MATEMÁTICAS II (GIB) – 25 de junio de 2012 **E1 (3,5 puntos)**

Apellidos..

Nombre.................................... *DNI* .... *Grupo* ....

Nota E1

TEST (2,5 PUNTOS)

- **Acierto +0,25 Error –0,1 Blanco 0.**

V	F	
X		**1.** Los límites laterales de e^{1/x^2} cuando $x \to 0$ son ambos $+\infty$.
	X	**2.** Si $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función continua con $f(a) > 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) < 0$, entonces existe un único $c > a$ tal que $f(c) = 0$.
	X	**3.** Si una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alcanza un extremo relativo en $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces f es derivable en x_0 y se verifica $f'(x_0) = 0$.
X		**4.** El área delimitada por la función $f(x) = \|x\|^3$ y el eje x en la región $-1 \le x \le 2$ es $17/4$.
X		**5.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos(n^2 + \ln(n+2))}{n^2 - 1} = 0$.
	X	**6.** Una serie $\sum a_n$ en la que la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ es acotada es convergente.
	X	**7.** Si $a_n \ge 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\sum (-1)^n a_n$ es convergente.
X		**8.** El desarrollo de Taylor de $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ en $x = 0$ tiene la forma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ para ciertos coeficientes reales a_{2n+1}.
	X	**9.** La función $f(x, y) = (x - 2y)^2$ tiene un único mínimo absoluto en la región definida por las desigualdades $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$.
	X	**10.** La ecuación diferencial $y'' + x^2 y = 0$, con la condición inicial $y(0) = 0$, tiene solución única.

PREGUNTAS DE RESPUESTA CORTA (1 PUNTO)

A. (0,25 puntos) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x-1} - \sqrt{x}\right) = \boxed{-\infty}$

B. (0,25 puntos) El radio de convergencia de la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^2+1}{n!} x^n$ es igual a $\boxed{\infty}$

C. Sea $f(x, y) = e^{x^2+xy}$. Calcule las siguientes derivadas parciales (**0,1 puntos cada una**):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \boxed{(2x+y)e^{x^2+xy}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \boxed{xe^{x^2+xy}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \boxed{(2+(2x+y)^2)e^{x^2+xy}} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \boxed{(1+(2x+y)x)e^{x^2+xy}} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \boxed{x^2 e^{x^2+xy}}$$

Apellidos..
Nombre................................ *DNI* .... *Grupo* ....

Nota E2

- Puntuación de este problema sobre el total del examen: **3 puntos.**

Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{x} & \text{si } x < 0 \\ e^{-x}\cos(bx) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

2.1 (1 punto). Calcule los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ que hacen a f continua en $\mathbb{R}$.

2.2 (1 punto). Calcule los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ que hacen a f derivable en $\mathbb{R}$.

2.3 (1 punto). Considere el caso $a = b = 0$. Calcule la integral $\int_0^2 f(x)dx$.

Solución.

2.1 En el intervalo $(-\infty, 0)$, la función f es continua $\forall a \in \mathbb{R}$, por ser cociente de funciones continuas y no anularse el denominador.

En el intervalo $(0, \infty)$, la función f es continua $\forall b \in \mathbb{R}$, por ser producto de funciones continuas.

De esta forma, la función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

Sin embargo, para que la función sea continua en $\mathbb{R}$, tenemos que estudiar la continuidad de la función en $x = 0$.

f es continua en $x = 0$ siempre y cuando $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

Evaluando la función $f(0) = e^{-0}\cos(b0) = 1, \ \forall b \in \mathbb{R}$.

De esta forma, para que la función sea continua en $x = 0$, los límites laterales cuando $x \to 0$ han de coincidir y ser iguales a $f(0)$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \tfrac{\operatorname{sen}(ax)}{x} = a$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{-x}\cos(bx) = 1, \forall b \in \mathbb{R}.$$

Así pues, para que en $x = 0$ la función sea continua ha de ser $a = 1$, $b \in \mathbb{R}$.

De esta forma, los valores de a, b que hacen f continua en $\mathbb{R}$ son $a = 1, \ b \in \mathbb{R}$.

2.2 En el intervalo $(-\infty, 0)$, la función f es derivable $\forall a \in \mathbb{R}$, por ser cociente de funciones derivables y no anularse el denominador.

En el intervalo $(0, \infty)$, la función f es derivable $\forall b \in \mathbb{R}$, por ser producto de funciones derivables.

De esta forma, la función es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

Sin embargo, para que la función sea derivable en $\mathbb{R}$, tenemos que estudiar la derivabilidad de la función en $x = 0$.

Si f es derivable en un punto, necesariamente f debe ser continua en ese punto. Del apartado anterior, sabemos que la función es continua en $x = 0$ para $a = 1, \ b \in \mathbb{R}$. Con este resultado procedemos a estudiar la derivabilidad de f en $x = 0$ sólo para el caso $a = 1, \ b \in \mathbb{R}$.

f es derivable en $x=0$ siempre y cuando exista $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$.

$\lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}-1}{h} = 0.$

$\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{e^{-h}\cos(bh)-1}{h} = -1, \forall b \in \mathbb{R}.$

Puesto que estos dos límites laterales no coinciden, no existe ningún valor de a y b que haga a f derivable en $x=0$.

De esta forma, no existe ningún valor de a y b que haga a f derivable en $\mathbb{R}$.

2.3 En el caso $a=b=0$, la función f toma la siguiente forma:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & x < 0 \\ e^{-x} & x \geq 0. \end{array} \right.$$

De este modo

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 e^{-x}dx = -\left. e^{-x} \right]_0^2 = 1 - e^{-2}.$$

MATEMÁTICAS II (GIB) – 25 de junio de 2012 E3 (3,5 puntos)

Apellidos...
Nombre.............................. *DNI* .... *Grupo* ....

Nota E3

- Puntuación de este problema sobre el total del examen: **3,5 puntos.**

3.1 (1 punto). Calcule los extremos relativos (o locales) de $f(x,y) = x^2 + \cos x + y^2$.

Nota: la ecuación $2x = \operatorname{sen} x$ *tiene a* $x = 0$ *como única solución real.*

3.2 (1,5 puntos). Calcule el volumen del sólido comprendido entre las superficies $z = -\sqrt{x^2+y^2}$ y $z = \sqrt{x^2+y^2}$ en la región definida por la desigualdad $x^2 + y^2 - 4x \leq 0$.

3.3 (1 punto). Resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 - \cos x \operatorname{sen} x}{y(1-x^2)},\ y(0) = 2.$$

Solución.

3.1 Los posibles extremos relativos (o locales) de la función están necesariamente entre sus puntos críticos, definidos por las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - \operatorname{sen} x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y = 0. \end{aligned}$$

Habida cuenta de la ecuación $2x = \operatorname{sen} x$ tiene a $x = 0$ como única solución real, la única solución del sistema anterior es $x = y = 0$.

Para determinar si el punto crítico ubicado en $(0,0)$ es un extremo, evaluemos la matriz hessiana en el origen:

$$\left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f^2}{\partial x^2} & \frac{\partial f^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial f^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial f^2}{\partial y^2} \end{pmatrix}\right|_{(0,0)} = \left.\begin{pmatrix} 2 - \cos x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En el punto crítico la matriz hessiana es diagonal y los elementos de la diagonal principal son positivos, por lo que $(0,0)$ es un mínimo local. No hay otros mínimos locales, ni existen máximos locales.

3.2 El volumen viene dado por la integral triple:

$$I = \iiint_T dx\, dy\, dz$$

siendo T la región del espacio cuyos puntos (x,y,z) cumplen $-\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \leq x \leq 4$ y $-\sqrt{4-(x-2)^2} \leq y \leq \sqrt{4-(x-2)^2}$

Con lo que la integral queda:

$$I = \int_0^4 \int_{-\sqrt{4-(x-2)^2}}^{\sqrt{4-(x-2)^2}} \int_{-\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}} dz\, dy\, dx$$

Integrando con respecto a z tenemos:

$$I = \int_0^4 \int_{-\sqrt{4-(x-2)^2}}^{\sqrt{4-(x-2)^2}} 2\sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx$$

Para resolver esta integral podemos hacer un cambio a coordenadas polares, con lo que la región del plano cuyos puntos (x, y) cumplen $0 \le x \le 4$ y $-\sqrt{4-(x-2)^2} \le y \le \sqrt{4-(x-2)^2}$ quedaría como la región del plano cuyos puntos (r, θ) cumplen $0 \le r \le 4\cos\theta$ y $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, debido a que $x^2+y^2-4x \le 0$, sustituyendo $x = r\cos\theta$ e $y = r \operatorname{sen}\theta$ da $r^2 - 4r\cos\theta \le 0 \Rightarrow 0 \le r \le 4\cos\theta$ y $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

Sustituimos e integramos:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4\cos\theta} 2\sqrt{r^2} r\, dr\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4\cos\theta} 2r^2\, dr\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{128\cos^3\theta}{3}\, d\theta =$$
$$= \frac{128}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta - \operatorname{sen}^2\theta\cos\theta)\, d\theta = \frac{128}{3}\left(\operatorname{sen}\theta - \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3}\right)_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$= \frac{128}{3}\left(1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)\right) = \frac{128}{3}\frac{4}{3} = \frac{512}{9}.$$

3.3 Al escribir la ecuación diferencial en la forma

$$(\cos x \operatorname{sen} x - xy^2)dx + y(1-x^2)dy = 0$$

reconocemos que es una ecuación diferencial exacta porque:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2xy = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

siendo $P = \cos x \operatorname{sen} x - xy^2$ y $Q = y(1-x^2)$.

Llamando u a la función potencial tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q = y(1-x^2)$$

Integrando con respecto a y obtenemos u

$$u(x,y) = \frac{y^2}{2}(1-x^2) + h(x)$$

Derivando ahora esta expresión con respecto a x

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -xy^2 + h'(x) = P = \cos x \operatorname{sen} x - xy^2$$

Luego $h'(x) = \cos x \operatorname{sen} x$. Al integrar se obtiene

$$h(x) = \int \cos x \operatorname{sen} x\, dx = -\frac{1}{2}\cos^2 x - C_1 \tag{1}$$

Por lo tanto

$$u(x,y) = \frac{y^2}{2}(1-x^2) - \frac{1}{2}\cos^2 x - C_1$$

y una solución implícita de la ecuación diferencial sera:

$$\frac{y^2}{2}(1-x^2) - \frac{1}{2}\cos^2 x = C_1$$

o, llamando $C = 2C_1$

$$y^2(1-x^2) - \cos^2 x = C$$

Imponiendo ahora la condición inicial $y(0) = 2$ obtenemos C

$$4(1-0) - \cos^2 0 = C \Rightarrow C = 3$$

Una solución implícita del problema de valor inicial será entonces

$$y^2(1-x^2) - \cos^2 x = 3. \tag{2}$$

Observación. La integral

$$h(x) = \int \cos x \operatorname{sen} x \, dx$$

que aparece en (1) puede también escribirse como

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x + C_2. \tag{3}$$

Obsérvese que la identidad $\operatorname{sen}^2 + \cos^2 x = 1$ implica que $-\dfrac{1}{2}\cos^2 x$ y $\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x$ difieren en una constante.

Procediendo de esta manera, la solución de la ecuación diferencial tomaría la forma

$$y^2(1-x^2) + \operatorname{sen}^2 x = \tilde{C}$$

y con la condicion inicial $y(0) = 2$ se obtiene $\tilde{C} = 4$, por lo que otra forma de expresar la solución del problema de valor inicial es

$$y^2(1-x^2) + \operatorname{sen}^2 x = 4. \tag{4}$$

Esta última expresión puede obtenerse también sustituyendo $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ en (2). Es importante observar que (2) y (4) *no* son dos soluciones diferentes del problema de valor inicial, que tiene solución única, sino dos formas diferentes de escribir la misma solución.