Matemáticas II (GIB) - 1/7/2014 **Final Extraordinario.**

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 180 minutos**

TEST. (20 puntos) Tiempo 60 minutos

- Cada pregunta tiene una sola respuesta correcta. Marque con una cruz, a lo sumo una opción por pregunta. **Puntuación:** Correcto +1.0 **Error -0.25** En blanco 0.

	SI	NO	
1.	x		Sea $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$. Entonces, si A es acotado superiormente tiene un único supremo.
2.		x	Si el conjunto A es numerable (i.e. equipotente a $\mathbb{N}$), y $B \subset A$, entonces B es numerable.
3.	x		Se demuestra por inducción que el número $2^{2n+1}+1$ es divisible por 3 para todo $n \in \mathbb{N}$
4.	x		Sea $f : S \to T$. Entonces si la función $g : S \to f(S), x \mapsto g(x) = f(x)$ es invertible, $f$es inyectiva.
5.		x	Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $g(x)$ no es acotada, y existe $l = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x)$, entonces ha de ser $l \neq 0$.
6.	x		Sea $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = (-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^+\right\}$. Entonces $\forall\delta > 0, B(1;\delta) \cap A \neq \emptyset$.
7.	x		Si las funciones $f - g$ y f son derivables en $a \in \mathbb{R}$, entonces la función g es derivable en $a \in \mathbb{R}$.
8.		x	Si $\forall n \in \mathbb{Z}^+ a_n > 0$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ es convergente, entonces $\{a_n\}$ es decreciente, y $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.
9.		x	La suma inferior de la función $\cos x$ en $[0, 2\pi]$ para la partición $P = \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$ vale 0.
10.		x	La integral impropia $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$ es convergente si y sólo si $p \geq 2$.
11.	x		Una solución de una ecuación diferencial se dice singular si por cada uno de sus puntos pasa otra solución de la ecuación diferencial.
12.		x	Sea el PVI $\left\{\begin{array}{l} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right.$. Si $f(x,y)$ es continua en un entorno de (x_0, y_0) entonces existe solución única del PVI.

Continúa por detrás ....

13. [x] [ ] Si $f(x,y)$ tiene derivadas parciales continuas en (x_0, y_0), entonces f es continua en (x_0, y_0).

14. [x] [ ] Suponga que $f(x,y)$ es una función que admite derivadas parciales continuas hasta orden 2, y que la matriz hessiana de f en un punto crítico es diagonal. Si los elementos de la diagonal principal son no nulos y de distinto signo, entonces dicho punto crítico no es un extremo de la función f.

15. [ ] [x] Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = l$, entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l$

16. [ ] [x] El método de Euler básico para aproximar la solución de un PVI se basa en obtener una aproximación del valor de la solución en cada punto utilizando unicamente la condición inicial.

17. [x] [ ] El método de Euler Básico aproxima el valor de la solución de un PVI en cada punto utilizando el gradiente de la solución en el punto calculado en el paso anterior.

18. [x] [ ] El punto $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ es un máximo relativo de la función $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$.

19. [ ] [x] En los métodos de Euler para aproximar la solución de un PVI cuanto más pequeño hagamos el paso h más pequeño será el error de redondeo que cometemos.

20. [ ] [x] El volumen V de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ viene dado por

$$V = 8 \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2 - y^2}\; dxdy$$

.

Matemáticas II (GIB) - 1/7/2014 **Problema 1**

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 60 minutos**

Por favor, comience sus respuestas en esta hoja.

A. **(15 puntos)** Sean $x_0 \in (a,b) \subset \mathbb{R}$ y $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ y g es acotada en (a,b). Demuestre que entonces $\lim_{x\to x_0} g(x)f(x) = 0$.

B. **(10 puntos)** Demuestre mediante la definición de derivada que

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$$

C. **(15 puntos)**

a) **(5 puntos)** Sea $F(x) := \int_1^{x^2} \ln t\, dt$. Razone por qué es posible hallar el polinomio de Taylor de orden 3 centrado en $x = 1$ para la función $F(x)$, y escríbala como suma de este polinomio más un resto en forma de Peano.

b) **(5 puntos)** Demuestre que $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

c) **(5 puntos)** Sea $a \in [-1,1] \subset \mathbb{R}$ fijo y considere $\sum_{k=0}^{\infty} (\operatorname{arc\,sen} a)^k$. ¿Para qué valores de a converge la serie? Para éstos, calcule la suma (en función de a).

SOLUCION:

A. Inicialmente, por ser g acotada en (a,b), existe $M > 0$ tal que si $x \in (a,b)$ entonces $|g(x)| < M$. Sea ahora $\varepsilon > 0$ dado. Por ser $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in \overset{\circ}{B}(x_0,\delta) \Rightarrow |f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$. Por tanto, tendremos que $x \in \overset{\circ}{B}(x_0,\delta) \Rightarrow |g(x)f(x)| < M|f(x)| < M\dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$. y por tanto, $\lim_{x\to x_0} g(x)f(x) = 0$, como se quería demostrar.

B. Observemos que

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \operatorname{sen} x \frac{(\cos h - 1)}{h} + \cos x\, \frac{\operatorname{sen} h}{h}.$$

Entonces, como $\cos h - 1 = -\frac{1}{2}h^2 + o(h^3)$, $\operatorname{sen} h \sim h$, ambas cuando $h \to 0$, se tendrá que

$$(\operatorname{sen} x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h\to 0} \big(\operatorname{sen} x(-\tfrac{1}{2}h + o(h^2)) + \cos x\big) = \cos x,$$

como se quería demostrar.

C.

a) Obsérvese que la función $F(x)$ no es más que la composición $(g \circ h)(x)$, siendo $g(x) := \int_1^x \ln t\, dt$, con $x \in \mathbb{R}^+$ y $h(x) := x^2$, con $x \in \mathbb{R}$. Ambas son funciones C^∞ en su dominio y por tanto la composición también lo es en su dominio $\mathbb{R} - \{0\}$. Así, es posible escribir el polinomio de Taylor de cualquier orden para F centrado en $x = 1$. Obviamente $F(1) = 0$. Por otro lado, la Regla de la Cadena y el Teorema Fundamental del Cálculo nos dicen que:

$$F'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \ln x^2 \cdot 2x,$$

y por tanto $F'(1)=0$. Derivando la anterior expresión, es fácil ver que $F''(1)=F'''(1)=4$. Por tanto, la expresión pedida, es:

$$F(x)=2(x-1)^2+\frac{2}{3}(x-1)^3+o((x-1)^3).$$

También se puede llegar al mismo resultado realizando la integración y derivando sucesivamente.

b) Si $y=\operatorname{arc\,sen} x$, entonces $x=\operatorname{sen} y$, y por ser inversas tendremos:

$$(\operatorname{arc\,sen} x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

c) Puesto que se trata de una serie geométrica de razón $q=\operatorname{arc\,sen} a$, la serie convergerá si y sólo si $|q|<1$, es decir, si y sólo si $|\operatorname{arc\,sen} a|<1$. Así, si asumimos la definición habitual (rama principal) de la función inversa $\operatorname{arc\,sen}:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, por ser la función sen aquí creciente, tendremos:

$$|\operatorname{arc\,sen} a|<1\Leftrightarrow -1<\operatorname{arc\,sen} a<1\Leftrightarrow \operatorname{sen}(-1)<a<\operatorname{sen}1\Leftrightarrow -\operatorname{sen}1<a<\operatorname{sen}1\Leftrightarrow |a|<\operatorname{sen}1.$$

También se puede llegar fácilmente a la misma conclusión, tanto a partir del criterio cociente de D'Alambert como del criterio raíz de Cauchy.

Puesto que la suma de los N primeros términos de una progresión geométrica de razón $q\neq 1$ vale $\sum_{k=0}^{N} q^k=\frac{1-q^{N+1}}{1-q}$, entonces, con $|q|<1$ tendremos $\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{1-q^{N+1}}{1-q}=\dfrac{1}{1-q}$ y, por tanto, para $|a|<\operatorname{sen}1$ tendremos:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\operatorname{arc\,sen} a)^k=\frac{1}{1-\operatorname{arc\,sen} a}.$$

Matemáticas II (GIB) - 1/7/2014 Problema 2

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 60 minutos**

Por favor, comience sus respuestas en esta hoja.

a) **(15 puntos)** Hallar los extremos absolutos de la función $f(x,y) = \sin(xy)$ en la región cerrada dada por $0 \leq x \leq \pi$ y $0 \leq y \leq 1$.

b) **(10 puntos)** Calcular la integral doble de la función $f(x,y) = e^{-x^2}$ en la región limitada por $\frac{y}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ y $0 \leq y \leq 1$.

c) **(15 puntos)** Resuelva el Problema de Valor Inicial (PVI)

$$\begin{cases} \cos x(e^{2y} - y)\frac{dy}{dx} = e^y \sin 2x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

SOLUCION:

a) La función $f(x,y)$ es diferenciable en su dominio, luego, por un lado, los candidatos a extremos relativos serán los puntos críticos y los puntos de la frontera del dominio. Y, por otro lado, como el dominio es cerrado y acotado, i.e. compacto, y $f(x,y)$ es continua, la función alcanza máximo y mínimo absolutos.

Además, en la región dada por $0 \leq x \leq \pi$ y $0 \leq y \leq 1$, $xy \in [0,\pi]$ y la función seno en ese intervalo no puede tomar valores más grandes que 1 ni más pequeños que 0, luego donde alcance el valor 0 la función tendrá un mínimo absoluto, y donde alcance el valor 1 tendrá un máximo absoluto.

Empezamos calculando los puntos críticos, para ello calculamos las derivadas parciales y las igualamos a 0.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos(xy) \Rightarrow y\cos(xy) = 0 \Rightarrow y = 0, \text{ o bien } \cos(xy) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy) \Rightarrow x\cos(xy) = 0 \Rightarrow x = 0, \text{ o bien } \cos(xy) = 0$$

Como tanto los puntos con $x = 0$ como los puntos con $y = 0$ no pertenecen al interior de la región de estudio, los únicos puntos críticos que tenemos son los que cumplen que $\cos(xy) = 0$, es decir los puntos (x,y) tales que $xy = \frac{\pi}{2}$.

En estos puntos la función toma el valor 1, $f(x,y) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ si $xy = \frac{\pi}{2}$. Luego todos los puntos de esa curva serán máximos absolutos de la función.

Ahora estudiamos que pasa en los puntos de la frontera, que está formada por cuatro segmentos.

- $x = 0,\ 0 \leq y \leq 1$

  En estos puntos la función toma el valor 0, $f(0,y) = \sin(0y) = 0$. Luego son mínimos absolutos de la función.

- $x = \pi,\ 0 \leq y \leq 1$

  La función restringida a este segmento queda $f(\pi,y) = \sin(\pi y)$. Calculamos extremos de esta función, para ello hallamos los puntos críticos.

  $$f'(\pi,y) = \pi\cos(\pi y) \Rightarrow \pi\cos(\pi y) = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

  Luego tenemos el punto $(\pi, \frac{1}{2})$, que es un punto de la curva $xy = \frac{\pi}{2}$, luego ya está estudiado.

  En el extremo inferior del segmento $(\pi, 0)$ la función toma el valor 0, $f(\pi,0) = \sin(\pi 0) = 0$, luego tenemos otro mínimo absoluto.

  En el extremo superior del segmento $(\pi, 1)$ la función también toma el valor 0, $f(\pi,1) = \sin(\pi 1) = 0$, luego tenemos otro mínimo absoluto.

- $y=0,\ 0\leq x\leq \pi$

  En estos puntos la función toma el valor 0, $f(x,0)=\sin(x0)=0$. Luego son mínimos absolutos de la función.

- $y=1,\ 0\leq x\leq \pi$

  La función restringida a este segmento queda $f(x,1)=\sin x$. Calculamos extremos de esta función, para ello hallamos los puntos críticos.

  $$f'(x,1)=\cos x \Rightarrow \cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$$

  Luego tenemos el punto $(\frac{\pi}{2},1)$, que es un punto de la curva $xy=\frac{\pi}{2}$, luego ya está estudiado.

  Los extremos de este segmento también están ya estudiados.

Luego la función $f(x,y)$ alcanza mínimos absolutos en los puntos (x,y) tales que $x=0$, o bien $y=0$, y en el punto $(\pi,1)$. Y alcanza máximos absolutos en los puntos de la curva $xy=\frac{\pi}{2}$.

b) La región de estudio está limitada por las rectas $x=\frac{y}{2}$, $x=\frac{1}{2}$, $y=0$ e $y=1$, luego es un triángulo de vértices $(0,0)$, $(\frac{1}{2},0)$, $(\frac{1}{2},1)$.

Si planteamos las integrales iteradas integrando primero respecto de x, puesto que un límite de integración de x depende de y, tenemos que integrar la función e^{-x^2} que no es fácil. Para soslayar este problema podemos cambiar el orden de las variables de integración e integrar primero respecto de y. Tenemos que modificar los límites de integración de forma que los de x no dependan de y. Así los nuevos límites de integración serán $0\leq x\leq \frac{1}{2}$ y $0\leq y\leq 2x$. Y las integrales iteradas quedarán

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{2x} e^{-x^2}dydx=\int_0^{\frac{1}{2}} ye^{-x^2}\Big]_0^{2x}dx=\int_0^{\frac{1}{2}} 2xe^{-x^2}dx=-e^{-x^2}\Big]_0^{\frac{1}{2}}=-e^{-\frac{1}{4}}+e^0=1-e^{-\frac{1}{4}}$$

c) Simplificamos la ecuación diferencial utilizando que $\sin 2x=2\sin x\cos x$ y dividimos la ecuación por e^y (que no se anula para ningún valor de y).

$$\cos x(e^{2y}-y)\frac{dy}{dx}=e^y\sin 2x \Rightarrow \cos x(e^{2y}-y)\frac{dy}{dx}=e^y 2\sin x\cos x \Rightarrow (e^{2y}-y)\frac{dy}{dx}=e^y 2\sin x \Rightarrow$$
$$\frac{(e^{2y}-y)}{e^y}\frac{dy}{dx}=2\sin x \Rightarrow (e^y-ye^{-y})\frac{dy}{dx}=2\sin x$$

Luego es una ecuación diferencial de variables separadas que podemos resolver directamente integrando en ambos miembros.

$$\int (e^y-ye^{-y})dy$$

La primera parte de esta integral es inmediata, y la segunda se puede resolver por partes, haciendo $u=y\Rightarrow du=dy$ y $dv=e^{-y}dy\rightarrow v=-e^{-y}$.

$$\int (e^y-ye^{-y})dy=e^y+ye^{-y}-\int e^{-y}dy=e^y+ye^{-y}+e^{-y}=e^y+(y+1)e^{-y}$$

Y el segundo miembro será

$$\int 2\sin x dx=-2\cos x$$

Con lo que las soluciones de la ecuación diferencial vendrán dadas por la expresión

$$e^y+(y+1)e^{-y}=-2\cos x+C$$

Para resolver el PVI introducimos la condición inicial, $y(0)=0$ en la ecuación diferencial

$$e^0+(0+1)e^0=-2\cos 0+C\Rightarrow 2=-2+C\rightarrow C=4$$

Luego la solución del PVI será la función y que cumpla la siguiente expresión para cualquier valor de x.

$$e^y + (y+1)e^{-y} = 4 - 2\cos x$$