n1}	p_{n2}	p_{n3}
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.174
2	5.135	8.417	11.620



Distribución de modos



GUÍAS CIRCULARES (III)



Distribución de campos en la guía circular

Tomado de referencia 4



GUÍAS CIRCULARES (IV): resumen de campos en la guía circular

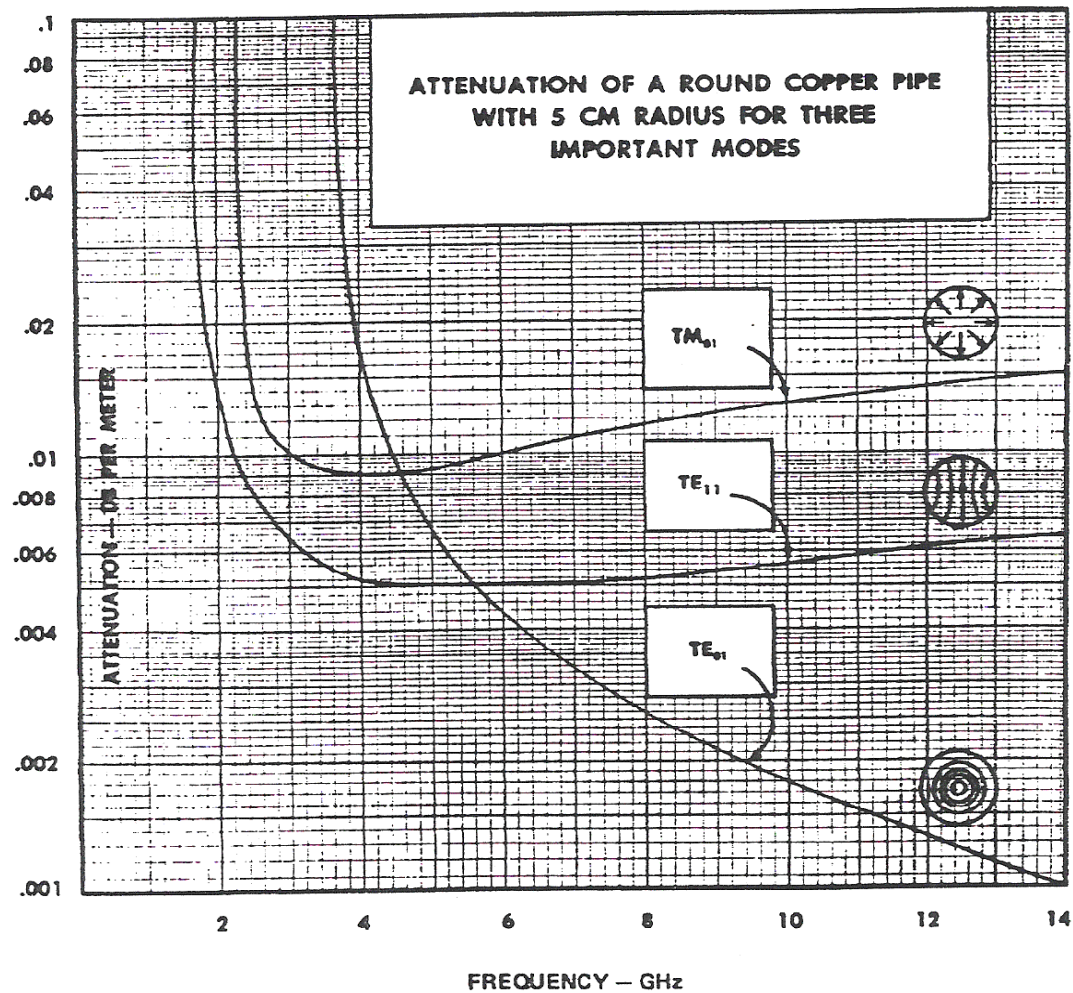
TABLE 3.5 Summary of Results for Circular Waveguide

Quantity	TE _{nm} Mode	TM _{nm} Mode
k	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$
k_c	$\frac{p'_{nm}}{a}$	$\frac{p_{nm}}{a}$
β	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$
λ_c	$\frac{2\pi}{k_c}$	$\frac{2\pi}{k_c}$
λ_g	$\frac{2\pi}{\beta}$	$\frac{2\pi}{\beta}$
v_p	$\frac{\omega}{\beta}$	$\frac{\omega}{\beta}$
α_d	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$
E_z	0	$(A \sin n\phi + B \cos n\phi)J_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$
H_z	$(A \sin n\phi + B \cos n\phi)J_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$	0
E_ρ	$\frac{-j\omega\mu n}{k_c^2\rho}(A \cos n\phi - B \sin n\phi)J_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\beta}{k_c}(A \sin n\phi + B \cos n\phi)J'_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$
E_ϕ	$\frac{j\omega\mu}{k_c}(A \sin n\phi + B \cos n\phi)J'_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\beta n}{k_c^2\rho}(A \cos n\phi - B \sin n\phi)J_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$
H_ρ	$\frac{-j\beta}{k_c}(A \sin n\phi + B \cos n\phi)J'_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$	$\frac{j\omega\epsilon n}{k_c^2\rho}(A \cos n\phi - B \sin n\phi)J_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$
H_ϕ	$\frac{-j\beta n}{k_c^2\rho}(A \cos n\phi - B \sin n\phi)J_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\omega\epsilon}{k_c}(A \sin n\phi + B \cos n\phi)J'_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$
Z	$Z_{TE} = \frac{k\eta}{\beta}$	$Z_{TM} = \frac{\beta\eta}{k}$

Tomado de referencia 4



GUÍAS CIRCULARES (V)

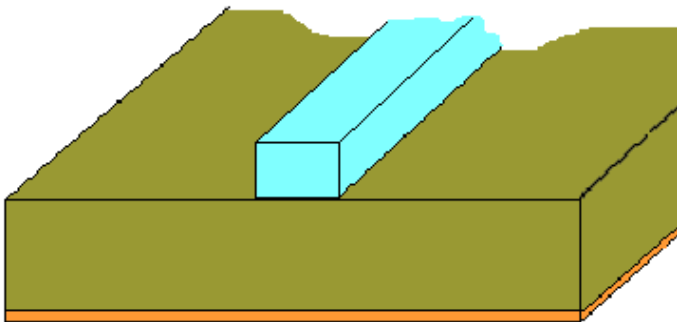


CONSIDERACIONES FINALES: potencia transmitida y ortogonalidad de modos

- Para modos TEM, la Z_{TEM} no es imaginaria pura luego los modos TEM siempre transmiten potencia.
- Los modos TE y TM tienen impedancia real si $f > f_c$, luego un modo al corte no transmite potencia mientras que un modo que se propaga sí transmite potencia
- Cuando el medio posee pérdidas hay un factor de atenuación: $\exp(-2\alpha z)$
 - La constante que aparecía en Hz es la potencia transmitida por el modo
 - Para una potencia (P) transmitida fija, la amplitud de campo decrece al aumentar frec.
 - Para P y f fijas la amplitud del campo crece al aumentar la altura de la guía
 - Dado que la amplitud del campo no debe superar la tensión de ruptura del medio, existe un límite superior de potencia transmitida.
- Los modos de distinta frecuencia de corte (no degenerados) son ortogonales entre sí y la potencia total es la suma de la transmitida por cada uno de ellos



GUÍA DIELECTRICA



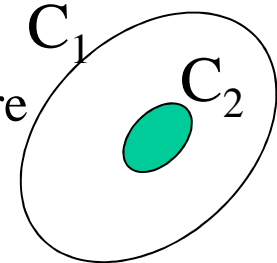
- Guía de permitividad ϵ_{r2} sobre dieléctrico de permitividad ϵ_{r1} . Todo sobre plancha Metálica.
- Los campos quedan confinados en el dieléctrico de mayor permitividad.
- Soporta modos TE y TM en la medida que toda la energía se concentre en el dieléctrico.
- Ventaja: poco peso, reducidas dimensiones
- Problema: grandes pérdidas en empalmes y en dobleces.



MODOS TEM

- Modos TEM:
- Las condiciones $\hat{n} \times \vec{E}_T \Big|_C = 0; \nabla_T \times \vec{F}_{E_T} = 0$ coinciden con el planteamiento de un problema estático.
- Los campos transversales coinciden con los campos estáticos entre conductores

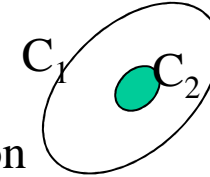
$$\left. \begin{array}{l} \vec{F}_{E_T} = -\nabla_T \Phi(x, y) \\ \nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \epsilon \vec{E} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta_T \Phi(x, y) = 0 \\ \Phi(x, y) \Big|_C = cte \end{array} \right.$$
- El campo TEM coincide con la solución de electrostática $\Delta_T \Phi(x, y) = 0$
- En una región limitada por un recinto simplemente conexo no puede haber modos TEM
- En una región múltiplemente conexa: $V_{12} = \Phi_1 - \Phi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$
- El número de modos TEM independientes es el número de partes de la frontera menos 1.
- La corriente que fluye viene dada por la ley de Ampere $I = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l}$
- En cada punto de la línea se puede definir unívocamente un voltaje y una corriente



CONCEPTO DE LÍNEA DE TRANSMISIÓN

- Dos características importantes como sistemas de transmisión:

- Capacidad de propagarse a cualquier frecuencia
- Constancia de velocidad de fase lo que supone ausencia de dispersión



- Retomando la expresión $V_{12} = \Phi_1 - \Phi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(z) = V_o \exp(-\gamma \cdot z)$
 - V_o no depende de los puntos elegidos
 - La magnitud $V(z)$ define de forma unívoca el potencial entre los dos conductores de cualquier sección recta del sistema
- Ambos conductores están recorridos por corrientes iguales en sentido contrario

$$I = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 = \oint_{C_1} \vec{J}_{S1} \cdot d\vec{l} + \oint_{C_2} \vec{J}_{S2} \cdot d\vec{l}$$

$$I(z) = I_o \cdot \exp(-\gamma \cdot z)$$



CONCEPTO DE LÍNEA DE TRANSMISIÓN (II)

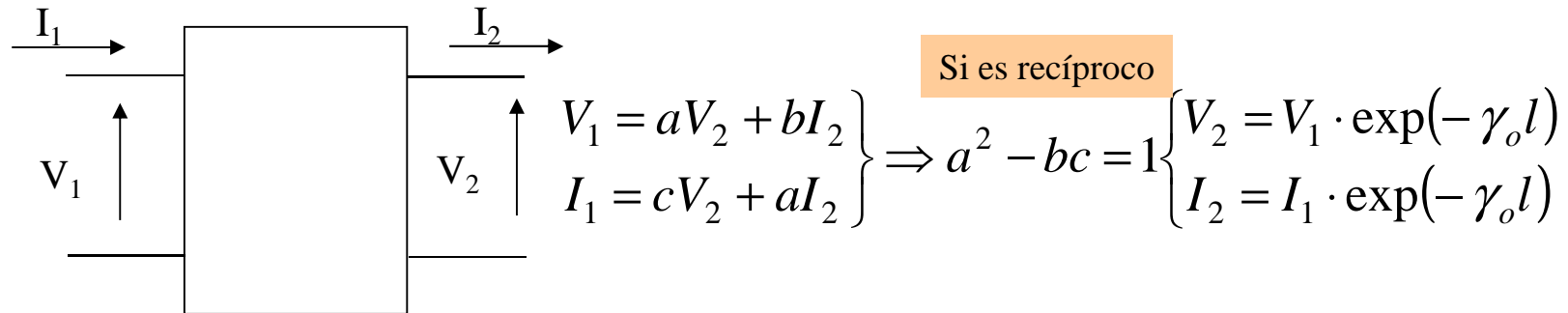
- Se puede definir una impedancia característica
 - η depende del medio
 - k depende de la geometría de la línea
 - Resultado independiente de z
- El concepto de línea de transmisión se asocia a cualquier sistema transmitiendo un modo TEM.
- Permite introducir los sistemas funcionando como circuitos con las constantes R, G, L y C cuando las dimensiones transversales sean pequeñas.

$$Z_o = \frac{V}{I} = \frac{\int_2 \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l}} = \eta \cdot cte$$



CONCEPTO DE LÍNEA DE TRANSMISIÓN (III)

- Consideremos un cuadripolo simétrico ($a=d$)



- Introduciendo las ecuaciones de propagación en las del cuadripolo

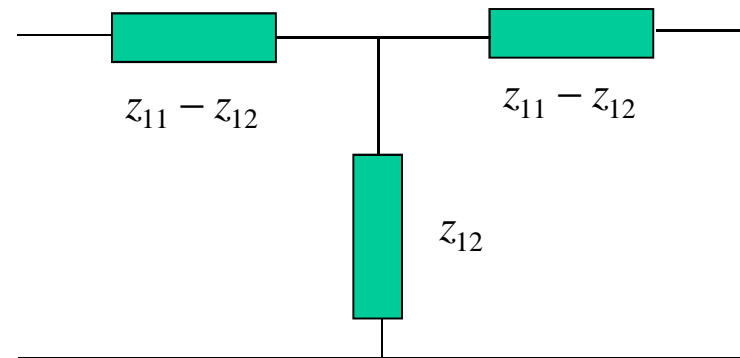
$$\begin{cases} \exp(\gamma_0 l) = \sqrt{a^2 + \sqrt{bc}} \\ \exp(-\gamma_0 l) = \sqrt{a^2 - \sqrt{bc}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = Z_o \sinh(\gamma_0 l) \\ c = \frac{\sinh(\gamma_0 l)}{Z_o} \\ a = \cosh(\gamma_0 l) \end{cases}$$

- Formando la red en T:

$$z_{11} = \frac{a}{c}$$

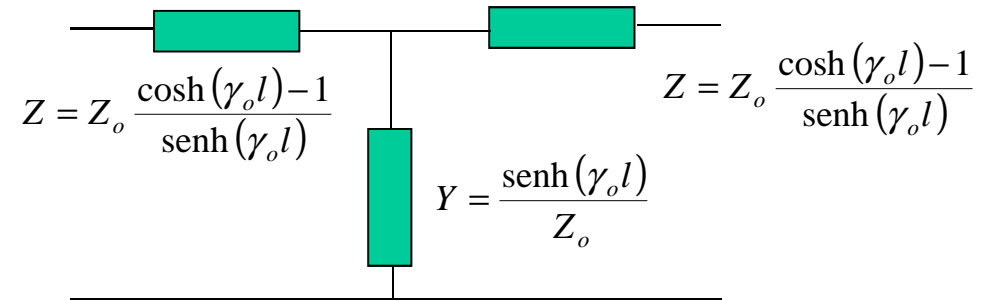
$$z_{12} \Big|_{a^2 - bc = 1} = z_{21} = \frac{1}{c}$$

$$z_{22} = \frac{a}{c}$$

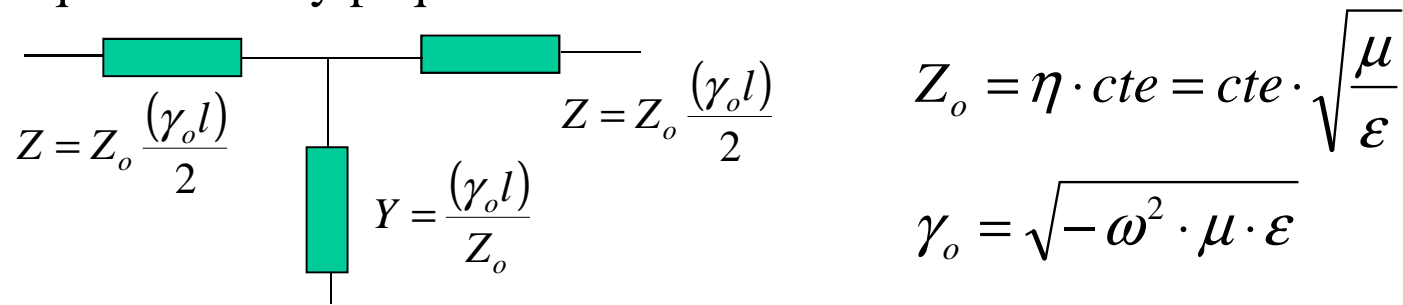


CONCEPTO DE LÍNEA DE TRANSMISIÓN (IV)

- Introduciendo los valores:



- En el caso en que l sea muy pequeña:



$$Z_o = \eta \cdot cte = cte \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$\gamma_o = \sqrt{-\omega^2 \cdot \mu \cdot \epsilon}$$

Carácter inductivo ← $Z = j\omega\mu \cdot k \cdot \frac{l}{2}$

Capacidad más conductancia ←

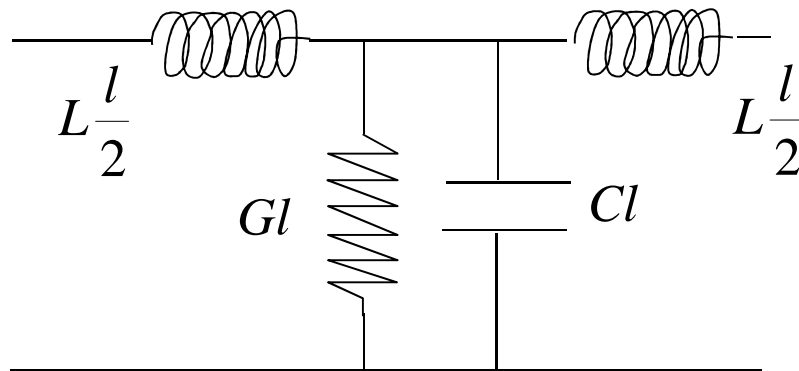
$$Y = \left(\frac{\omega\epsilon''}{k} + j\omega \cdot \frac{\epsilon'}{k} \right) \cdot l$$

$$\left. \begin{array}{l} Z = j\omega\mu \cdot k \cdot \frac{l}{2} \\ Y = \left(\frac{\omega\epsilon''}{k} + j\omega \cdot \frac{\epsilon'}{k} \right) \cdot l \end{array} \right\} \epsilon = \epsilon' - j\epsilon'' = \epsilon' \cdot (1 - j \operatorname{tg} \delta)$$



CONCEPTO DE LÍNEA DE TRANSMISIÓN (V)

- El circuito equivalente (en ausencia de pérdidas en conductores) queda:



$$\left. \begin{aligned} L &= \mu \cdot \frac{Z_o}{\eta} \\ G &= \frac{\omega \epsilon'' \eta}{Z_o} = \omega \cdot C \cdot \tan \delta \\ C &= \epsilon' \cdot \frac{\eta}{Z_o} \end{aligned} \right\}$$

$$Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

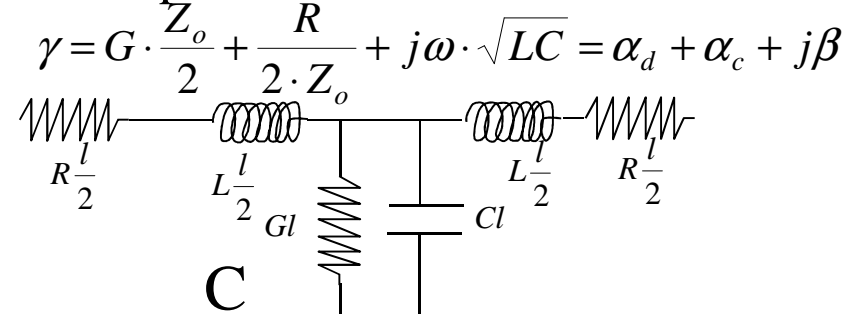
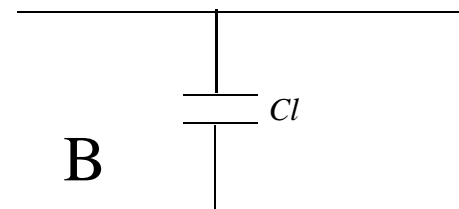
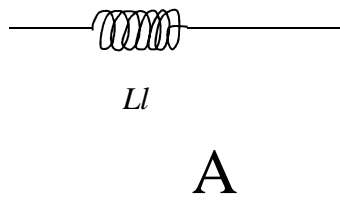
$$\gamma_o = G \cdot \frac{Z_o}{2} + j\omega \cdot \sqrt{LC}$$

Expresiones sin pérdidas en los conductores y con bajas pérdidas en el dieléctrico

- Simplificaciones adicionales:

- A: Líneas de muy alta impedancia: carácter inductivo
- B: Líneas de muy baja impedancia: carácter capacitivo
- C: Pérdidas en los conductores

$$Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}}$$



ECUACIONES DE PROPAGACIÓN EN UNA LÍNEA

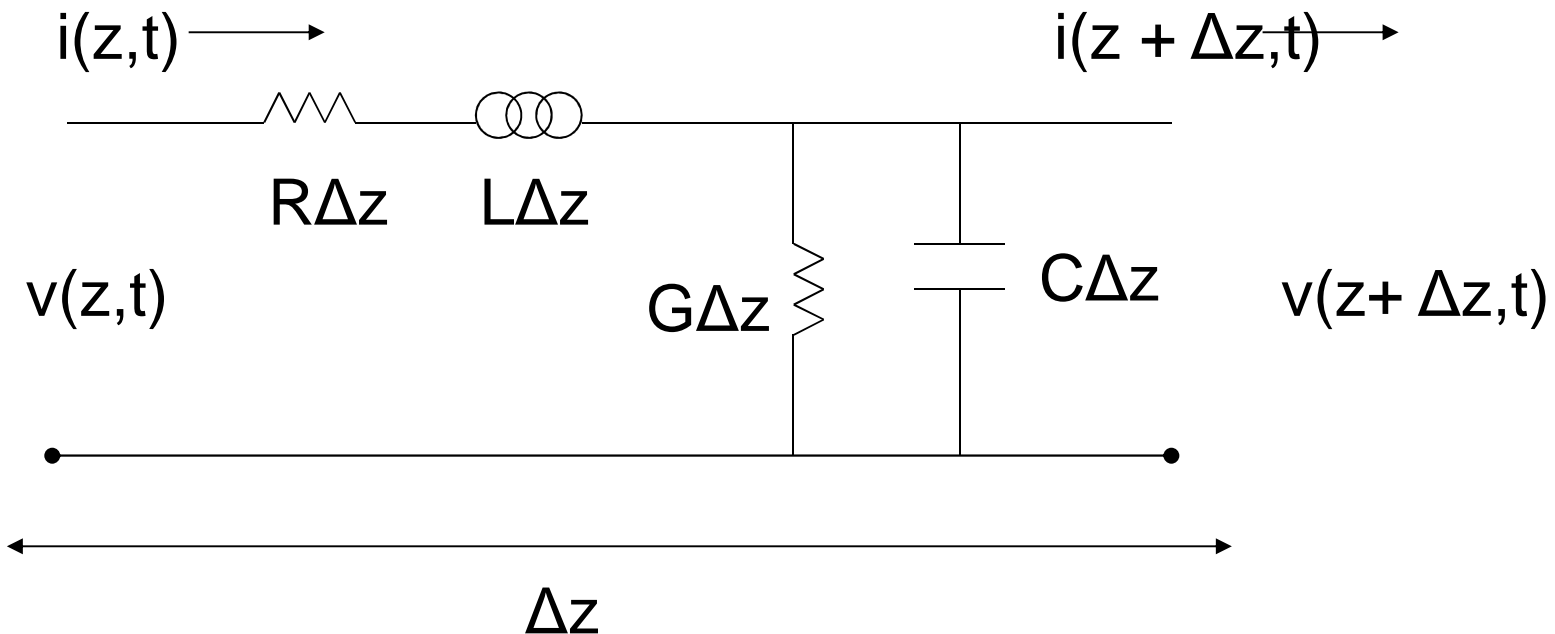
Dada una línea de transmisión:



Se puede obtener un modelo circuital equivalente de la misma



ECUACIONES DE PROPAGACIÓN EN UNA LÍNEA



R = resistencia en serie por unidad de longitud, Ω/m

L = inductancia en serie por unidad de longitud, H/m

G = conductancia en paralelo por unidad de longitud, S/m

C = capacidad por unidad de longitud, F/m



Ecuación del telegrafista

Por las leyes de Kirchhoff:

$$v(z, t) - R\Delta z \cdot i(z, t) - L \cdot \Delta z \cdot \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} - v(z + \Delta z, t) = 0$$

$$i(z, t) - G\Delta z \cdot v(z + \Delta z, t) - C\Delta z \frac{\partial v(z + \Delta z, t)}{\partial t} - i(z + \Delta z, t) = 0$$

 $\Delta z \rightarrow 0$

$$\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = -R \cdot i(z, t) - L \cdot \frac{\partial i(z, t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = -G \cdot v(z, t) - C \cdot \frac{\partial v(z, t)}{\partial t}$$

Aplicación de la T. Fourier



ECUACIONES DE PROPAGACIÓN EN UNA LÍNEA

$$\frac{dV(z)}{dz} = -(R + j\omega L) \cdot I(z)$$
$$\frac{dI(z)}{dz} = -(G + j\omega C) \cdot V(z)$$

Similitud con las ecuaciones de



$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} - \gamma^2 V(z) = 0$$

$$\frac{d^2I(z)}{dz^2} - \gamma^2 I(z) = 0$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C)}$$

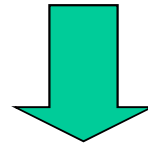
CONSTANTE DE PROPAGACIÓN



ECUACIONES DE PROPAGACIÓN EN UNA LÍNEA

$$V(z) = V_o^+ \cdot e^{-\gamma z} + V_o^- \cdot e^{\gamma z}$$

$$I(z) = I_o^+ \cdot e^{-\gamma z} + I_o^- \cdot e^{\gamma z}$$



$$I(z) = \frac{1}{Z_o} [V_o^+ \cdot e^{-\gamma z} - V_o^- \cdot e^{\gamma z}] = \frac{\gamma}{R + j\omega L} [V_o^+ \cdot e^{-\gamma z} - V_o^- \cdot e^{\gamma z}]$$

$$\frac{V_o^+}{I_o^+} = Z_o = -\frac{V_o^-}{I_o^-}$$

$$Z_o = \frac{R + j\omega L}{\gamma} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad I(z) = \frac{V_o^+ \cdot e^{-\gamma z} - V_o^- \cdot e^{\gamma z}}{Z_o}$$



ECUACIONES DE PROPAGACIÓN EN UNA LÍNEA (dominio temporal)

$$v(z, t) = |V_o^+| \cdot \cos(\omega t - \beta z + \phi^+) \cdot e^{-\alpha z} + \\ |V_o^-| \cdot \cos(\omega t + \beta z + \phi^-) \cdot e^{\alpha z}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad v_p = \frac{\omega}{\beta} = \lambda \cdot f$$



Línea sin pérdidas

$$\left. \begin{aligned} \gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{LC} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \beta &= \omega\sqrt{LC} & Z_o &= \sqrt{\frac{L}{C}} \\ \alpha &= 0 \end{aligned}$$

$$V(z) = V_o^+ \cdot e^{-\beta z} + V_o^- \cdot e^{\beta z}$$

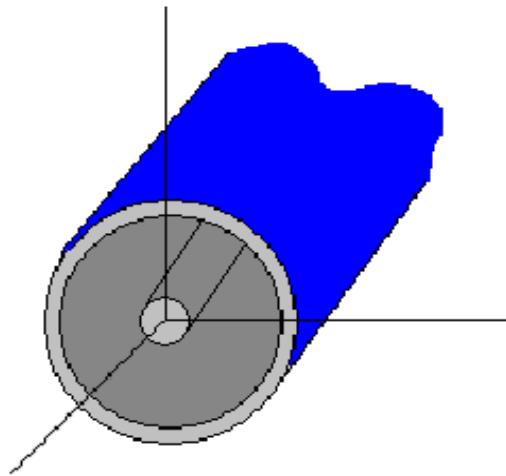
$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{LC}}$$

$$I(z) = \frac{V_o^+}{Z_o} \cdot e^{-\beta z} - \frac{V_o^-}{Z_o} \cdot e^{\beta z}$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



LÍNEA COAXIAL (I)



- Dos formas de resolución: a partir del problema electrostático o a partir de la ecuación de Helmholtz.

- Problema electrostático:

$$C = \frac{2\pi\epsilon'}{\ln \frac{b}{a}} = \frac{\epsilon'}{K} \Rightarrow K = \frac{\ln \frac{b}{a}}{2\pi} \Rightarrow Z_0 = \eta \cdot K = \frac{\eta}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \Rightarrow \begin{cases} G = \frac{\omega\epsilon''}{K} = \frac{\omega 2\pi\epsilon''}{\ln \frac{b}{a}} \\ L = \mu K = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \end{cases}$$

- El cable coaxial es capaz de soportar modos superiores TE o TM



LÍNEA COAXIAL (II)

- Es necesario conocer los valores de la función potencial $\Phi(\rho, \phi)$
- Ecuaciones a considerar:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi(\rho, \phi)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi(\rho, \phi)}{\partial \phi^2} = 0$$

$$\Phi(\rho, \phi) = R(\rho)P(\phi)$$

$$\frac{\rho}{R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) = \frac{-1}{P} \frac{d^2 P}{d\phi^2}$$

$$\frac{d^2 P}{d\phi^2} + k_\phi^2 P = 0 \quad \frac{\rho}{R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - k_\phi^2 = 0$$

- Soluciones:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) = 0 \Rightarrow \Phi(\rho, \phi) = \frac{V_0 \ln b / \rho}{\ln b / a}$$

$$P(\phi) = A \sin(k_\phi \phi) + B \cos(k_\phi \phi)$$



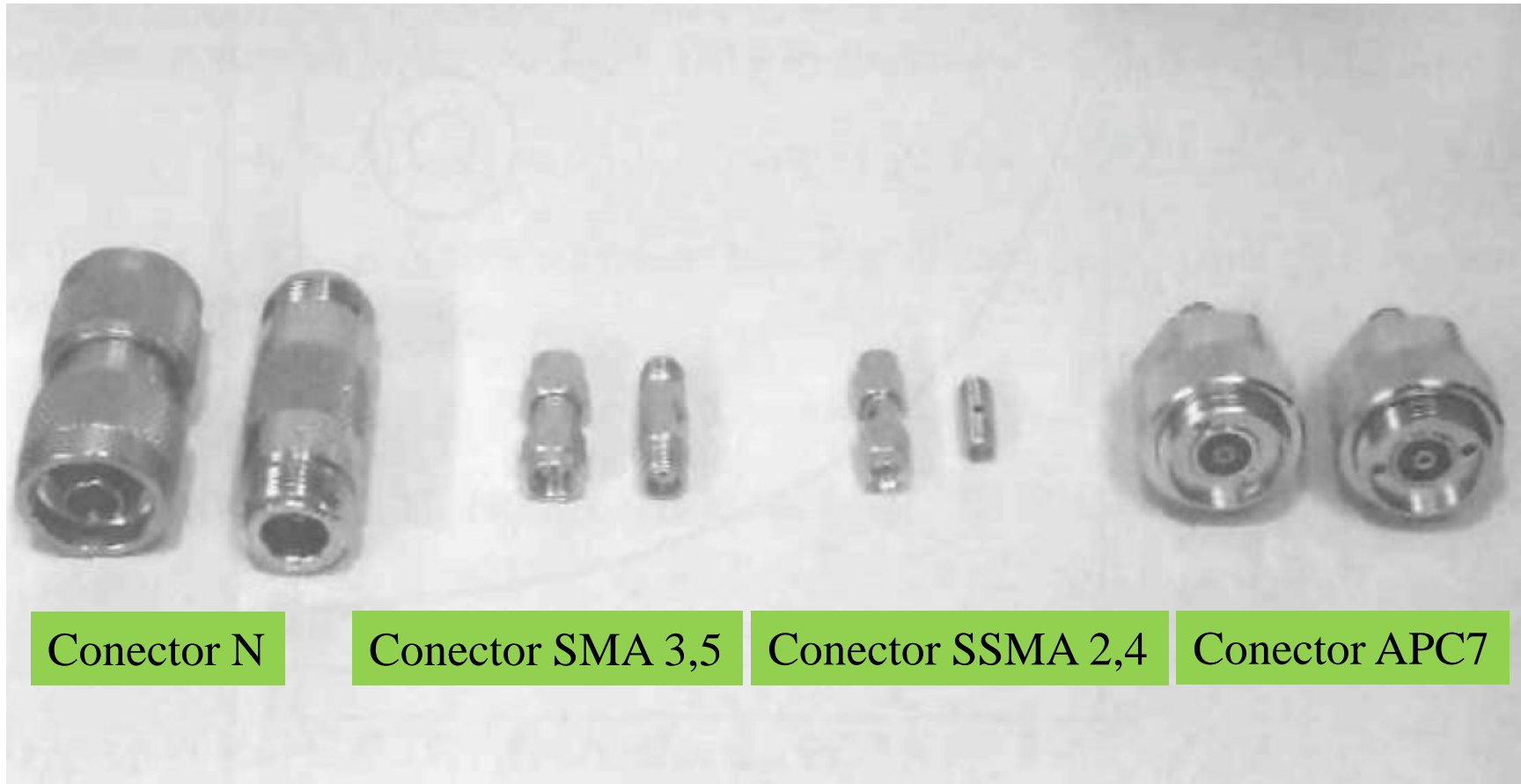
$$\bar{e}(\rho, \phi) = -\nabla_t \Phi(\rho, \phi) = \frac{V_0}{\rho \ln b / a} \hat{\rho}$$

$$\bar{h}(\rho, \phi) = \frac{1}{Z_{TEM}} \hat{z} \times \bar{e}(\rho, \phi) = \frac{I_0}{2\pi\rho} \hat{\phi}$$

$$Z_0 = \frac{V_0}{I_0} = \frac{\eta \ln b / a}{2\pi}$$



CONECTORES COAXIALES EN MICROONDAS



Conector N

Conector SMA 3,5

Conector SSMA 2,4

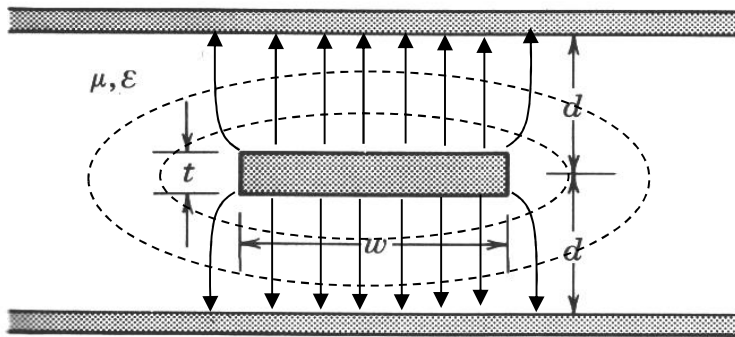
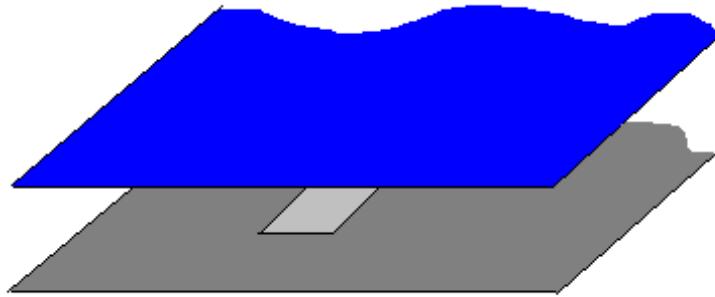
Conector APC7

TECNOLOGÍAS PLANAS

- Características:
 - Coste económico. Chapa barata y proceso de fabricación sencillo mediante fotograbado.
 - Reducido peso que los hace ligeros.
 - Dimensiones reducidas
 - Permiten la integración de circuitos MIC (Microwave integrated circuits) y MMIC (Monolithic Microwave Integrated Circuits)
 - Están formados por materiales metálicos y dieléctricos.
- Opciones tecnológicas:
 - Línea stripline (triplaca)
 - Línea microstrip
 - Línea coplanar
 - Línea de ranura



LÍNEA STRIPLINE (TRIPLACA): INTRODUCCIÓN



- Se puede considerar derivada de la coaxial.
- Proceso de construcción: superposición de placas
- Recinto doblemente conexo: modos TEM
- También soporta modos TE y TM que conviene eliminar
 - Tornillos entre los planos de masa
 - Separación entre planos menor de $\lambda/4$
- Análisis:
 - Expresiones semiempíricas
 - Ábacos y curvas
 - Aproximación electrostática.
- Formulación:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{2\pi \cdot f}{2\pi/\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{v_p}{f} \quad \beta = \frac{\omega}{v_p} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r} = \gamma_0 \sqrt{\epsilon_r} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \frac{1}{v_p C}$$



LÍNEA STRIPLINE: FORMULACIÓN

Impedancia característica ($b=2d$) $Z_0 = \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{b}{W_e + 0.441b} \quad \frac{W_e}{b} = \frac{W}{b} - \begin{cases} 0 & \text{for } \frac{W}{b} > 0.35 \\ (0.35 - W/b)^2 & \text{for } \frac{W}{b} < 0.35 \end{cases}$

Anchura de la línea $\frac{W}{b} = \begin{cases} x & \text{for } \sqrt{\epsilon_r} Z_0 < 120 \\ 0.85 - \sqrt{0.6 - x} & \text{for } \sqrt{\epsilon_r} Z_0 > 120 \end{cases} \quad x = \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_r} Z_0} - 0.441$

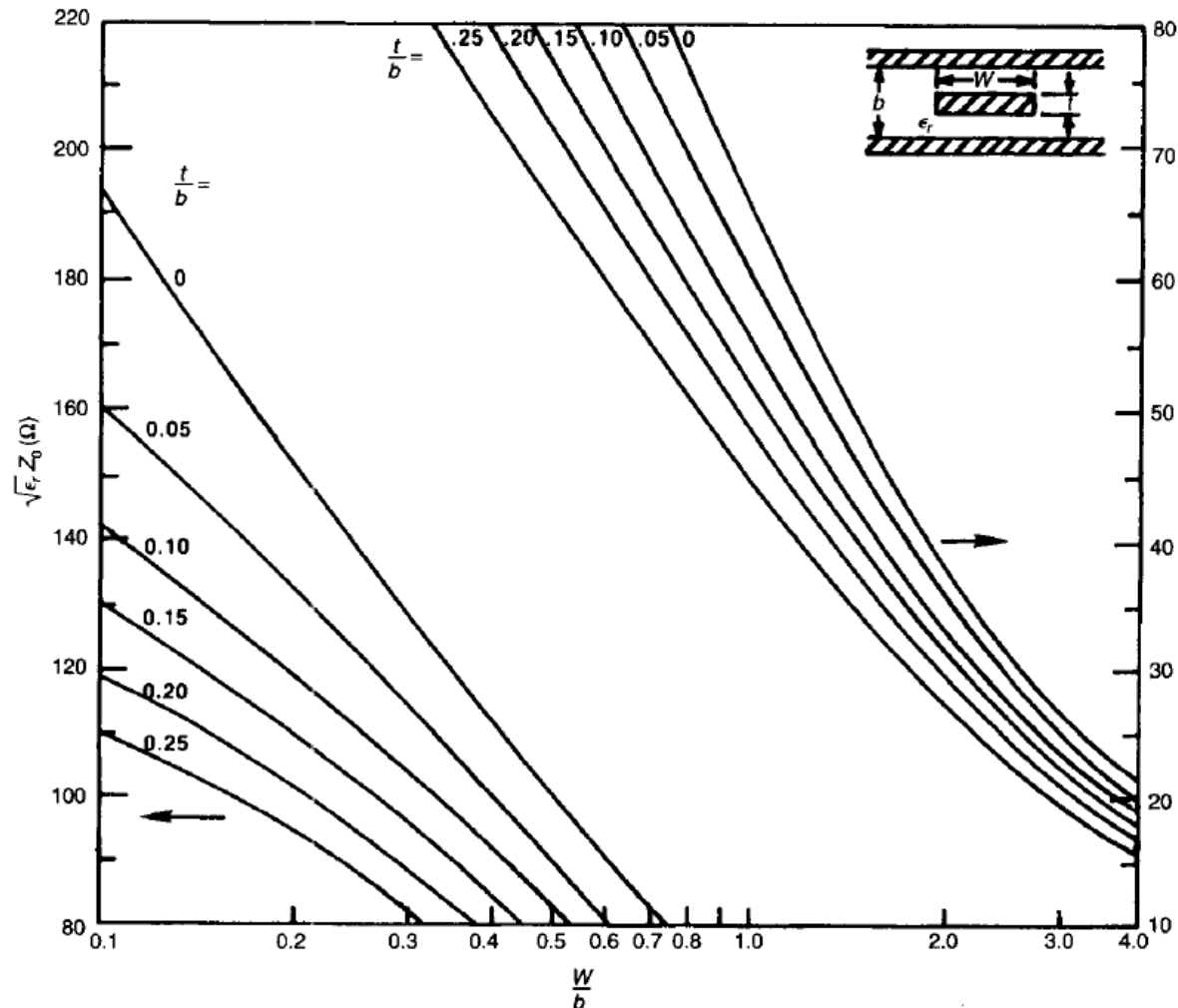
Atenuación en los conductores $\alpha_c = \begin{cases} \frac{2.7 \cdot 10^{-3} \cdot R_s \epsilon_r Z_0}{30\pi(b-t)} A & \text{para } \sqrt{\epsilon_r} Z_0 < 120 \\ \frac{0.16 R_s}{Z_0 b} B & \text{para } \sqrt{\epsilon_r} Z_0 > 120 \end{cases} \quad \text{Np/m}$

$$A = 1 + \frac{2W}{(b-t)} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(b+t)}{(b-t)} \ln \frac{(2b-t)}{t}$$

$$B = 1 + \frac{b}{(0.5W + 0.7t)} \cdot \left(0.5 + \frac{0.414t}{W} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{4\pi W}{t} \right)$$



LÍNEA STRIPLINE: ÁBACOS

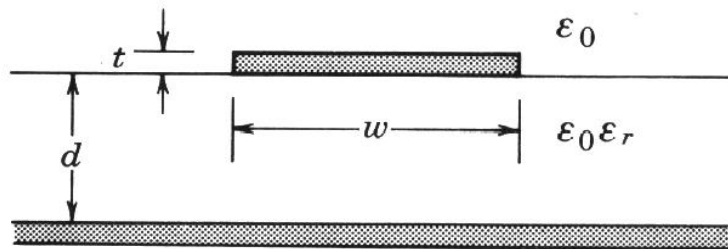
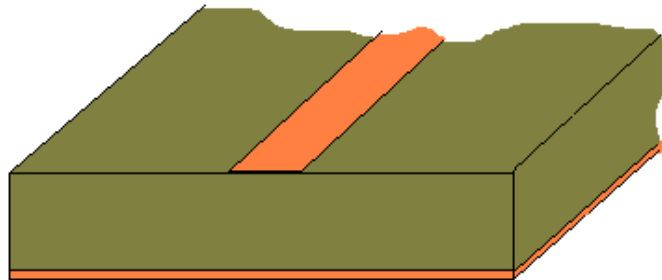


Tomado de referencia 5

Impedancia característica de la línea triplaca en función de sus parámetros: anchura (W), grosor (b) y espesor de metal (t)



LÍNEA MICROSTRIP: INTRODUCCIÓN



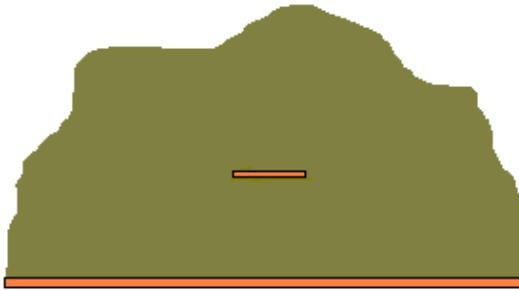
$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_e}}$$

$$\beta = \frac{\omega}{v_p} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_e} = k_0 \sqrt{\epsilon_e}$$

- Proceso de construcción: placa fotograbada
- Recinto NO doblemente conexo*: no soporta modos TEM sino cuasi TEM que son una superposición híbrida de modos TE y TM que conviene eliminar.
- Aplicaciones:
 - Estructuras de transmisión: pocos campos desbordados, altas permitividades, bajos espesores.
 - Estructuras radiantes: gran campo desbordado bajas permitividades, espesores grandes.
- Análisis:
 - Expresiones semiempíricas
 - Ábacos y curvas
 - * Recinto simplemente conexo es aquel en el que se puede ir desde cualquier punto del recinto a otro por cualquier línea sin salirse del recinto



LÍNEA MICROSTRIP (II)



$$1 < \epsilon_e < \epsilon_r$$

Concepto de permitividad efectiva

$$\epsilon_e = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + 12d/W}}$$

Modelo con medio homogéneo de permitividad efectiva ϵ_e

Impedancia característica

$$Z_0 = \begin{cases} \frac{60}{\sqrt{\epsilon_e}} \ln\left(\frac{8d}{W} + \frac{W}{4d}\right) & \text{for } W/d \leq 1 \\ \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_e} [W/d + 1.393 + 0.667 \ln(W/d + 1.444)]} & \text{for } W/d \geq 1 \end{cases}$$

Anchura de línea

$$\frac{W}{d} = \begin{cases} \frac{8e^A}{e^{2A} - 2} & \text{for } W/d < 2 \\ \frac{2}{\pi} \left[B - 1 - \ln(2B - 1) + \frac{\epsilon_r - 1}{2\epsilon_r} \left\{ \ln(B - 1) + 0.39 - \frac{0.61}{\epsilon_r} \right\} \right] & \text{for } W/d > 2 \end{cases}$$

$$A = \frac{Z_0}{60} \sqrt{\frac{\epsilon_r + 1}{2}} + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \left(0.23 + \frac{0.11}{\epsilon_r} \right)$$

$$B = \frac{377\pi}{2Z_0\sqrt{\epsilon_r}}$$

Atenuación

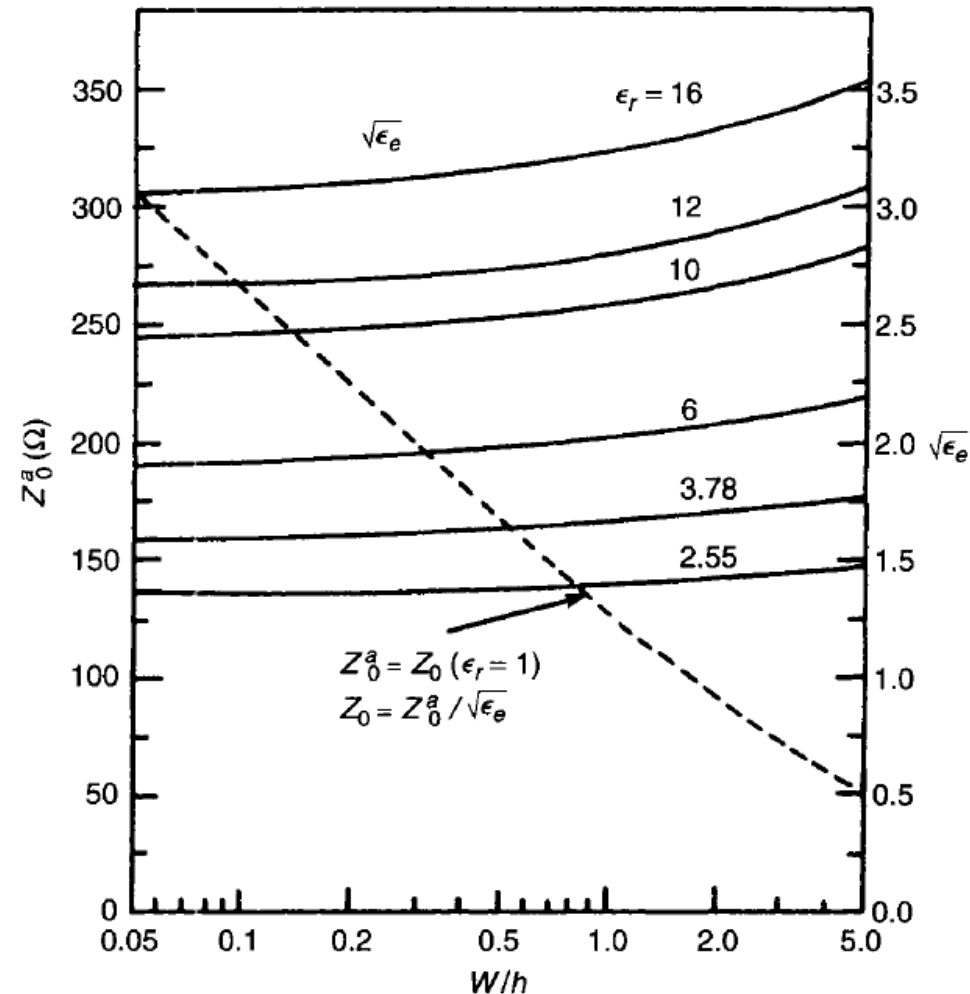
$$\alpha_d = \frac{k \tan \delta}{2} \frac{\epsilon_r (\epsilon_e - 1)}{\epsilon_e (\epsilon_r - 1)} = \frac{k_0 \tan \delta}{2} \frac{\epsilon_r (\epsilon_e - 1)}{\sqrt{\epsilon_e} (\epsilon_r - 1)} \text{ Np/m}$$

$$\alpha_c = \frac{R_s}{Z_0 W} \text{ Np/m}$$

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}}$$



LÍNEA MICROSTRIP (III)



Tomado de referencia 5

Impedancia característica y permitividad efectiva de la línea microstrip en función de sus parámetros: anchura (W), altura de substrato (h)



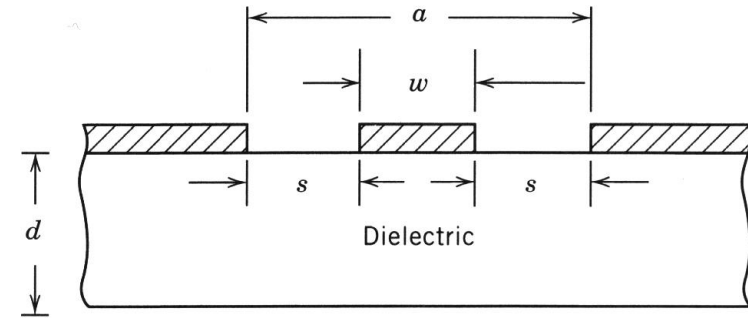
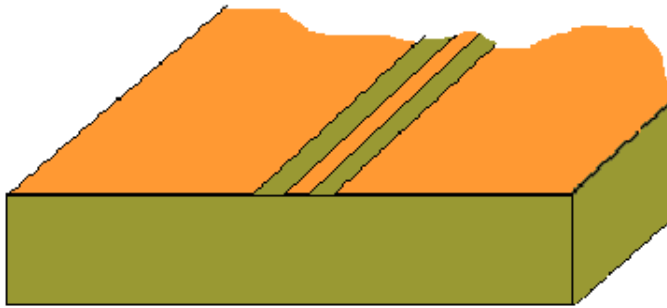
LÍNEA DE RANURA



- Es la línea dual de la microstrip pero con campos magnéticos
- Soporta modos cuasi TEM
- La eficiencia es menor que la microstrip
- Modificando la separación entre placas se consigue variar la impedancia. Se consiguen fácilmente impedancias altas aumentando la separación entre placas.



LÍNEA COPLANAR



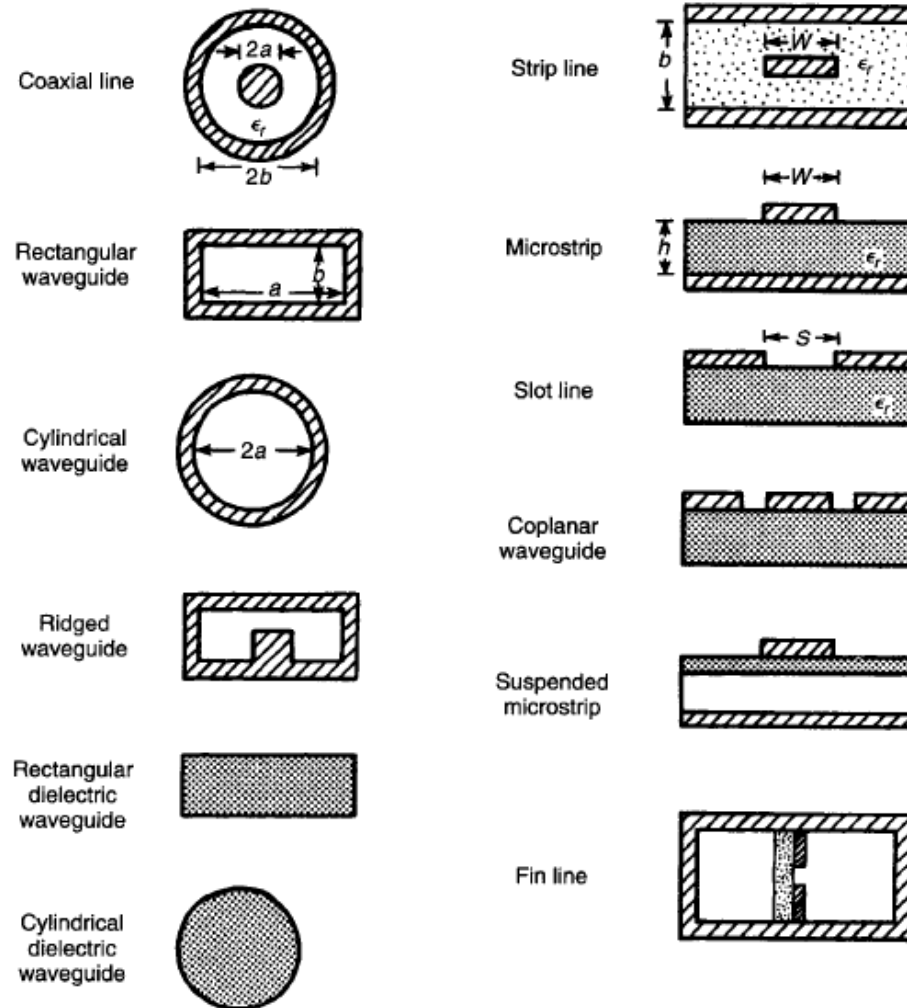
- Es como una línea slotline pero con un conductor central
- El voltaje de la señal es aplicado entre el conductor central y los planos de masa.
- Soporta modos cuasi-TEM pares o impares
- Constante dieléctrica efectiva:
- Menos dispersión que la microstrip en bajas frecuencias
- Formulación:

$$\epsilon_e = \frac{\epsilon_r + 1}{2}$$

$$Z_0 = \begin{cases} \frac{\eta}{\pi\sqrt{\epsilon_e}} \ln\left(2\sqrt{\frac{a}{W}}\right) & \text{for } 0 < W/a \leq 0.173 \\ \frac{\pi\eta}{4\sqrt{\epsilon_e}} \left[\ln\left(2\frac{1+\sqrt{W/a}}{1-\sqrt{W/a}}\sqrt{\frac{a}{W}}\right) \right]^{-1} & \text{for } 0.173 < W/a < 1 \end{cases}$$



TABLA COMPARATIVA (I): tipos de estructuras de transmisión



Tomado de referencia 4



TABLA COMPARATIVA (II)

Características	Coaxial	Guía onda	Stripline	Microstrip
Modos: Habitual Secundario	TEM TM,TE	TE ₁₀ TM,TE	TEM TM,TE	Cuasi-TEM Híbrido TM,TE
Dispersión	No	Media	No	Baja
Ancho de Banda	Alto	Bajo	Alto	Alto
Pérdidas	Medias	Bajas	Altas	Altas
Capacidad de Potencia	Media	Alta	Baja	Baja
Tamaño	Grande	Grande	Medio	Pequeño
Dificultad de Fabricación	Media	Media	Fácil	Fácil
Integración con otros Elementos	Difícil	Difícil	Regular	Fácil



MATERIALES EN MICROONDAS

Company, Dielectric	ϵ_r	$\tan \delta$	Description	Appearance
Generic				
G-10	4.3±.05	0.008	Epoxy/ Glass	woven
Norplex/Oak				
FR-4 ED 130	4.3	0.020	Epoxy/ Glass	woven
FR-4 EM 145	4.3	0.020	Epoxy/ Glass	woven
FR-4 G 50	4.3	0.020	Epoxy/ Glass	woven
Cyanate Ester CE 245	3.5	0.005		
Polyimide G 30	4.2	0.015		
Paper/Phenolic NP 492	4.8	0.045		
Paper/Phenolic NP 930	4.7	0.025		
Mica				
FR-4 EG 150	4.5	0.020		
Polyimide PG 418	4.2	0.005		
Mitsubishi				
Plastics				
E002	5.10	0.022 (1 MHz) 0.020 (1 GHz)		
K002	3.6	0.0035 (1 MHz) 0.0035 (1 GHz)		
K012	3.5	0.0021 (1 MHz)		
Polyclad				
FR-4 PCL-FR-204	4.6	0.20		
Polyimide PCL-GI-702	4.6	0.010		
Hi-Tek				
Cyanate Ester AroCy M-40S	3.63	0.002		
Arlon				
DiClad 810	10.2	0.0027 (10 GHz)		
Cu Clad 217	2.17±0.04	0.0009 (1 MHz)	PTFE/Glass	woven, bendable
Cu Clad 233	2.33±0.02	0.0014		
Cu Clad 250	2.45, 2.50, 2.55±0.4	0.0008 (1 MHz) 0.0018 (10 GHz)		

Tomado de referencia 1

Rogers Corp.				
Duroid 5500	2.5±0.04		Ceramic/PTFE	smooth, uniform
Duroid 5870	2.33±0.02	0.0005 (1 MHz) 0.0012 (10 GHz)	PTFE/Random Glass	
Duroid 5880	2.20±0.02	0.0004 (1 MHz) 0.0009 (10 GHz)	PTFE/Random Glass	
Duroid 6002	2.94±0.04			
Duroid 6006	6.00±0.2	0.0025 (10 GHz)		
Duroid 6010.2	10.2±0.25		Ceramic/PTFE	
Duroid 6010.5	10.5±0.25	0.0028, max (10 GHz)		
RO2800	2.88±0.06			
Polyimide Fleximid	3.4	0.003		
TMM-3	3.24	0.0018 (10 GHz)		
TMM-4	4.5	0.0018 (10 GHz)		
TMM-6	6.5	0.0018 (10 GHz)		
TMM-10	9.8	0.0017 (10 GHz)		
TMM-13	12.85	0.0019 (10 GHz)		
Keene Corp.				
522-50	2.5±0.05	0.0010 (1 MHz)		
522-45	2.45±0.05	0.0010 (1 MHz)		
522-48	2.48±0.05	0.0010 (1 MHz)		
522-55	2.55±0.05	0.0010 (1 MHz)		
527-45	2.45±0.04	0.0019 (10 GHz)		
527-50	2.50±0.05	0.0019 (10 GHz)		
527-55	2.55±0.04	0.0019 (10 GHz)		
527-68	2.68±0.04	0.0019 (10 GHz)		
870-33	2.33±0.04	0.0012 (10 GHz)		
880-20	2.20±0.04	0.00085 (10 GHz)		
810-20	10.2±0.25	0.002 (10 GHz)		
810-50	10.5±0.25	0.002 (10 GHz)		
Epsilon 6	6.00	0.0018 (10 GHz)		
Epsilon 10	10.2±.25	0.002 (10 GHz)		
Crane Polyflon				
CuFlon	2.1	0.0001 0.00045 (1 GHz) 0.00045 (18 GHz)		
Others				
Polysulfone	3.5-3.9 (1 MHz) 3.0 (10 GHz)	0.0056-0.009 (1MHz) 0.005 (10 GHz)		



BIBLIOGRAFÍA

1. Wadell, B.C.: "Transmisión Line Design Handbook", Artech House, 1991.
2. David M.Pozar: "Microwave Engeneering" Second Edition 1998, John Wiley&Sons. (capítulo 3)
3. Robert E. Collin: "Foundations for microwave engineering" New York McGraw-Hill, 1992. (capítulo 3)
4. Ramo, Whinnery y Van Duzer: "Fields and waves in communication electronics" John Wiley 1969.
5. Bahl y Bhartia: "Microwave Solid State Circuit Design", Wiley Interscience, 1988. (capítulo 2)
6. Harlan Howe: "Stripline Circuit Design"; Microwave Associates Burlington; Artech House 1974.
7. J. Esteban, M. A. González, M. Lambea y J. Rebollar; "Enfoque para el estudio de ondas guiadas en la ETSIT-UPM", URSI Symposium Nacional, Oviedo 2006

