Comunicación de Datos

21 de octubre de 2013

Nombre: ______________________ **D.N.I.**: ____________

1. (2 puntos) De un grupo de estudiantes, el 25 % no están convenientemente preparados para la universidad. Sin embargo, el 25 % de estos son aceptados tras una prueba de selección, que es superada por el 50 % de los estudiantes.

a) Al oír el resultado de la prueba, ¿cuánta información recibe un estudiante que está suficientemente preparado?

b) Ídem si la selección se decide tirando una moneda al aire.

a) Un estudiante preparado supera la prueba de selección con una probabilidad p tal que

$$\frac{3}{4}p + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

esto es, $p = 7/12$, de modo que obtiene una información igual a $H(7/12) \approx 0{,}98$ bits.

b) Si la selección es completamente aleatoria hay igual probabilidad de ser aceptado o rechazado, con independencia de la preparación. Así entonces, la información recibida es $H(1/2) = 1$ bit.

2 (1 punto). ¿Tienen redundancia los mensajes de una fuente decimal de vector de probabilidades

$$\mathbf{p} = (1/4, 1/4, 1/16, \ldots, 1/16)?$$

¿Puede cuantificarla? Razónelo.

En la medida en que todo mensaje de una fuente discreta es una representación simbólica, una fuente dada es un codificador específico. En este caso el alfabeto es decimal y el código es una asignación uno a uno. Como las probabilidades no son potencias decimales, esta fuente (o código) posee redundancia, de valor igual a la diferencia entre la longitud $L = 1$ y la entropía decimal $H_{10}(X)$, que es la mínima longitud posible.

$$L - H_{10}(X) \approx 0{,}097.$$

3. (2 puntos) Calcule la eficiencia de los códigos compactos cuaternarios de los conjuntos de símbolos con probabilidades dadas por los siguientes vectores:

a) $\mathbf{p} = (1/6, 1/6, 1/12, 1/12, 1/12, 1/12, 1/18, 1/18, 1/18, 1/18, 1/18, 1/18)$

b) $p_i = 1/512$ para todo i.

a) La codificación Huffman de estos símbolos —una de ellas— tiene la estructura

$$\boxed{1/6, \boxed{1/6, 1/12, 1/12, 1/12}, \boxed{1/12, 1/18, 1/18, 1/18}, \boxed{1/18, 1/18, 1/18}}.$$

Por tanto, el código compacto tiene todas sus palabras de longitud 2, excepto la correspondiente a uno de los símbolos con probabilidad 1/6, que es de longitud 1. La longitud del código es $L = 2 - 1/6 = 11/6$ y la eficiencia

$$\eta = \frac{H_4(X)}{L} \approx 94\,\%.$$

b) Un código compacto cuaternario para esta fuente uniforme consta de 170 palabras de longitud 4 y 342 palabras de longitud 5. Tiene una longitud de $L \approx 4{,}66$ y su eficiencia es $\eta = \log_4 512/L \approx 96{,}4\,\%$.

4. (1,5 puntos) Obtenga la capacidad del canal con matriz de probabilidades de transición

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n & \varepsilon & \varepsilon & & & & \\ & & & & \varepsilon & \varepsilon & p_n & \dots & p_2 & p_1 \end{bmatrix}.$$

Si se calcula $I(X;Y) = H(X) - H(X \mid Y)$ tenemos que

$$H(X \mid Y) = 2\varepsilon H(X)$$

ya que sólo hay incertidumbre acerca del símbolo transmitido para dos de los posibles símbolos de salida del canal. En consecuencia $I(X;Y) = (1-2\varepsilon)H(X)$ es máxima con entradas equiprobables y la capacidad del canal es $C = 1 - 2\varepsilon$ bits/símbolo.
Trabajando de una manera más convencional, si calculamos $I(X;Y) = H(Y) - H(Y \mid X)$ tenemos que

$$H(Y \mid X) \overset{(1)}{=} H(p_1, p_2, \dots, \varepsilon, \varepsilon) \overset{(2)}{=} H(2\varepsilon) + 2\varepsilon \log 2 + (1-2\varepsilon)H\big(\frac{p_1, p_2, \dots, p_n}{1-2\varepsilon}\big)$$

donde (1) es por tener Q filas con los mismos elementos y (2) resulta de aplicar la propiedad de partición; y

$$H(Y) = H\big(\alpha p_1, \dots, \alpha p_n, \varepsilon, \varepsilon, \overline{\alpha} p_1, \dots, \overline{\alpha} p_n\big) \overset{(3)}{=} H(2\varepsilon) + 2\varepsilon \log 2 + (1-2\varepsilon)H\big(\frac{\alpha p_1, \dots, \alpha p_n, \overline{\alpha} p_1, \overline{\alpha} p_n}{1-2\varepsilon}\big)$$
$$\overset{(4)}{=} H(2\varepsilon) + 2\varepsilon \log 2 + (1-2\varepsilon)\big(H(\alpha) + H\big(\frac{p_1, \dots, p_n}{1-2\varepsilon}\big)\big)$$

donde (3) es por la aplicación de la propiedad de partición y (4) por una segunda aplicación de la misma propiedad. Cancelando términos comunes se llega a $I(X;Y) = (1-2\varepsilon)H(\alpha)$, que es máxima si $\alpha = 1/2$, es decir, con entradas equiprobables. La capacidad es $C = 1 - 2\varepsilon$ bits.

5. (1,5 puntos) En cierto sistema de comunicaciones, los mensajes de una fuente discreta sin memoria X_1 de entropía 10 bits por símbolo y tasa de transmisión v_1 se transmiten a través de un canal binario de capacidad 0,9 bits/símbolo y régimen 1000 símbolos/s. La salida de este canal se multiplexa con otras dos fuentes, X_2 y X_3, de entropías $H(X_2) = H(X_3) = 10$ bits por símbolo y velocidades $v_2 = 50$ y $v_3 = 25$ símbolos/s, y los mensajes multiplexados se transmiten por otro canal de capacidad C_2 cuya tasa de transmisión es de 5000 símbolos/s. Si el receptor ha de recuperar fidedignamente los mensajes de las tres fuentes, acote los valores de v_1 y C_2.

La transmisión es fiable si lo es por los dos canales. Para que lo sea por el primero debe cumplirse que

$$v_1 H(X_1) < v_{c_1} C_1 \Rightarrow v_1 < \frac{v_{c_1} C_1}{H(X_1)} = 90 \text{ símbolos/s}; \tag{1}$$

para que lo sea por el segundo, sobre el que se multiplexan las fuentes X_2 y X_3 más la salida del primer canal, es necesario y suficiente que

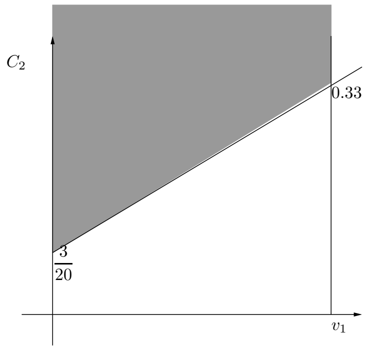
$$v_1 H(X_1) + v_2 H(X_2) + v_3 H(X_3) < v_{c_2} C_2 \Rightarrow C_2 > \frac{10 v_1 + 750}{5000} \text{ bits/símbolo}. \tag{2}$$

Las condiciones (1) y (2) delimitan las combinaciones (v_1, C_2) factibles para la transmisión fiable. Gráficamente

6. (2 puntos) Tres fuentes discretas sin memoria independientes de entropías 1 bit por símbolo, 2 bits por símbolo y 3 bits por símbolo, respectivamente, comparten un canal ternario de capacidad la mitad del ideal. Si la primera emite 1000 símbolos por segundo, la segunda 100 símbolos por segundo y la tercera 50 símbolos por segundo:

a) ¿Cuál es la tasa mínima de transmisión del canal que hace posible enviar sin error los mensajes de las tres fuentes?

b) Con esa tasa mínima, ¿qué fracción de su régimen de transmisión dedica el canal a cada fuente?



a) La tasa mínima v_c es

$$v_1 H(X_1) + v_2 H(X_2) + v_3 H(X_3) < v_c C$$

donde $C = 1/2 \log_2 3$ bits/símbolo, esto es, $v_c > 1703{,}5$ símbolos/s.

b) Con la tasa mínima el uso del canal es completo por parte de las tres fuentes, con porcentajes respectivos $v_i H(X_i) / \sum_i v_i H(X_i) \approx (0{,}74, 0{,}15, 0{,}11)$.