MATEMÁTICAS 2 – Examen Final (2012-13) 12 de junio de 2013

Apellidos..

Nombre.............................. *DNI* .... *Grupo* ....

Nota (1 decimal)

TEST (PUNTOS)

- El test consta de **preguntas**. Marque con una cruz a lo sumo una opción por pregunta.
- **Acierto +0,1 Error –0,04 Blanco 0.**

V	F	
X		**1.** La dirección de máximo crecimiento de $f(x,y) = y + \sin xy$ en el punto $(0,0)$ es la definida por el vector $(0,1)$.
X		**2.** Sea el PVI $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$. Si $f(x,y)$ es continua en un entorno de (x_0, y_0) entonces existe solución del PVI.
	X	**3.** Si $f(x,y)$ es una función diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y $\nabla f(0,0) = (0,1)$, entonces el origen puede ser un extremo de f en $\mathbb{R}^2$.
X		**4.** Suponga que $f(x,y)$ es una función que admite derivadas parciales continuas hasta orden 2, y que la matriz hessiana de f en un punto crítico es diagonal. Si los elementos de la diagonal principal son no nulos y del mismo signo, entonces dicho punto crítico es un extremo de la función f.
	X	**5.** Una ecuación diferencial lineal puede tener soluciones singulares.
	X	**6.** Dado un PVI, se pretende aproximar la solución utilizando el método de Euler básico. En este caso, cuanto mayor sea el incremento de la variable x en cada paso, h, mejor será la aproximación que se obtendrá.
	X	**7.** Si una función tiene derivadas parciales en un punto es diferenciable en él.
X		**8.** Sea la función $f(x,y) = y^2 + \cos x$. La matriz hessiana de f en $(0,0)$ es $H(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
	X	**9.** Sea la función $f(x,y) = y^2 + \cos x$. f alacanza un máximo relativo en $(0,0)$.
	X	**10.** Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. f es diferenciable en (x_0, y_0) si y sólo si existe el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\left| f(x,y) - f(x_0,y_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \right) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right|}{||(x - x_0, y - y_0)||}$$

.

EJERCICIO (puntos)

a) Calcule los extremos absolutos (si existen) de $f(x,y) = x^2 - x - y + y^2$ en la región del plano definida por la desigualdad $x^2 + y^2 \leq 2$.

f es una función polinómica, luego será diferenciable en todo su dominio. Los posibles extremos de la función vendrán dados por los puntos críticos y por la frontera del dominio.

Calculamos los puntos críticos de la función, para ello obtenemos las derivadas parciales y las igualamos a 0.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 1 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -1 + 2y \Rightarrow -1 + 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

Luego el único punto crítico es el $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ que pertenece al dominio de la función.

Hallamos las derivadas segundas y la matriz hessiana para ver si es un extremo.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz Hessiana en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ es diagonal con los dos elementos de la diagonal principal mayores que 0, por tanto la función alcanza un mínimo relativo en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Estudiamos ahora como se comporta f en la frontera de su dominio. Para ello restringimos la función a la frontera. Como la frontera es una circunferencia para hacer esta restricción hacemos un cambio a coordenadas polares.

$$x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow (\rho \cos\theta)^2 + (\rho \sin\theta)^2 = 2 \Rightarrow \rho = \sqrt{2}$$

Y la función restringida queda:

$$F(\theta) = 2\cos^2\theta - \sqrt{2}\cos\theta - \sqrt{2}\sin\theta + 2\sin^2\theta = 2 - \sqrt{2}(\sin\theta + \cos\theta)$$

con $\theta \in [0, 2\pi)$. Calculamos los extremos de esta función, para ello estudiamos sus puntos críticos y los extremos del intervalo.

$$F'(\theta) = -\sqrt{2}(\cos\theta - \sin\theta) \Rightarrow$$
$$\sqrt{2}(\sin\theta - \cos\theta) = 0 \Rightarrow \sin\theta = \cos\theta \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4},\ \theta_2 = \frac{5\pi}{4}$$

$$F''(\theta) = \sqrt{2}(\cos\theta + \sin\theta)$$
$$F''(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) = 2$$
$$F''(\frac{5\pi}{4}) = \sqrt{2}(\frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}) = -2$$

Luego F presenta un mìnimo relativo en θ_1 y un máximo relativo en θ_2.

Veamos cuanto vale f en esos puntos.

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$
$$f(1,1) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$$
$$f(-1,-1) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

Luego la función alcanza un mínimo absoluto en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y un máximo absoluto en $(-1,-1)$.

b) Calcule el volumen del sólido limitado superiormente por $z = x^2 - y^2 + 1$ e inferiormente por el plano XY en la región definida por el cuadrado de vertices $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$ y $(-1,1)$.

La región definida por esos vértices será:

$$-1 \leq x \leq 1; \; -1 \leq y \leq 1$$

Luego el volumen querdará:

$$V = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(x^2 - y^2 + 1)dydx = \int_{-1}^{1}\left[x^2y - \frac{y^3}{3} + y\right]_{-1}^{1} dx = \int_{-1}^{1}\left(2x^2 - \frac{2}{3} + 2\right) dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{2x}{3} + 2x\right]_{-1}^{1} = 4$$

c) Resuelva el Problema de Valor Inicial (PVI)

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{2}(x+y) - 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

La ecuación diferencial que forma parte de este problema de valor inicial (PVI) es una ecuación diferencial lineal, podemos ponerla de la forma $y' - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}x - 1$.

Para resolverla primero hallaremos una solución de la ecuación homogenea y aplicaremos después el método de variación de las constantes.

La ecuación homogénea es $y' - \frac{1}{2}y = 0$

Tenemos que la función nula $y = 0$ es solución de esta ecuación.

Si consideramos que $y \neq 0$ entonces podemos dividir por y en la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{2}dx \Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2}x + C \Rightarrow y = \pm e^C e^{\frac{1}{2}x} = Ke^{\frac{1}{2}x} \text{ con } K \neq 0$$

Incorporando la solución $y = 0$, las soluciones de la ecuación diferencial homogénea vendrán dadas por

$$y = Ke^{\frac{x}{2}} \text{ con } K \in \mathbb{R}$$

Aplicamos ahora el método de variación de las constantes para hallar las soluciones de la ecuación completa, para ello tomamos como solución de la ecuación completa $y = K(x)e^{\frac{x}{2}}$. Entonces $y'(x) = K'(x)e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}K(x)e^{\frac{x}{2}}$ y sustituyendo en la ecuación obtenemos $K(x)$

$$K'(x)e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}K(x)e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}K(x)e^{\frac{x}{2}} = \frac{x}{2} - 1 \Rightarrow K'(x)e^{\frac{x}{2}} = \frac{x}{2} - 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow K'(x) = (\frac{x}{2} - 1)e^{-\frac{x}{2}} \Rightarrow K(x) = \int (\frac{x}{2} - 1)e^{-\frac{x}{2}}dx = \int \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$$

Esta integral la resolveremos por partes, tomando $u = x \Rightarrow du = dx$ y $dv = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx \Rightarrow v = -e^{-\frac{x}{2}}$ queda

$$\int \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx = -xe^{-\frac{x}{2}} + \int e^{-\frac{x}{2}}dx = -xe^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$$

Luego

$$K(x) = -xe^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} + C = -xe^{-\frac{x}{2}} + C$$

Entonces la solución de la ecuación diferencial será

$$y = (-xe^{-\frac{x}{2}} + C)e^{\frac{x}{2}} = Ce^{\frac{x}{2}} - x$$

Aplicando ahora las condiciones iniciales se obtiene la solución del PVI

$$y(0) = C = 1$$

Y la solución es

$$y = e^{\frac{x}{2}} - x$$