EXAMEN FINAL DE MÉTODOS MATEMÁTICOS III (1 de septiembre de 2011)GRUPO: 1ºA

APELLIDOS...

NOMBRE..

1ª PARTE:

TEST (2 ptos) La respuesta correcta vale: + 0'4, la incorrecta vale: -0'2.

Escribe **V** si la afirmación es verdadera y **F** si es falsa en la casilla correspondiente.

1. $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $f(\underline{x}, \underline{y}) = x_1y_3 - x_2y_2 + 4x_3y_1$ es una forma bilineal.... ☐

2. Si $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal tal que $M_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, entonces su expresión analítica es $f(\underline{x}, \underline{y}) = 2x_1y_2 + 2x_2y_2$ .... ☐

3. Sea $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática tal que $q(\underline{x}) = 2x_1^2 + 2x_1x_2$, entonces se tiene que $M_q = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .... ☐

4. $(x_1,x_2) \bullet (y_1,y_2) = x_1y_1 - x_2y_2$ define un producto escalar en $\mathbb{R}^2$ .... ☐

5. En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar canónico, sean $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^3$, vectores no nulos, tales que $\underline{x} \bullet \underline{y} = 0$ y $\underline{z} = \underline{x} + 2\underline{y}$, entonces $\underline{z}$ es conjugado de $\underline{x}$ y de $\underline{y}$ .... ☐

PROBLEMA 1. (1 pto) En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar canónico. Halla la **proyección ortogonal** del vector $\underline{x} = (0,3,2)$ sobre el plano generado por los vectores: $(1,2,1)$ y $(0,-1,2)$

PROBLEMA 2. (2 ptos) Dados α y $\beta \in \mathbb{R}$, se define la aplicación $f : \mathbb{P}_2[x] \times \mathbb{P}_2[x] \to \mathbb{R}$ mediante

$$f(a + bx + cx^2, a' + b'x + c'x^2) = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

Se pide: a) Determina el **conjunto de valores** de los parámetros α y β para los que f define un producto escalar en $\mathbb{P}_2[x]$

b) Suponiendo $\alpha = 0$ y $\beta = 2$, para el producto escalar definido por f, determina una **base ortonormal** de $\mathbb{P}_2[x]$

PROBLEMA 3. (2 ptos) De una forma cuadrática $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sabemos:

$q(1,0,0) = 1$, $q(1,1,0) = 0$ y $q(1,0,-1) = 2$. Además, $q(2,1,0) = -1$, $q(2,0,-1) = 0$ y $q(2,1,-1) = 2$. Considerando la base $B = \{\underline{u_1} = (1,0,0), \underline{u_2} = (1,1,0), \underline{u_3} = (1,0,-1)\}$, determina $M_q(B)$ y M_q.

PROBLEMA 4. (3 ptos) En $\mathbb{R}^3$ se considera un producto escalar respecto del cual $B = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$ es una base ortonormal. Se pide:

a) Escribe la **matriz métrica** de dicho producto escalar respecto de la **base canónica** de $\mathbb{R}^3$

b) Dado el subespacio vectorial $U = L(\{(1,2,3)\})$, determina el **subespacio ortogonal** de U : $U^\perp$

c) Halla una **base ortonormal** de $U^\perp$

2ª PARTE:

TEST (2 ptos) La respuesta correcta vale: + 0'4, la incorrecta vale: -0'2.

Escribe **V** si la afirmación es verdadera y **F** si es falsa en la casilla correspondiente.

6. $\forall x \in (-1,1),\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} x^{\frac{n}{2}} = \frac{1}{2(1-x)}$ .... [ ]

7. **No** existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{x^2} \right)$ .... [ ]

8. **No** existe el polinomio de MacLaurin de grado tres de $f(x) = \sqrt{x}$

.... [ ]

9. $\int_{-1}^{1}\int_{-x^2}^{x^2} x^2 dydx$ es el área de la región del plano limitada por las gráficas: $y = x^2$, $y = -x^2$, $x = -1$, $x = 1$ .... [ ]

10. El volumen del sólido, del primer octante, por debajo del plano: $x + y + z = 1$ es $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} dxdydz$ .... [ ]

PROBLEMA 5. (1 pto)

Estudia la continuidad de la siguiente función en $(0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

PROBLEMA 6. (1 pto)

Calcula $\iint_R \left(\sqrt{4-x^2-y^2} + 2 - \sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$ siendo R la región del plano interior de la circunferencia: $x^2 + y^2 = 4$

PROBLEMA 7. (2 ptos)

Determina el intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$$

y en dicho intervalo, determina la función $f(x)$ a la que converge.

PROBLEMA 8. (2 ptos)

¿Cuántos términos hay que tomar del polinomio de MacLaurin de $f(x) = e^x$, para obtener un polinomio que se aproxime a esta función en $[-1,1]$ con **dos** cifras decimales exactas?

PROBLEMA 9.(2 ptos)

Calcula el **volumen** del tetraedro acotado por los planos: $x = 0$, $y = 0$, $z = 4$ y $z = x + 2y$