Matemáticas II (GIB) - 5/7/2016 **Final Extraordinario.**

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 150 minutos**

TEST. (20 puntos) Tiempo 50 minutos

- Cada pregunta tiene una sola respuesta correcta. Marque con una cruz, a lo sumo una opción por pregunta. **Puntuación:** Correcto +2.0 **Error -0.5** En blanco 0.

	SI	NO	
1.	x		Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ inyectiva. Entonces, Imf es equipotente a $\mathbb{R}$
2.	x		Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}, b, d > 0$ y $\exists m, M \in \mathbb{R} \mid (m \leq \frac{a}{b} \leq M) \wedge (m \leq \frac{c}{d} \leq M)$, entonces $m \leq \frac{a+c}{b+d} \leq M$
3.		x	Si n es impar, entonces $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^n < 3\}$ tiene ínfimo y supremo
4.	x		El polinomio de Taylor de orden 5 centrado en cero de la función $f(x) = \sum_{n=0}^{1000} \frac{n-1}{n+1} x^n$ es $-1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{5}x^4 + \frac{2}{3}x^5$
5.		x	Sea $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente. Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + n a_n}$ es siempre divergente
6.		x	Sea $\alpha > 0$. Entonces, el criterio integral muestra que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1+\alpha}}$ es divergente.
7.		x	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ existe si y sólo si $\lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} f(x)dx$ existe.
8.	x		Si $f(x, y)$ tiene derivadas direccionales continuas en (x_0, y_0), entonces f es diferenciable en (x_0, y_0).
9.	x		El origen es un mínimo local de la función $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$.
10.	x		Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \frac{x^4 y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, y D la mitad derecha del círculo unidad. Entonces, $\int_D f(x, y)\, dx\, dy = 0$.

Matemáticas II (GIB) - 5/7/2016 **Problema 1 (40 puntos)**

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 50 minutos**

Por favor, comience sus respuestas en esta hoja.
Respuestas sin justificar recibirán poca o ninguna puntuación.

A. **(10 puntos)** Sea $f(x) = \int_0^x \int_0^t (s-1)^5 \operatorname{sen} s \, ds \, dt$. Escriba el polinomio de Taylor de orden 3 centrado en 0 de f.

B. **(25 puntos)** Se define $f(x) := \frac{x^3}{3} - x, \; x \in [-2, 3]$,

a) **(5 puntos)** Halle sus máximos y mínimos y dibuje la función.

b) **(20 puntos)** Definamos ahora la función $g : [-2, 3] \to \mathbb{R}$ tomando para cada $x \in [-2, 3]$ como valor de $g(x)$ el mínimo valor de $-f(t)$ en el intervalo $[-2, x]$, esto es:

$$g(x) := \min_{t \in [-2,x]} -f(t).$$

1) **(10 puntos)** Halle su expresión analítica explícita y dibuje la función.

2) **(10 puntos)** Estudie su continuidad y diferenciabilidad.

C. **(5 puntos)** Demuestre que la ecuación $x + e^x + \operatorname{arc\,tg} x = 0$ tiene una única solución real.

SOLUCION:

A. Como la función $(s-1)^5 \operatorname{sen} s$ es continua en $\mathbb{R}$, el Teorema Fundamental del Cálculo garantiza que la función $g(t) \equiv \int_0^t (s-1)^5 \operatorname{sen} s \, ds$ es derivable en $\mathbb{R}$, y, por tanto, también es continua, luego, de nuevo por el Teorema Fundamental del Cálculo, $f(x) = \int_0^x g(t) \, dt$ es derivable en $\mathbb{R}$ y se tendrá:

$$f'(x) = g(x) = \int_0^x (s-1)^5 \operatorname{sen} s \, ds \,.$$

Ya hemos razonado antes que $g = f'$ es derivable en $\mathbb{R}$, por tanto $f''(x) = (x-1)^5 \operatorname{sen} x$. Por otro lado, f'' es derivable en $\mathbb{R}$, al ser producto de funciones derivables, y tedremos que

$$f'''(x) = 5(x-1)^4 \operatorname{sen} x + (x-1)^5 \cos x \,.$$

Por último, ahora es fácil ver que $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$ y $f'''(0) = -1$, por lo que el polinomio pedido es:

$$P_3(f; 0)(x) = \frac{-1}{3!} x^3 = \frac{-x^3}{6} \,.$$

B. *a*) Se trata de un polinomio real de grado tres, por lo tanto una función de clase $C^\infty(\mathbb{R})$, cuyas raíces son claramente $x = 0, \mp\sqrt{3}$, todas ellas en el dominio $[-2, 3]$. Puesto que el dominio $[-2, 3]$ es un cerrado y la función es diferenciable, los extremos habrán de encontrarse en los puntos críticos del interior, el intervalo $(-2, 3)$ o en la frontera, el conjunto $\{-2, 3\}$. Obervemos que $f'(x) = x^2 - 1$, que se anula en $x_M = -1$ y $x_m = 1$, ambos también en el dominio. Es fácil razonar que en x_M y en x_m hay un máximo y un mínimo locales, respectivamente. Estos valores son: $f(x_M) = \frac{2}{3}$ y $f(x_m) = -\frac{2}{3}$. Además, por ser la función continua y su dominio un compacto, el teorema de Weierstrass nos grantiza que se alcanzarán tanto máximo como mínimo absolutos. Estudiando finalmente, en la frontera, vemos que

$f(-2) = -\frac{2}{3}$ y $f(3) = 6$. Por tanto, todos los punto hallados son obviamente extremos locales, siendo $x = 3$ el máximo absoluto de f y -2 y x_m sus mínimos absolutos. Por otro lado, la gráfica de f se construye fácilmente mediante los procedimientos estándar ya estudiados en el Bachillerato, esto es, estudiando mediante la derivada primera las zonas de crecimiento y decrecimiento de la función, y mediante la derivada segunda su concavidad.

b) Puesto que la gráfica de $-f$ es la simétrica de la de f con respecto al eje X, sus ceros y extremos son los mismos, convirtiéndose los máximos en mínimos y viceversa. Por otro lado, también observamos que $f(x_M) = \frac{2}{3} = -f(-2)$ y que por paridad ha de ser igual a $f(2)$. Por tanto, $-f(x_M) = -\frac{2}{3} = -f(2)$. A la misma conclusión hubiésemos llegado encontrando los puntos de corte de las gráficas de $-f$ con la función constante $-\frac{2}{3}$.

1) Con estos datos, está claro que tendremos:

$$g(x) := \min_{t\in[-2,x]} -f(t) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } -2 \leq x \leq x_M \\ f(x_M) & \text{si } x_M \leq x \leq 2 \\ -f(x) & \text{si } 2 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

es decir:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{-x^3}{3} + x & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ -\frac{2}{3} & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ \frac{-x^3}{3} + x & \text{si } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

2) La función g es obviamente continua y diferenciable en $[-2,-1) \cup (2,3]$ por serlo $-f$, ya que lo es f y también en $(-1,2)$ por ser aquí constante. También es continua, por construcción, en los puntos de unión -1 y 2, como puede comprobarse verificando que los límites laterales conciden ambos con el valor de la función en los respectivos puntos. Para ver si es diferenciable en estos puntos empleamos las derivadas laterales. Así, en $x = -1$ tendremos

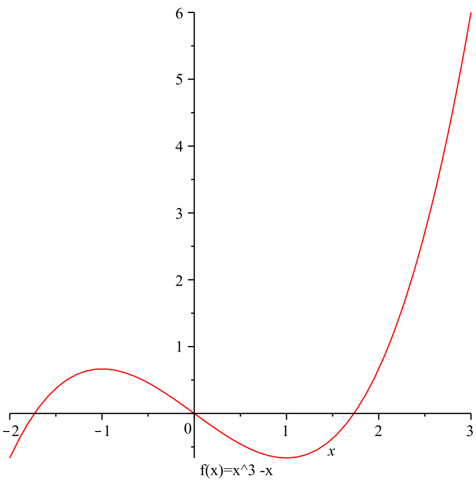
$$\lim_{x\to(-1)^-} \frac{\frac{-x^3}{3} + x + \frac{2}{3}}{x-(-1)} = 0 = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{\frac{-2}{3} - (\frac{-2}{3})}{x+1},$$

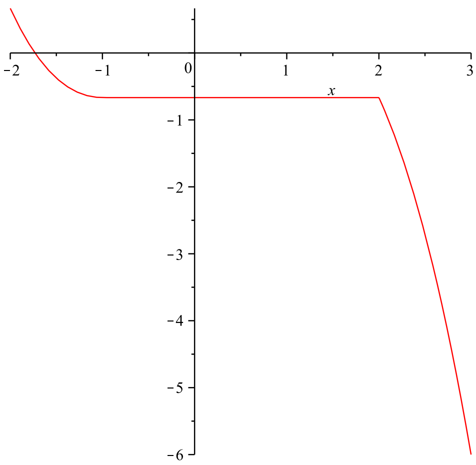
y g es diferenciable en $x = -1$. Por otro lado, en $x = 2$ tendremos:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{-x^3}{3} + x + \frac{2}{3}}{x-2} = -3 \neq 0 = \lim_{x\to 2^-} \frac{\frac{-2}{3} - (\frac{-2}{3})}{x+1},$$

por lo que g no es diferenciable en $x = 2$.

Teniendo esto en cuenta, podemos ahora dibujar fácilmente la función g pedida.


f(x)=x^3 -x


la función g(x)

C. La función $f(x) = x + e^x + \arctan x$ es claramente derivable en todo $\mathbb{R}$ por ser suma de funciones derivables. Dado que $f'(x) = 1 + e^x + \frac{1}{1+x^2} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, la función f es estrictamente creciente e inyectiva. Así, si la ecuación dada tiene solución, ésta ha de ser única, pues el valor 0 sólo puede tener una preimagen.

Para ver que en efecto existe al menos una solución, se recurre al teorema de Bolzano, pudiéndose argumentar de dos maneras: primero, como $f(0) = 1 > 0$, $f(-1) = -1 + e^{-1} - \frac{\pi}{4} < 0$ y f es continua en $[-1, 0]$, el teorema de Bolzano nos garantiza que existe $c \in (-1, 0)$ tal que $f(c) = 0$.

En este caso ha resultado sencillo encontrar dos puntos, 0 y -1, en los que se produce un cambio de signo, para poder aplicar el teorema de Bolzano. Un razonamiento que ahorra esta búsqueda constituye la segunda forma de argumentar: dado que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, existe $x_0 < 0$ tal que $f(x_0) < 0$, lo cual se desprende directamente de la definición de límite. De modo similar, como $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, existe $x_1 > 0$ tal que $f(x_1) > 0$. Puesto que f es continua en $[x_0, x_1]$, el teorema de Bolzano garantiza que existe $c \in (x_0, x_1)$ tal que $f(c) = 0$.

Matemáticas II (GIB) - 5/7/2016 **Problema 2 (40 puntos)**

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 50 minutos**

Por favor, comience sus respuestas en esta hoja.
Respuestas sin justificar recibirán poca o ninguna puntuación.

A. **(10 puntos)**Sea la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ con $a_n = \dfrac{e^{n\alpha}}{3^n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. **(5 puntos)** Calcule el límite para los distintos valores de α. ¿Para qué valores converge?
2. **(5 puntos)** Considere ahora, para la sucesión anterior, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ¿Para qué valores de α converge? Para estos valores súmela.

B. **(20 puntos)** Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. **(5 puntos)** Calcule, en los puntos del dominio donde existan, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
2. **(5 puntos)** Calcule, en los puntos del dominio donde existan, las derivadas direccionales $D_u f(0,0)$ para todo vector unitario $u = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi)$.
3. **(10 puntos)** ¿Es f continua en $\mathbb{R}^2$? ¿Y diferenciable?

C. **(10 puntos)** Demuestre que de toda sucesión real acotada puede extraerse una subsucesión convergente.

SOLUCION:

A. Comencemos por observar que podemos escribir la sucesión como $a_n = (K(\alpha))^n$, donde $K(\alpha) := \dfrac{e^{\alpha}}{3} > 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Es claro entonces que

$$\lim_{n\to\infty} (K(\alpha))^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } K(\alpha) > 1 \\ 1 & \text{si } K(\alpha) = 1 \\ 0 & \text{si } K(\alpha) < 1, \end{cases}$$

y la sucesión será convergente en los dos últimos casos, que pueden resumirse en la condición $K(\alpha) \leq 1$, que equivale a $e^{\alpha} \leq 3$ o también, por ser la función ln estríctamente creciente, a

$$\alpha \leq \ln 3.$$

2. La serie dada es una serie geométrica de razón $q = K(\alpha)$, que convergerá si, y sólo si, $K(\alpha) < 1$, es decir, si y sólo si, $\alpha < \ln 3$. Para éstos valores, su suma vale

$$\frac{1}{1-K(\alpha)} - 1 = \frac{K(\alpha)}{1-K(\alpha)} = \frac{e^{\alpha}}{3-e^{\alpha}}.$$

B. 1. Sea $D := \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ En D la función f es una función racional y el denominador no se anula, por lo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2(x^2+y^4) - 2x^2y^2}{(x^2+y^4)^2} = \frac{y^6 - x^2y^2}{(x^2+y^4)^2}\,.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^4) - 4xy^5}{(x^2+y^4)^2} = \frac{2x^3y - 2xy^5}{(x^2+y^4)^2}\,.$$

Por otro lado, en $(0,0)$ tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0\,.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0\,.$$

Por tanto, f tiene derivadas parciales en todo su dominio.

2. Sea $\theta \in [0, 2\pi)$. La derivada direccional de f en $(0,0)$ según la dirección $u = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ es:

$$\begin{aligned} D_u f(0,0) = D_{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)} f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0 + t\cos\theta, 0 + t\operatorname{sen}\theta) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta}{t^2(\cos^2\theta + t^2\operatorname{sen}^2\theta)} - 0}{t} = \operatorname{sen}\theta\operatorname{tg}\theta, \end{aligned}$$

siempre que $\theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. Para estos valores, el límite es cero.

Por otro lado, en todo punto de D es claro que f es diferenciable, pues sus parciales primeras son continuas. Por tanto, sus derivadas direccionales serán la proyección ortogonal del gradiente sobre el vector $u = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, es decir, su producto escalar:

$$\begin{aligned} D_u f(x,y) = D_{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)} f(x,y) &= \partial_x f(x,y)\cos\theta + \partial_y f(x,y)\operatorname{sen}\theta = \\ &= \frac{y^6 - x^2y^2}{(x^2+y^4)^2}\cos\theta + \frac{2x^3y - 2xy^5}{(x^2+y^4)^2}\operatorname{sen}\theta. \end{aligned}$$

3. f es continua en todo D por ser cociente de funciones continuas de las que el denominador no se anula. Sin embargo, f no es continua en $(0,0)$. En efecto, si nos acercamos al origen por la recta $y = x$ obtenemos un límite igual a 0, mientras que si nos acercamos por la parábola $x = y^2$ obtenemos un límite igual a $\frac{1}{2}$, por lo que f no tiene límite en en origen. Por otro lado, como ya se dijo anteriormente, en D, f tiene derivadas parciales y éstas son continuas, y f es diferenciable en D. Obviamente al no ser continua en el origen, tampoco es diferenciable.

C. Pueden seguirse distintos caminos para esta demostración. Recomenamos al alumno el descrito por Spivak en el texto de la asignatura.