PEC1. 3 de Abril de 2013

1.- *(2 ptos.)* Responder razonadamente a las siguientes preguntas

a) ¿El número de particiones de cien en partes cinco, veinte, veinticinco y cincuenta es el coeficiente de x^{100} en el desarrollo en serie de

$$(1-x^5)^{-1}(1-x^{20})^{-1}(1-x^{25})^{-1}(1-x^{50})^{-1}?$$

b) ¿Es cierto que

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}?$$

2.- *(2 ptos.)* Construir una prueba de refutación por resolución para demostrar que las premisas $p \to (r \wedge s)$, $r \to (t \vee v)$, $t \to \neg p$ y $(v \vee r) \to \neg s$ conducen a $\neg p$.

3.- *(2 ptos.)* Cuatro personas se reparten las cuarenta cartas de la baraja española recibiendo cada una diez cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que una de entre ellas reciba los cuatro ases? ¿Y de que cada uno reciba un as?

4.- *(2 ptos.)* Andrés, Beatriz, Carlos, David y Eugenia se van a repartir cuarenta monedas de un euro. ¿De cuántas formas lo pueden hacer si todos han de recibir como mínimo dos monedas y tres de entre ellos como mucho siete?

PEC1. 19 de Marzo de 2014

1.- *(2 ptos.)* Responder razonadamente a las siguientes preguntas

a) ¿Cuál es la función generadora de $p(n|\text{cada parte como máximo dos veces})$? ¿Y la de $p(n|\text{cada parte es potencia de dos})$?

b) Sean m, n y r enteros no negativos con $r \leq m$ y $r \leq n$. ¿Es cierto que

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}?$$

2.- *(2 ptos.)* Formalizar y estudiar la validez del siguiente argumento:

Si un triángulo tiene tres ángulos, un cuadrado tiene cuatro ángulos rectos. Un triángulo tiene tres ángulos y su suma vale dos ángulos rectos. Si los rombos tienen cuatro ángulos rectos, los cuadrados no tienen cuatro ángulos rectos. Por tanto, los rombos no tienen cuatro ángulos rectos.

3.- *(2 ptos.)* ¿Cuántas palabras en el alfabeto $\{a, b, c\}$ contienen ocho aes, tres bes y cinco ces? ¿Cuántas de entre las anteriores no contienen dos aes consecutivas?

4.- *(2 ptos.)* ¿Cuántos números de diez cifras decimales con a lo más dos ceros y al menos dos doses, verifican que la suma de sus cifras es igual a treinta?

PEC2. 7 de Mayo de 2014

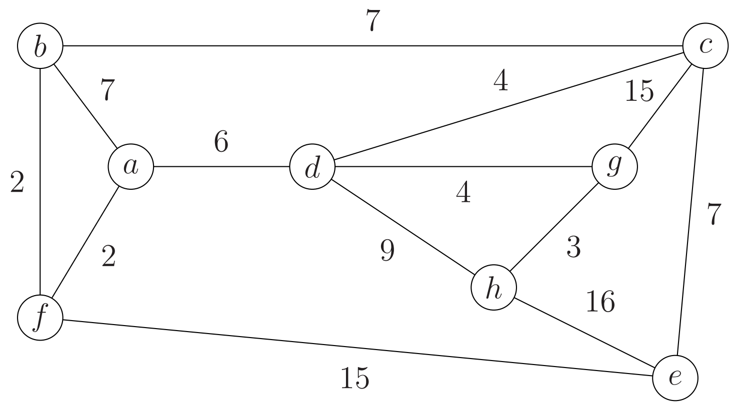
1.- *(2 ptos.)* Responder razonadamente a las siguientes preguntas

a) ¿Puede un árbol de orden mil tener únicamente vértices de grados uno y cuatro?

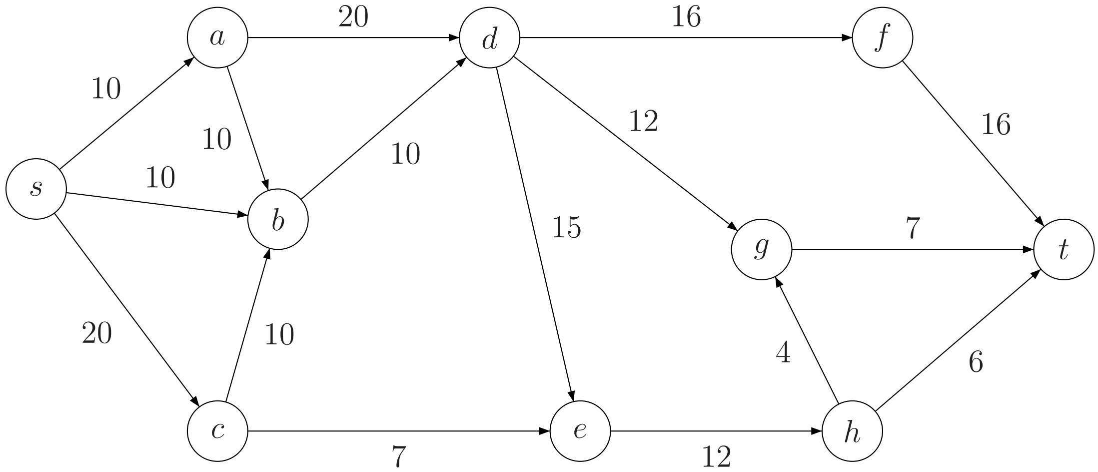
b) La ecuación característica de una recurrencia lineal homogénea posee tres soluciones, 2, -1 y 1 con multiplicidades 3, 2 y 1 respectivamente. ¿Cuál es el orden de la recurrencia? ¿Cuál es la solución general de la recurrencia?

2.- *(2 ptos.)* Encontrar una relación de recurrencia lineal que nos permita calcular las cadenas binarias de longitud n que no contienen tres unos consecutivos. ¿Cuáles son las condiciones iniciales?

3.- *(2 ptos.)* Utilizando el algoritmo de Dijkstra, encontrar un camino de longitud mínima entre los vértices f y c del grafo dado. Indicar cuál es esa distancia mínima. (En cada paso del algoritmo, indicar el estado de todos los elementos que intervienen.)



4.- *(2 ptos.)* Determinar un flujo máximo y un corte mínimo en la siguiente red comenzando por flujo cero. (Indicar, en cada paso, el estado de los elementos que intervienen.)



Examen Extraordinario. 27 de Junio de 2014

1.- *(2 ptos.)* Responder razonadamente a las siguientes preguntas

a) ¿Qué función generadora y qué coeficiente de la misma permiten contar el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 25$, con las restricciones $2 \leq x_1 \leq 5$ y $x_3 \geq 3$?

b) ¿En qué consiste el método de refutación por resolución de Robinson?

c) ¿Puede un árbol de orden mil tener únicamente vértices de grados uno y cuatro?

2.- *(2 ptos.)* Estudiar la validez del siguiente argumento formalizándolo previamente:

Si soy honrado, soy tonto.
Yo soy honrado o tonto, o Pedro tenía razón y ese vendedor es un ladrón.
Yo no soy tonto y ese vendedor es un ladrón.

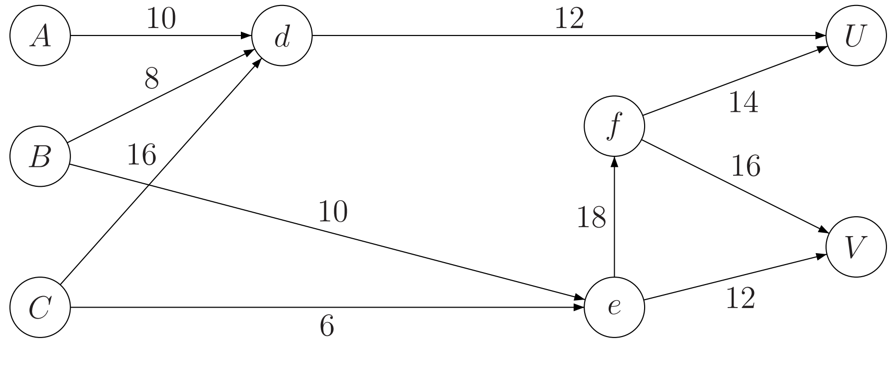
$\therefore$ Pedro tenía razón.

3.- *(2 ptos.)* ¿De cuántas maneras puede acabar una carrera de caballos con cinco participantes si se admiten empates?

4.- *(2 ptos.)* Calcular todas las soluciones de la recurrencia:

$$a_n = 4a_{n-1} - 5a_{n-2} + 2a_{n-3} + 2^n$$

5.- *(2 ptos.)* Las empresas A, B y C fabrican un producto que se transporta, a través de la red que muestra la figura, a los mercados U y V. Las capacidades de las vías de transporte aparecen en la gráfica. Modelizar la red y determinar un flujo máximo y un corte mínimo.



PEC1. 8 de Abril de 2015

1.- *(2 ptos.)* Responder razonadamente a las siguientes preguntas

a) ¿Es la regla de inferencia *resolución* caso particular del silogismo?

b) ¿Cuál es la función generadora de $p(n|\text{cada parte como máximo dos veces})$? ¿Y la de $p(n|\text{cada parte es potencia de dos})$?

2.- *(2 ptos.)* Construir una prueba de refutación por resolución para demostrar que las premisas $t \longrightarrow q$, $p \longrightarrow (r \vee q)$, $\neg p \longrightarrow (\neg s \wedge q)$ y $(p \vee r) \longrightarrow t$ conducen a $s \longrightarrow q$.

3.- *(2 ptos.)* Se reparten las cincuenta y dos cartas de una baraja francesa entre cuatro personas de tal forma que cada una reciba trece. ¿Cuál es la probabilidad de que haya dos personas con dos reyes cada una? (**NOTA**: La baraja francesa contiene, exactamente, cuatro reyes.)

4.- *(2 ptos.)* ¿Cuántos números enteros no negativos existen con diez cifras decimales de tal forma que tengan exactamente tres doses y la suma de sus dígitos sea igual a treinta?

PEC1. 8 de Abril de 2015

1.- *(2 ptos.)* Responder razonadamente a las siguientes preguntas

a) ¿Puede toda fórmula del cálculo proposicional reducirse a una equivalente que contenga como únicos conectivos $\neg$ y $\vee$?

b) ¿El número de particiones de cien en partes cinco, veinte, veinticinco y cincuenta es el coeficiente de x^{100} en el desarrollo en serie de

$$(1-x^5)^{-1}(1-x^{20})^{-1}(1-x^{25})^{-1}(1-x^{50})^{-1}?$$

2.- *(2 ptos.)* Construir una prueba de refutación por resolución para demostrar que las premisas $\neg(q \vee t)$, $(s \longrightarrow r) \vee (s \longrightarrow t)$ y $r \longrightarrow (p \wedge q)$ conducen a $\neg s$.

3.- *(2 ptos.)* Se colocan, en una balda, veinte libros distintos de diez autores diferentes a razón de dos libros por autor. ¿De cuántas maneras se pueden colocar los libros de tal forma que los libros de cada autor estén juntos? ¿De cuántas formas si los libros de al menos un autor han de estar juntos?

4.- *(2 ptos.)* Calcular la probabilidad de que lanzando un dado siete veces, salgan al menos dos doses, a lo más un seis y la suma de las tiradas sea veinte.

PEC2. 19 de Mayo de 2015

1.- *(2 ptos.)* Responder razonadamente a las siguientes preguntas

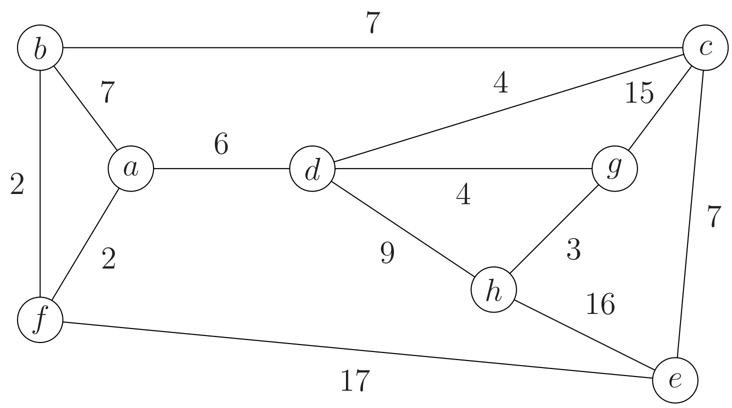
a) ¿Es cierto que un árbol $m-$ario completo con n vértices posee $\frac{(m-1)n+1}{m}$ vértices de grado 1?

b) ¿De qué relación de recurrencia lineal homogénea es solución general

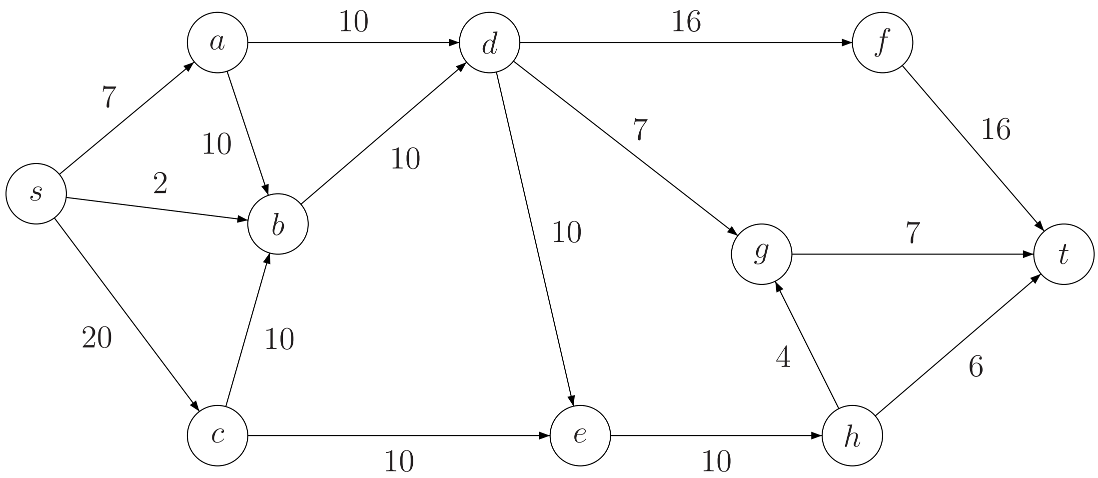
$$a_n = A2^n + Bn2^n + Cn^2 2^n + D?$$

2.- *(2 ptos.)* Encontrar una relación de recurrencia que permita contar el número de cadenas binarias de longitud n que contengan la cadena 01. ¿Cuáles son las condiciones iniciales?

3.- *(2 ptos.)* Utilizando el algoritmo de Dijkstra, encontrar un camino de longitud mínima entre los vértices a y e del grafo dado. Indicar cuál es esa distancia mínima. (En cada paso del algoritmo, indicar el estado de todos los elementos que intervienen.)



4.- *(2 ptos.)* Determinar un flujo máximo y un corte mínimo en la siguiente red comenzando por flujo cero. (Indicar, en cada paso, el estado de los elementos que intervienen.)



Examen Extraordinario. 26 de Junio de 2015

1.- *(2 ptos.)* Responder razonadamente a las siguientes preguntas

a) ¿En qué consiste el método de refutación por resolución de Robinson?

b) ¿Es cierto que

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}?$$

c) ¿Es cierto que un árbol $m-$ario completo con n vértices posee $\frac{(m-1)n+1}{m}$ vértices de grado 1?

2.- *(2 ptos.)* Estudiar la validez del siguiente argumento formalizándolo previamente:

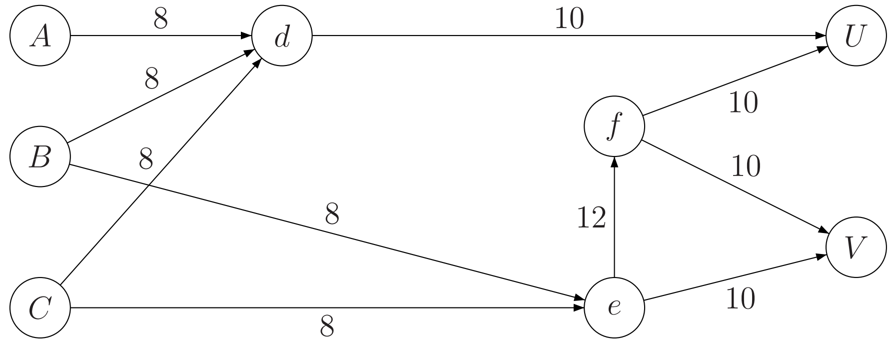
Si la tormenta continúa o anochece, nos quedaremos a cenar o a dormir; si nos quedamos a cenar o a dormir no iremos mañana al concierto; pero sí iremos mañana al concierto. Así pues, la tormenta continúa.

3.- *(2 ptos.)* Sea S un conjunto con n elementos. ¿Cuántos pares ordenados (A, B) existen tales que A y B son subconjuntos de S y $A \subseteq B$?

4.- *(2 ptos.)* Calcular la solución general de la recurrencia

$$a_n = 7a_{n-1} - 16a_{n-2} + 12a_{n-3} + 3^{n-1}.$$

5.- *(2 ptos.)* Las empresas A, B y C fabrican un producto que se transporta, a través de la red que muestra la figura, a los mercados U y V. Las capacidades de las vías de transporte aparecen en la gráfica. Modelizar la red y determinar un flujo máximo y un corte mínimo.



PEC1. 30 de Marzo de 2016

1.- *(2 ptos.)* Responder, razonadamente, a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la función generadora de $p(n|\text{cada parte como máximo tres veces})$? ¿Y la de $p(n|\text{cada parte es potencia de tres})$?

b) ¿Las fórmulas $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$ y $(\exists x\ P(x)) \wedge (\exists x\ Q(x))$ son lógicamente equivalentes?

2.- *(2 ptos.)* Estudiar la validez del siguiente argumento formalizándolo previamente:

Si la tormenta continúa, no voy al concierto.
Si voy a verte, ceno fuera o no voy al concierto.
Si no voy a verte, no me quedo en casa y no voy al concierto.
Si voy a verte o ceno fuera, la tormenta continúa.

$\therefore$ *Si me quedo en casa, no voy al concierto.*

3.- *(2 ptos.)* Queremos colocar los sesenta tomos de una enciclopedia en cuatro estantes. ¿De cuántas formas puede hacerse si en dos estantes pueden caber hasta veinticinco tomos y en los otros dos a lo más treinta?

4.- *(2 ptos.)* Sea S un conjunto con n elementos. ¿Cuántos pares ordenados (A, B) existen tales que A y B son subconjuntos de S y $A \subseteq B$?

PEC2. 11 de Mayo de 2016

1.- *(2 ptos.)* Responder razonadamente a las siguientes preguntas:

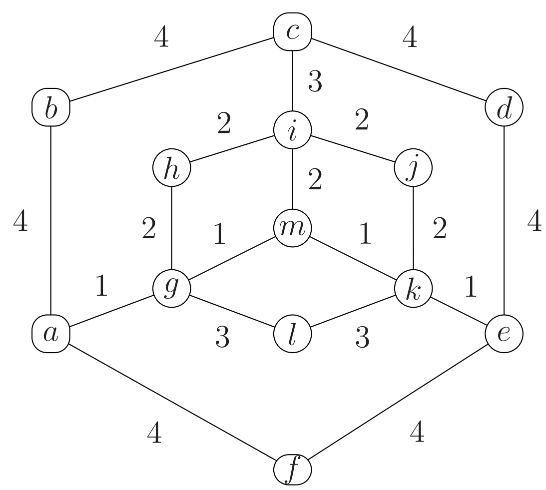
a) ¿Dos grafos homeomorfos pueden tener número cromático distinto?

b) ¿De qué relación de recurrencia lineal homogénea es solución general

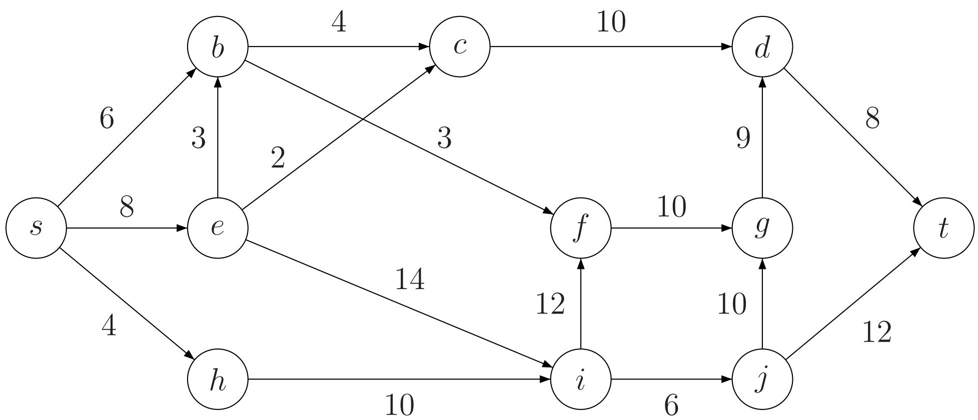
$$a_n = A2^n + Bn2^n + Cn^2 2^n + D?$$

2.- *(2 ptos.)* Probar, usando el principio de inducción, que un tablero de ajedrez de tamaño $2^n \times 2^n$ al que se le ha quitado un cuadro, puede rellenarse con fichas en forma de L que ocupan tres cuadros. Obtener una relación de recurrencia y las condiciones iniciales que permiten calcular el número de fichas necesarias para rellenar dicho tablero. Resolverla.

3.- *(2 ptos.)* Utilizando el algoritmo de Dijkstra, encontrar un camino de longitud mínima entre los vértices a y j del grafo dado. Indicar cuál es esa distancia mínima. (En cada paso del algoritmo, indicar el estado de todos los elementos que intervienen.)



4.- *(2 ptos.)* Determinar un flujo máximo y un corte mínimo para la red dada. Comenzar con flujo inicial igual a cero.



Examen Extraordinario. 1 de Julio de 2016

1.- *(2 ptos.)* Responder razonadamente a las siguientes preguntas:

a) ¿Son lógicamente equivalentes las fórmulas

$$\forall x\ (P(x) \vee Q(x)) \text{ y } (\forall x\ P(x)) \vee (\forall x\ Q(x))?$$

b) Sean m, n y r enteros no negativos con $r \leq m$ y $r \leq n$. ¿Es cierto que

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}?$$

c) ¿Pueden dos grafos homeomorfos tener distinto número cromático?

2.- *(2 ptos.)* ¿De las fórmulas

$$p \longrightarrow \neg q$$

$$r \longrightarrow (s \vee \neg q)$$

$$\neg r \longrightarrow (\neg t \wedge \neg q)$$

$$\text{y} \quad (r \vee s) \longrightarrow p$$

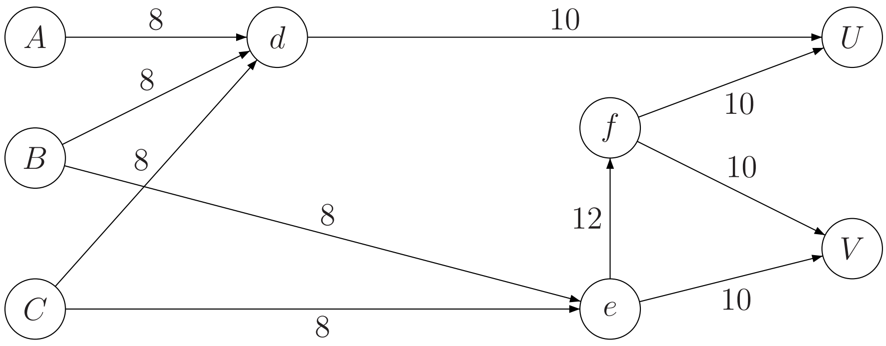
se deduce $t \longrightarrow \neg q$? Usar el método de refutación por resolución de Robinson para responder a esta pregunta.

3.- *(2 ptos.)* A lo largo de los años, un grupo de amigos ha ganado treinta competiciones de fútbol sala de su barrio. Para colocar los trofeos correspondientes, que ocupan todos el mismo espacio, disponen de cuatro estantes. ¿De cuántas formas pueden colocar los trofeos si en dos estantes pueden caber hasta doce trofeos y en los otros dos a lo más siete?

4.- *(2 ptos.)* Calcular todas las soluciones de la recurrencia

$$a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} - 4a_{n-3} + 4a_{n-4} + n.$$

5.- *(2 ptos.)* Las empresas A, B y C fabrican un producto que se transporta, a través de la red que muestra la figura, a los mercados U y V. Las capacidades de las vías de transporte aparecen en la gráfica. Modelizar la red y determinar un flujo máximo y un corte mínimo.



Examen Extraordinario. 6 de Julio de 2017

1.- *(2 ptos.)* Formalizar y estudiar la corrección del siguiente argumento:

Si el lunes como manzana de postre, el lunes como pera de postre. El lunes como manzana de postre y la manzana es del supermercado de debajo de mi casa. Si el martes como plátano de postre, el martes no como manzana de postre. Por tanto, el martes no como plátano de postre.

2.- *(2 ptos.)* Disponemos de 8 colores para pintar un mural dividido en 3 columnas; cada una de ellas se ha de pintar de un color distinto. ¿Cuántos murales se pueden confeccionar incluyendo el color verde siempre? ¿Y si quisiéramos que apareciera el azul pero no el negro?

3.- *(1 ptos.)* Sea a_n el número de palabras de longitud n formadas con las letras $\{a, b\}$, que no tienen dos aes consecutivas. Encontrar una relación de recurrencia para calcular a_n y resolverla.

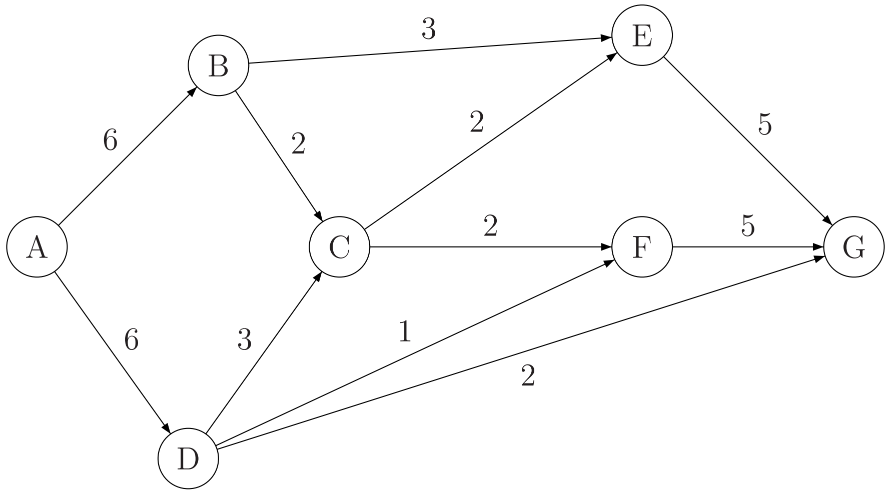
4.- *(2 ptos.)* Un padre quiere distribuir 40 golosinas (20 con sabor a fresa y 20 con sabor a menta) entre sus cuatro hijos, de modo que cada uno obtenga entre dos y siete golosinas de cada tipo. ¿De cuántas maneras puede hacerlo? Resolver el problema usando funciones generadoras.

5.- *(1 ptos.)* Se quieren programar los exámenes finales de 7 asignaturas (por simplicidad, numeramos las asignaturas del 1 al 7). Los alumnos están divididos en grupos (de la A a la F), cada uno de los cuales debe realizar los exámenes de las asignaturas que se indican en la siguiente tabla:

Asignatura	1	2	3	4	5	6	7
Grupos	A	A, B	A,B,C	A,B,C,D	B,D,E	C,D,E,F	A,B,C,E,F

¿Cuántas franjas horarias distintas será necesario programar, como mínimo, para que los alumnos puedan realizar todos los exámenes de las asignaturas que les corresponden? Razonar la respuesta.

6.- *(2 ptos.)* Una compañía de petróleo cuenta con una red de oleoductos que utiliza para transportar petróleo desde su refinería (fuente) hasta diversos centros de almacenamiento.
Una parte de la red de oleoductos es la siguiente:



Como puede observarse, las capacidades de flujo son variables como resultado de los diversos diámetros de las tuberías que implica diferentes capacidades en miles de litros por hora.

1. Si la empresa desea abastecer el almacén G, ¿cuál es el flujo máximo con el cual puede abastecerlo?

2. Si se presentara una ruptura o cierre en el conducto que va de B a C. ¿Cuál sería ahora el flujo máximo para el sistema?

Importante: En cada paso hay que indicar el estado de los elementos que intervienen (tablas, grafos, etc.)

PEI
1. 21 de Marzo de 2018

1.- *(2 ptos.)* Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o no razonando adecuadamente la respuesta:

a) Toda fórmula del Cálculo Proposicional es lógicamente equivalente a otra fórmula en la que el único conectivo que aparece es | (NAND).

b) El número de m-combinaciones con repetición de un conjunto con $n$elementos es igual a

$$\binom{n+m-1}{m}.$$

2.- *(2 ptos.)* ¿De las fórmulas

$$\neg(q \vee t)$$
$$(s \longrightarrow r) \vee (s \longrightarrow t) \vee (s \longrightarrow \neg p)$$
$$r \longrightarrow (p \wedge q)$$
$$\text{y} \quad s \longrightarrow p$$

se deduce $\neg s$? Usar el método de refutación por resolución de Robinson para responder a esta pregunta.

3.- *(2 ptos.)* Tenemos once libros ordenados alfabéticamente en una estantería. ¿De cuántas formas se pueden reordenar si a lo más dos libros pueden quedar en la posición original?

4.- *(2 ptos.)* Un examen consta de diez preguntas cuyo valor es un número entero positivo. Si la puntuación total del examen es de cien, dos preguntas han de valer diez puntos cada una y el resto al menos cinco y como mucho veinte, ¿cuántas formas distintas hay de asignar un valor a cada pregunta?

PEI 2. 15 de Mayo de 2018

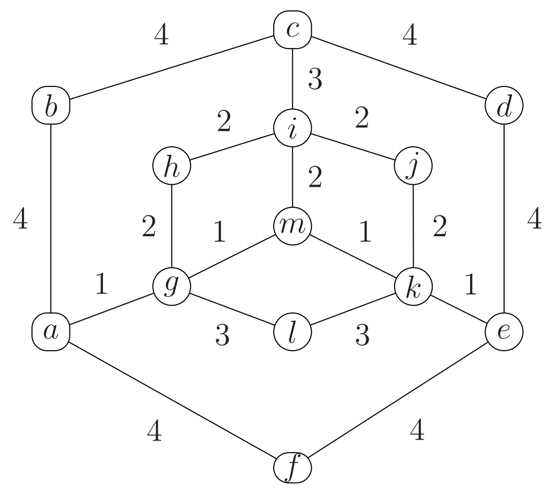
1.- *(2 ptos.)* Responder razonadamente a las siguientes preguntas:

a) ¿Dos grafos homeomorfos pueden tener número cromático distinto?

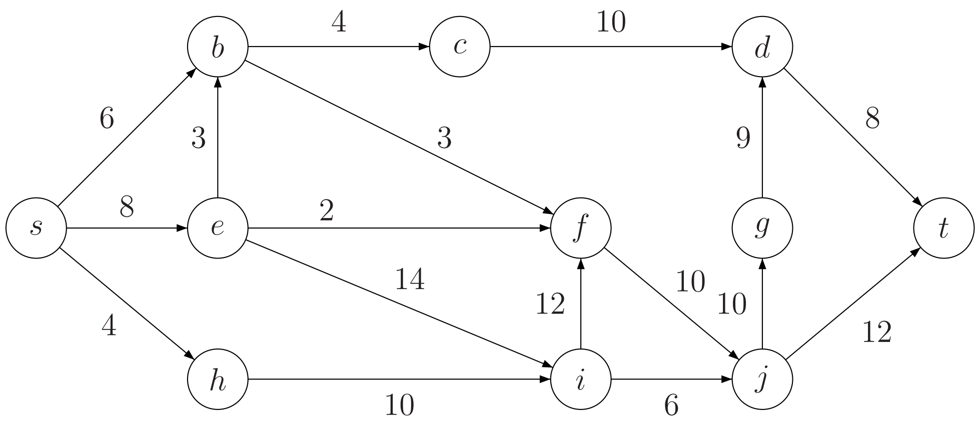
b) ¿Para todo número natural n mayor o igual que uno es $7^n - 6n - 1$ múltiplo de 36?

2.- *(2 ptos.)* Encontrar una relación de recurrencia que permita contar el número de enteros positivos de a lo más n dígitos que, en base decimal, contienen dos treses consecutivos. ¿Cuáles son las condiciones iniciales?

3.- *(2 ptos.)* Utilizando el algoritmo de Dijkstra, encontrar un camino de longitud mínima entre los vértices c y g del grafo dado. Indicar cuál es esa distancia mínima. (En cada paso del algoritmo, indicar el estado de todos los elementos que intervienen.)



4.- *(2 ptos.)* Determinar un flujo máximo y un corte mínimo para la red dada. Comenzar con flujo inicial igual a cero.



Examen Extraordinario. 28 de Junio de 2018

1.- *(2 ptos.)* Responder razonadamente a las siguientes preguntas:

a) ¿Las fórmulas $\exists x\ (A(x) \wedge B(x))$ y $(\exists x\ (A(x)) \wedge (\exists x\ (B(x))$ son lógicamente equivalentes?

b) ¿Qué coeficiente de qué función generadora calcula el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 25$ que verifican que $1 \leq x_1 \leq 7$, que x_2 es par y que x_5 es múltiplo de nueve?

c) Un circuito euleriano en un grafo no dirigido G es un circuito simple que contiene todas las aristas de G. ¿En un grafo no dirigido que posee un circuito euleriano son todos los vértices de grado par?

2.- *(2 ptos.)* Estudiar la validez del siguiente argumento formalizándolo previamente:

Si España gana el mundial y me voy de fiesta, faltaré a mi cita.
Si falto a mi cita y Brasil no gana el mundial, no iré a casa.
Si Alemania gana el mundial, Brasil no lo gana y me iré a casa.

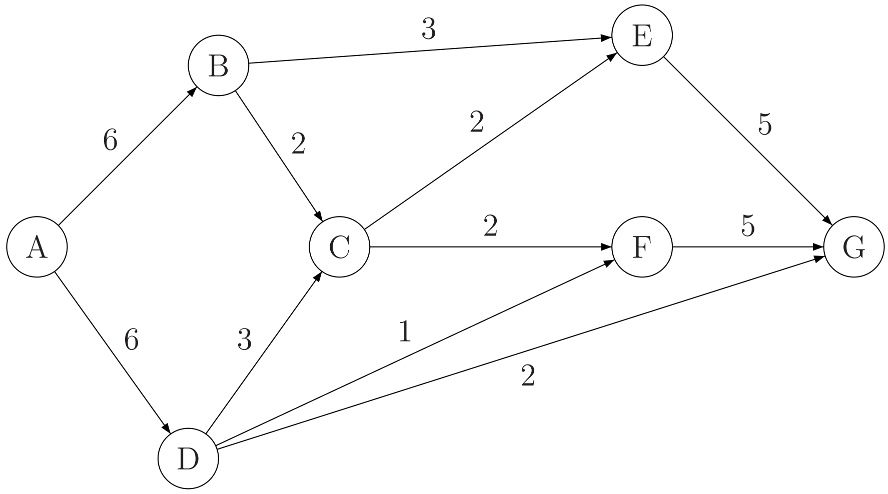
$\therefore$ Si España gana el mundial y me voy de fiesta, Alemania no gana el mundial.

3.- *(2 ptos.)* Calcular, sin utilizar relaciones de recurrencias lineales, cuántos números enteros positivos de a lo más cinco cifras en base decimal contienen dos treses consecutivos.

4.- *(1 pto.)* Encontrar una relación de recurrencia que permita contar el número de enteros positivos de a lo más n dígitos que, en base decimal, contienen dos treses consecutivos. ¿Cuáles son las condiciones iniciales?

5.- *(1 pto.)* En una empresa hay seis comisiones que se reúnen una vez al mes. Si representamos los miembros de las mismas por las iniciales de sus apellidos, las comisiomes son: $C_1 = \{a, b, z\}$, $C_2 = \{l, r\}$, $C_3 = \{a, r, z\}$, $C_4 = \{l, r, z\}$, $C_5 = \{a, b\}$ y $C_6 = \{b, r, z\}$. ¿Cuál es mínimo número de reuniones distintas que se necesitan para asegurar que ningún miembro es convocado para asistir a dos reuniones al mismo tiempo?

6.- *(2 ptos.)* Una compañía de petróleo cuenta con una red de oleoductos que utiliza para transportar petróleo desde su refinería (fuente) hasta diversos centros de almacenamiento.
Una parte de la red de oleoductos es la siguiente:



Como puede observarse, las capacidades de flujo son variables como resultado de los diversos diámetros de las tuberías que implica diferentes capacidades en miles de litros por hora.

1. Si la empresa desea abastecer el almacén G, ¿cuál es el flujo máximo con el cual puede abastecerlo?

2. Si se presentara una ruptura o cierre en el conducto que va de B a C. ¿Cuál sería ahora el flujo máximo para el sistema?

Importante: En cada paso hay que indicar el estado de los elementos que intervienen (tablas, grafos, etc.). Para responder a la primera pregunta, comenzar con flujo cero.