Tema 4. Distribuciones de Probabilidad

Estadística

Ángel Serrano Sánchez de León

Índice

- Distribuciones discretas de probabilidad
  - Discreta uniforme
  - Binomial
  - De Poisson
- Distribuciones continuas de probabilidad
  - Continua uniforme
  - Normal o gaussiana
    - Univariante
    - Bivariante
    - Multivariante
- Otras distribuciones de interés
  - χ^2 (ji cuadrado)
  - t de Student
  - F de Fisher-Snedecor
- Relación entre distribuciones

Introducción

- En este tema vamos a estudiar algunas distribuciones de probabilidades importancias por su aplicación a numerosos problemas de Estadística.
- Pueden ser:
  - **Discretas**: función de masa (o de probabilidad) y función de distribución (probabilidad acumulada).
  - **Continuas**: función densidad de probabilidad y función de distribución (probabilidad acumulada).

Distribución discreta uniforme

- X toma los valores x_1, x_2, …, x_n.
- Todos los posibles valores de la variable aleatoria son igualmente probables.
- La función de masa es:

$$f(x) \equiv f(n) = \frac{1}{n}, \quad \forall x \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

- Ejemplo:
  - Dado de $n = 6$ caras → $f(x) = 1/6$
  - Mazo de $n = 40$ cartas → $f(x) = 1/40$

Distribución discreta uniforme

- Valor esperado de X:

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}$$

- Varianza de X:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = s^2$$

Distribución discreta uniforme

- En el caso de que X tome los valores consecutivos a, $a + 1$, $a + 2$, …, b, con $a \le b$.
- El número total de valores es: $n = b - a + 1$.

$$f(x) = \frac{1}{b-a+1}, \quad a \le x \le b$$

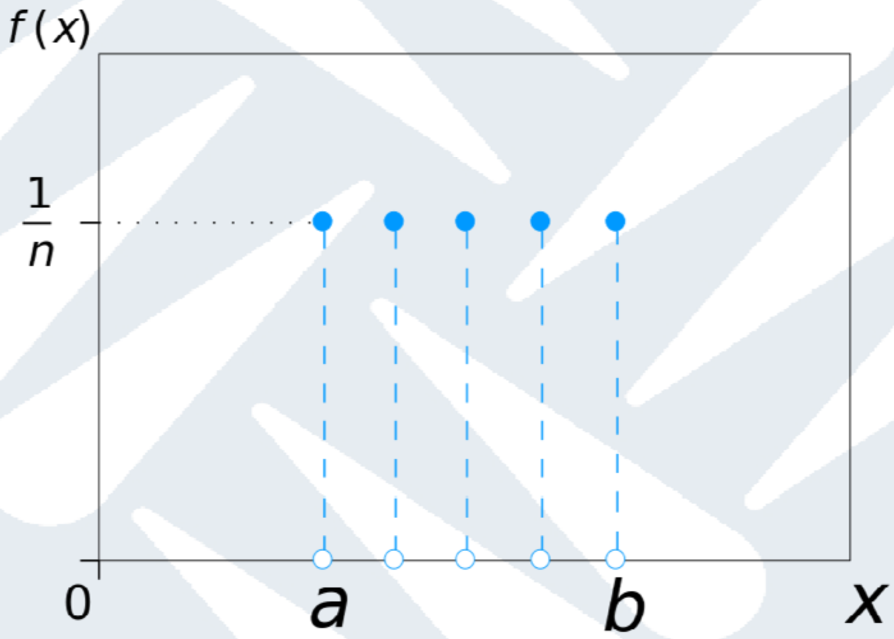
- Valor esperado:

$$E(X) = \mu = \frac{a+b}{2}$$

- Varianza:

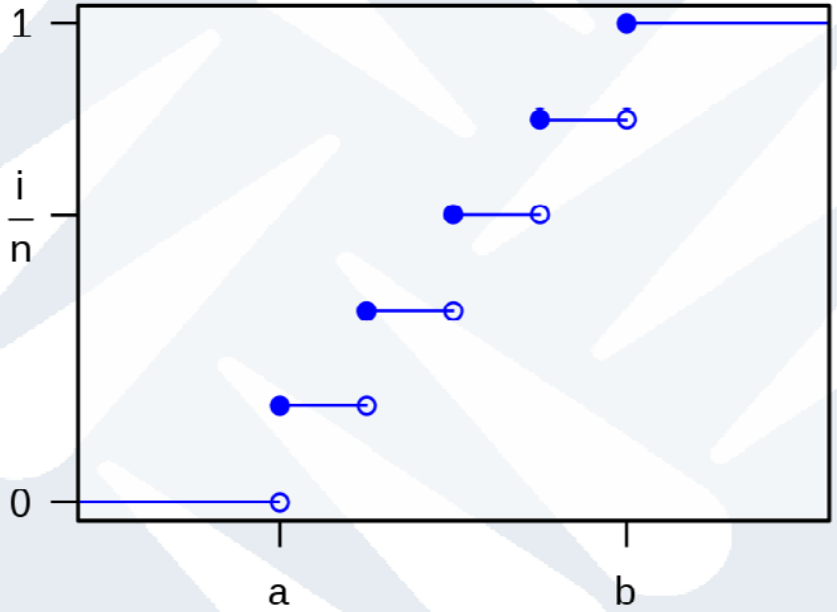
$$V(X) = \sigma^2 = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$$

Distribución discreta uniforme



Función de masa para una variable que toma valores entre *a* y *b* (fuente: Wikipedia)

Distribución discreta uniforme



Función de distribución para una variable que toma valores entre *a* y *b* (fuente: Wikipedia)

Distribución Binomial

- Proceso de Bernouilli:
  - El experimento consiste en n ensayos repetidos.
  - El resultado de cada uno de los ensayos puede clasificarse en éxito o fracaso (excluyentes).
  - La probabilidad de éxito, que denotaremos por p, es constante en todos los ensayos.
  - De los n ensayos, x son éxitos.
  - La probabilidad de fracaso es $q = 1 - p$.
  - De los n ensayos, $n - x$ son fracasos.
  - Los diferentes ensayos son independientes.
- Ejemplo:
  - Obtener $x = 40$ caras de $n = 100$ lanzamientos de un dado (con probabilidad $p = 0{,}5$).

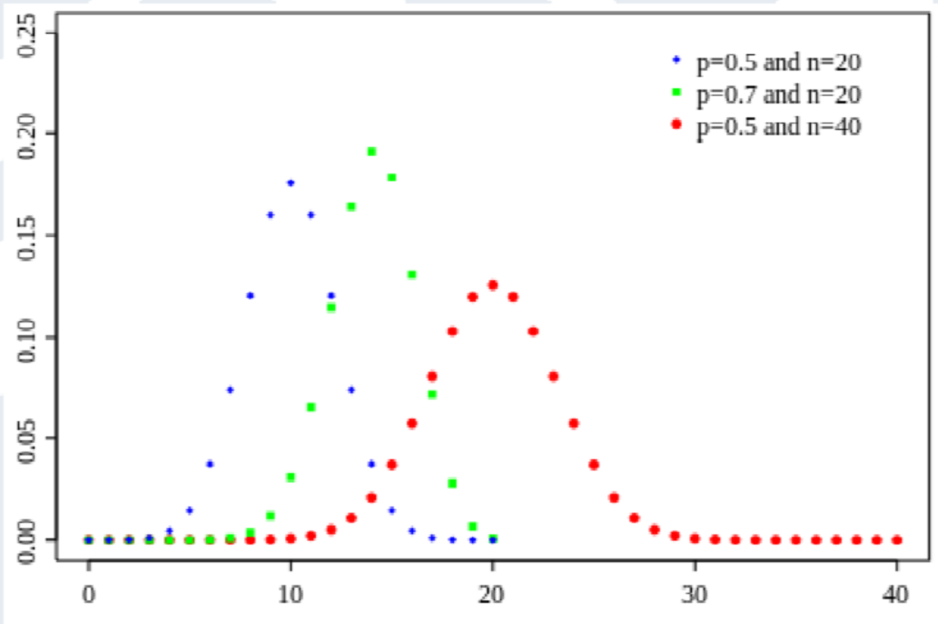
Distribución Binomial

- La función de masa da la probabilidad de que el suceso ocurra exactamente x veces en n intentos:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

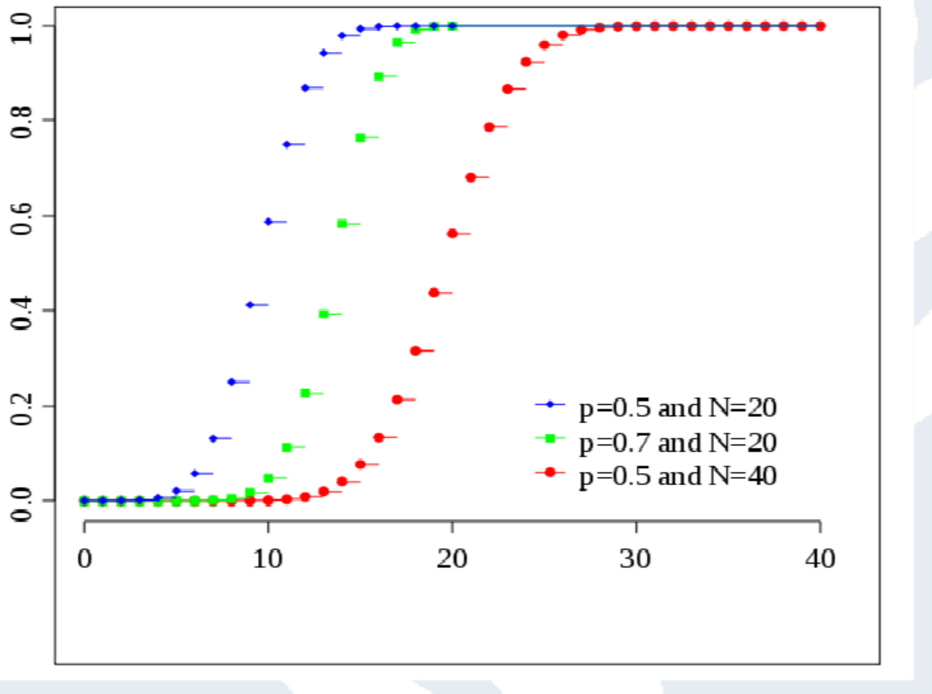
- Cada éxito tiene p probabilidades de ocurrir y tenemos x éxitos.
- Cada fracaso tiene q probabilidades de ocurrir y tenemos $n - x$ fracasos.
- El coeficiente binomial aparece para tener en cuenta que el orden en el que ocurren los x éxitos en un total de n intentos es irrelevante.
- Una variable X que siga esta distribución Binomial se escribe como $X \sim \mathrm{B}(n,p)$.

Distribución Binomial



Función de masa para distintos valores de p y n (fuente: Wikipedia)

Distribución Binomial



Función de distribución para distintos valores de *p* y *n* (fuente: Wikipedia)

Distribución Binomial

- Supongamos $n = 1$ (un solo intento), tal que si hay éxito $x = 1$ y si hay fracaso $x = 0$:

$$f(x) = \binom{1}{x} p^x q^{1-x} = p^x q^{1-x} = \begin{cases} p, & x = 1 \\ q, & x = 0 \end{cases}$$

- Valor esperado:

$$E(X) = \sum_{x_i=0}^{1} x_i f(x_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

- Varianza:

$$\sigma^2 = \sum_{x_i=0}^{1} x_i^2 f(x_i) - \mu^2 = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p - p^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

13

Distribución Binomial

- En el caso general para $n > 1$.
- Valor esperado:

$$E(X) = np$$

- Varianza:

$$V(X) = \sigma^2 = npq$$

- Asimetría:
  - Simétrica si $p = q$.
  - Asimétrica a la derecha si $p < q$.

Distribución de Poisson

- Proceso de Poisson (ley de los eventos raros):
  - El número de resultados que ocurren en un intervalo es independiente del número que ocurre en otro intervalo disjunto. Es decir, los sucesos aparecen aleatoriamente de forma independiente (**el proceso no tiene memoria**).
  - La probabilidad de que un resultado sencillo ocurra en un intervalo pequeño es proporcional a la longitud de dicho intervalo. Además dicha probabilidad permanece constante, de forma que se puede definir un número medio de resultados por unidad de intervalo (**el proceso es estable**).
  - La probabilidad de que ocurra más de un resultado en un intervalo suficientemente pequeño es despreciable.

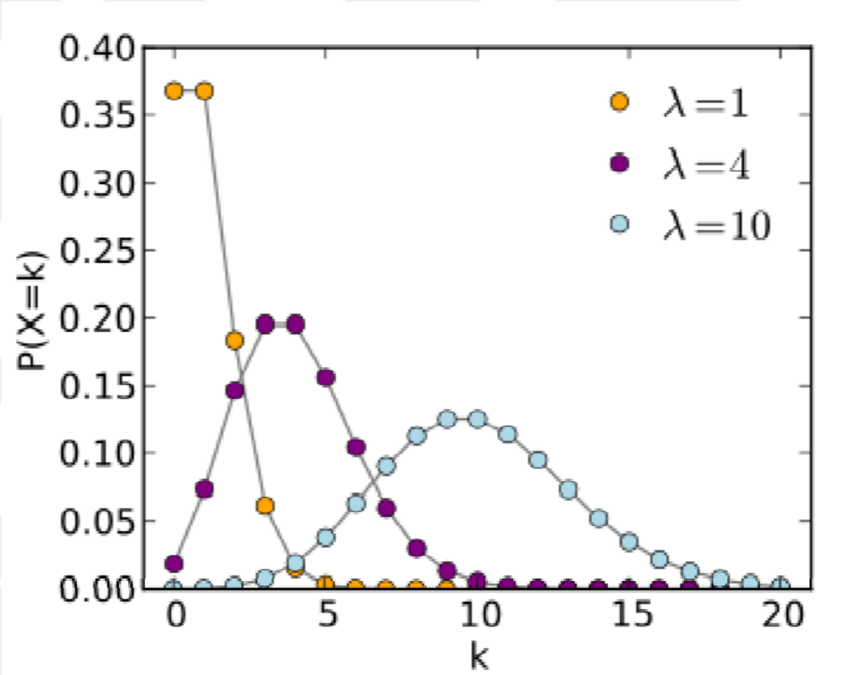
Distribución de Poisson

- Sea λ (lambda) el número medio de sucesos por intervalo.
- La función de masas da la probabilidad de que se den x sucesos en un proceso de Poisson con valor promedio $\lambda > 0$:

$$f(x) \equiv f(x, \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

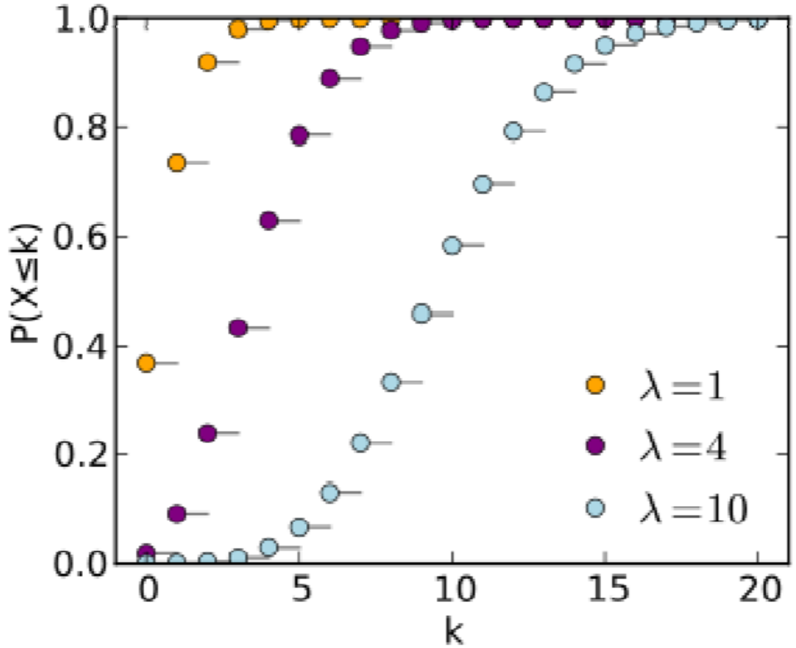
- Una variable X que siga esta distribución de Poisson se escribe $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$.

Distribución de Poisson



Función de masa para distintos valores de λ (fuente: Wikipedia)

Distribución de Poisson



Función de distribución para distintos valores de λ (fuente: Wikipedia)

Distribución de Poisson

- Valor esperado:

$$E(X) = \mu = \lambda$$

- Varianza:

$$V(X) = \sigma^2 = \lambda$$

- Aplicación:
  - Teoría de la señal: el valor medio de la señal (λ) tiene un error (desviación típica) igual a su raíz cuadrada.

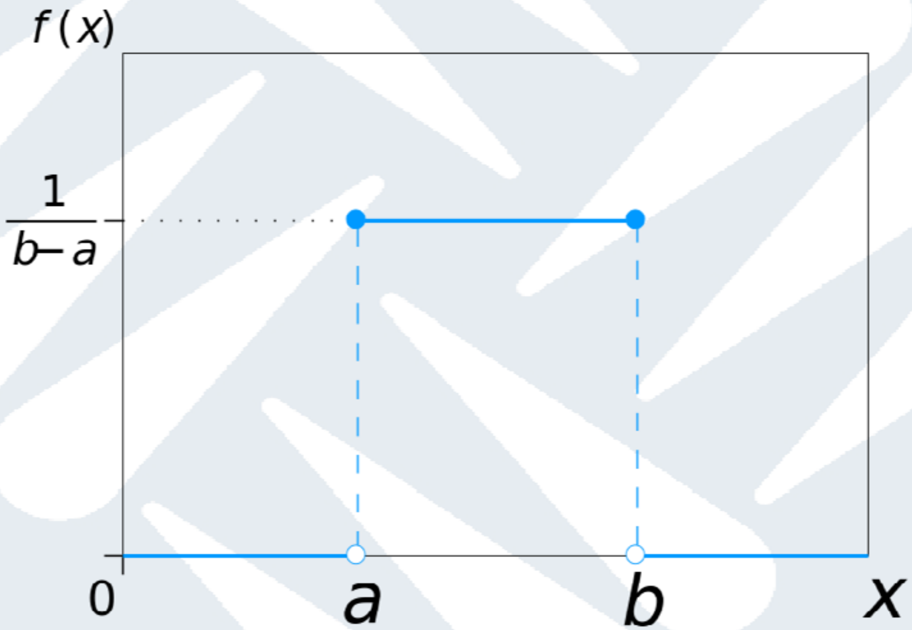
Distribución continua uniforme

- Ahora la variable aleatoria continua X toma todos los valores posibles entre a y b, con $a \leq b$.
- La función densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b$$

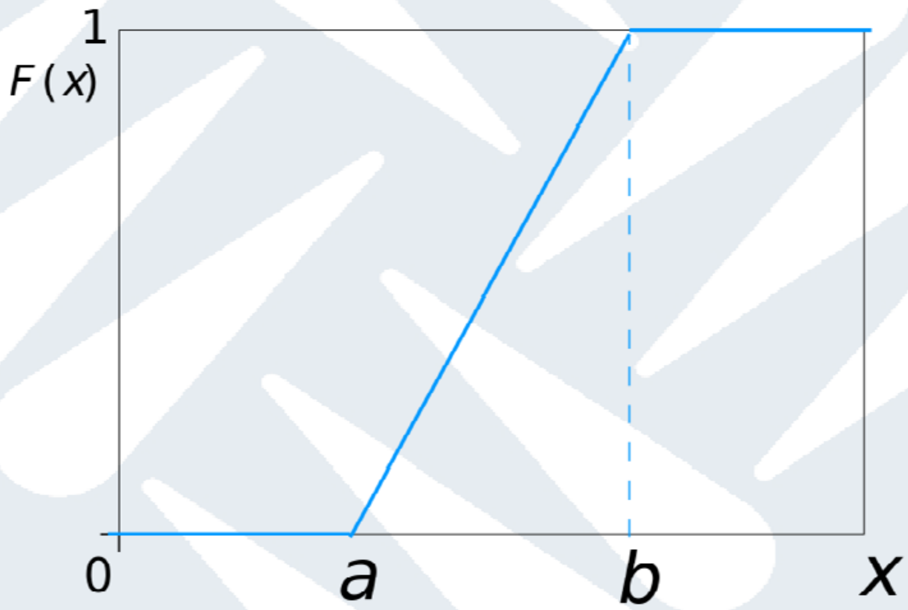
- Ejemplo:
  - Función `rand()` del lenguaje C, donde $a = 0$ y $b = 1$.

Distribución continua uniforme



Función de densidad para una variable que toma valores entre *a* y *b*
(fuente: Wikipedia)

Distribución continua uniforme



Función de distribución para una variable que toma valores entre *a* y *b* (fuente: Wikipedia)

Distribución continua uniforme

- Valor esperado:

$$E(X) = \mu = \frac{a+b}{2}$$

- Varianza:

$$V(X) = \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

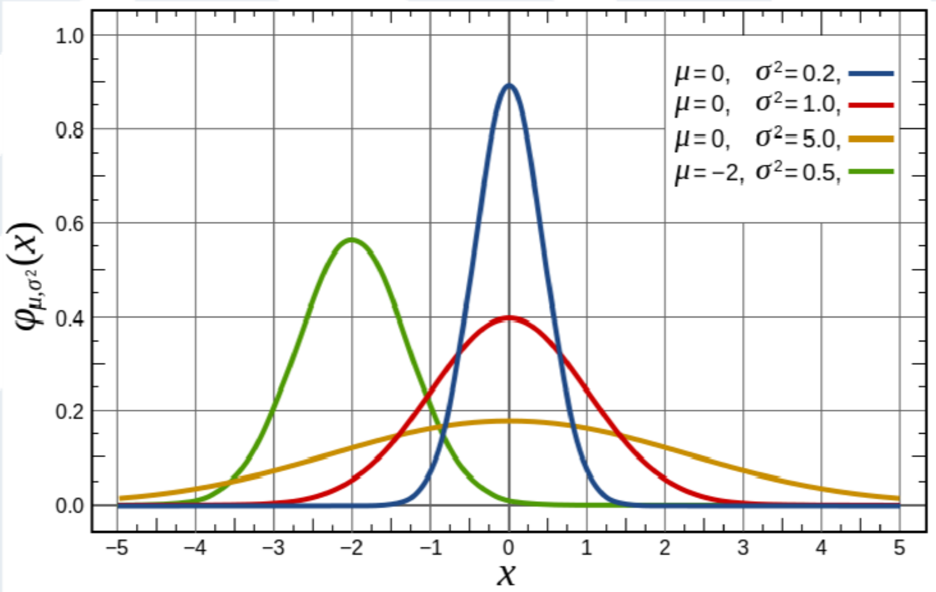
Distribución Normal o gaussiana

- La más importante en Estadística, pues describe muchos fenómenos aleatorios de la Naturaleza: **distribución Normal Univariante.**
- La función densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua X con parámetros μ $(-\infty < \mu < \infty)$ y σ (>0) viene dada por:

$$f(x) \equiv N(\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right), \qquad -\infty < x < \infty$$

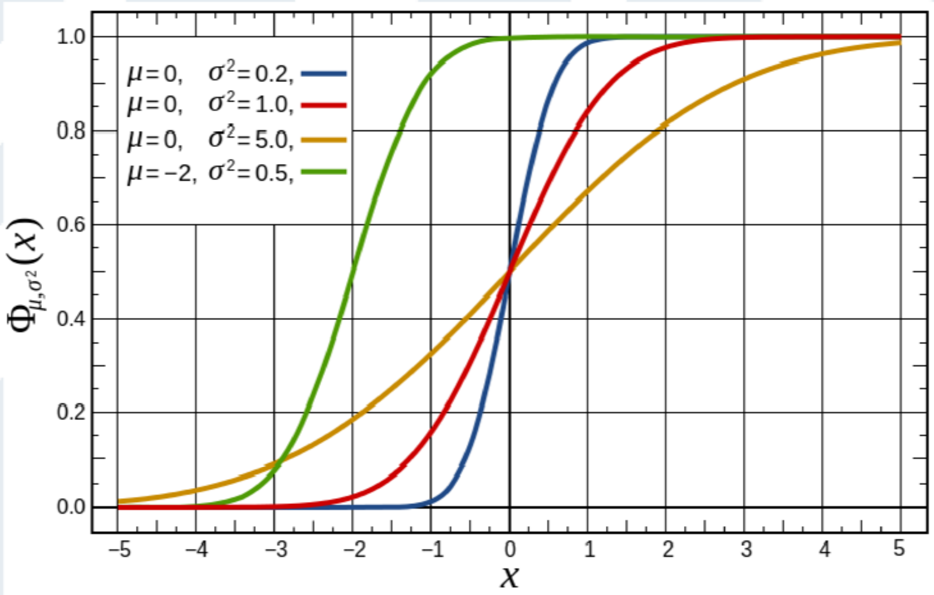
- Se expresa también como: $X \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma)$

Distribución Normal o gaussiana



Función de densidad para distintos valores de μ y σ (fuente: Wikipedia)

Distribución Normal o gaussiana



Función de distribución para distintos valores de μ y σ (fuente: Wikipedia)

Distribución Normal o gaussiana

- Valor esperado:

$$E(X) = \mu$$

- Varianza:

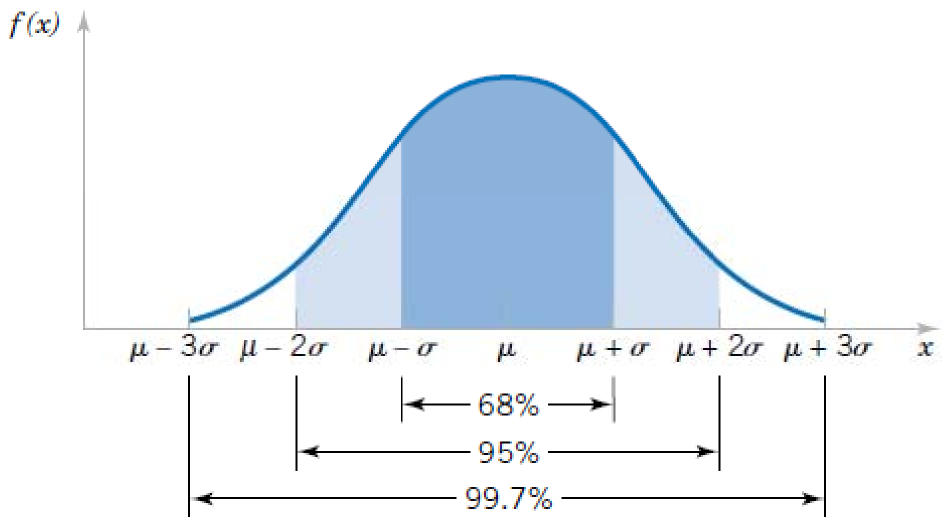
$$V(X) = \sigma^2$$

Distribución Normal o gaussiana

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0{,}6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0{,}9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0{,}9973$$



Distribución Normal tipificada

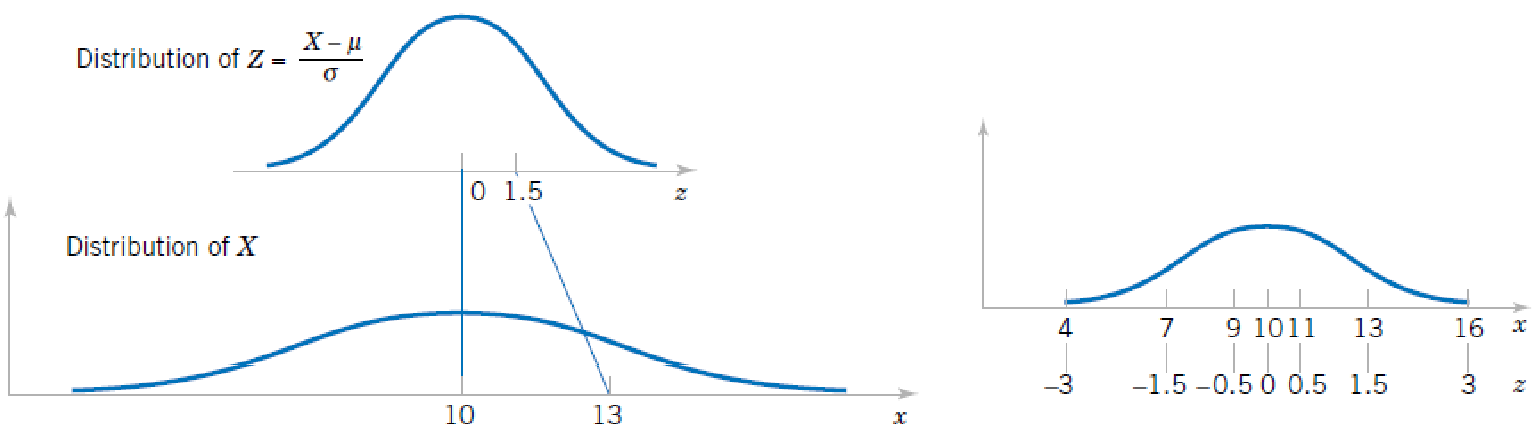
- Hagamos el cambio de variable:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

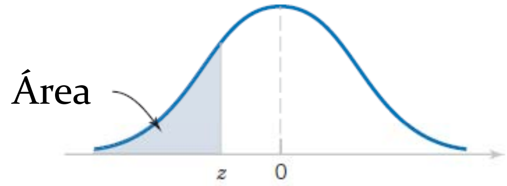
- La distribución de *Z* se llama **tipificada** o **normal estándar**, porque tiene media 0 y desviación típica 1.

$$f(z) \equiv \mathrm{N}(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right), \qquad -\infty < z < \infty$$

Distribución Normal tipificada



Distribución Normal tipificada



Función de distribución para la distribución normal tipificada

z	−0.09	−0.08	−0.07	−0.06	−0.05	−0.04	−0.03	−0.02	−0.01	−0.00
−3.9	0.000033	0.000034	0.000036	0.000037	0.000039	0.000041	0.000042	0.000044	0.000046	0.000048
−3.8	0.000050	0.000052	0.000054	0.000057	0.000059	0.000062	0.000064	0.000067	0.000069	0.000072
−3.7	0.000075	0.000078	0.000082	0.000085	0.000088	0.000092	0.000096	0.000100	0.000104	0.000108
−3.6	0.000112	0.000117	0.000121	0.000126	0.000131	0.000136	0.000142	0.000147	0.000153	0.000159
−3.5	0.000165	0.000172	0.000179	0.000185	0.000193	0.000200	0.000208	0.000216	0.000224	0.000233
−3.4	0.000242	0.000251	0.000260	0.000270	0.000280	0.000291	0.000302	0.000313	0.000325	0.000337
−3.3	0.000350	0.000362	0.000376	0.000390	0.000404	0.000419	0.000434	0.000450	0.000467	0.000483
−3.2	0.000501	0.000519	0.000538	0.000557	0.000577	0.000598	0.000619	0.000641	0.000664	0.000687
−3.1	0.000711	0.000736	0.000762	0.000789	0.000816	0.000845	0.000874	0.000904	0.000935	0.000968

El área bajo la curva medida en la cola izquierda hasta z=-3,53 vale 0,000208.

Distribución Normal Bivariante

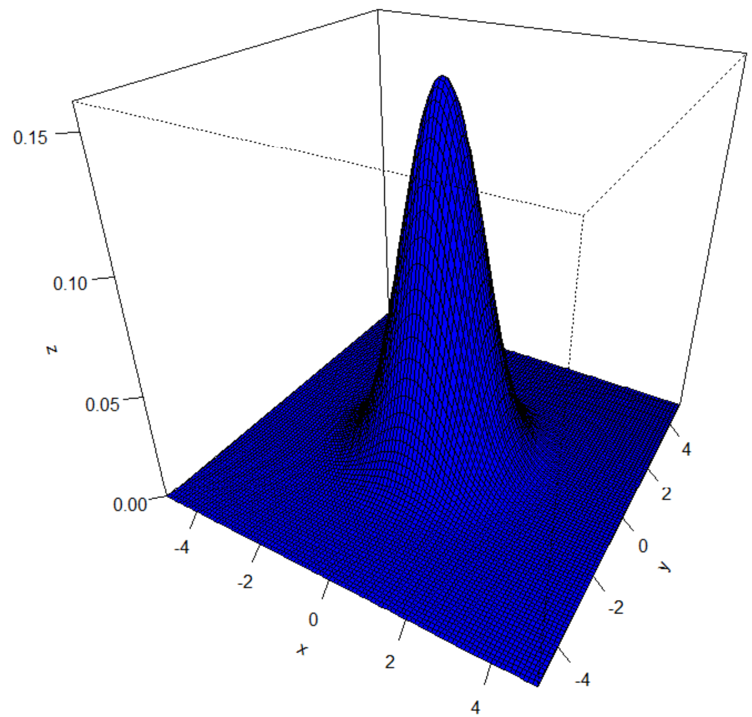
- Tenemos ahora dos variables (X,Y) que siguen una **distribución Normal Bivariante** (gaussiana 2D).

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2}-\frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right)\right]$$

- Propiedades:
  - $E(X) = \mu_x$
  - $E(Y) = \mu_y$
  - $Var(X) = \sigma_x^2$
  - $Var(Y) = \sigma_y^2$
  - $Cov(X,Y) = \rho\,\sigma_x\,\sigma_y$, donde ρ = correlación lineal entre X e Y

32

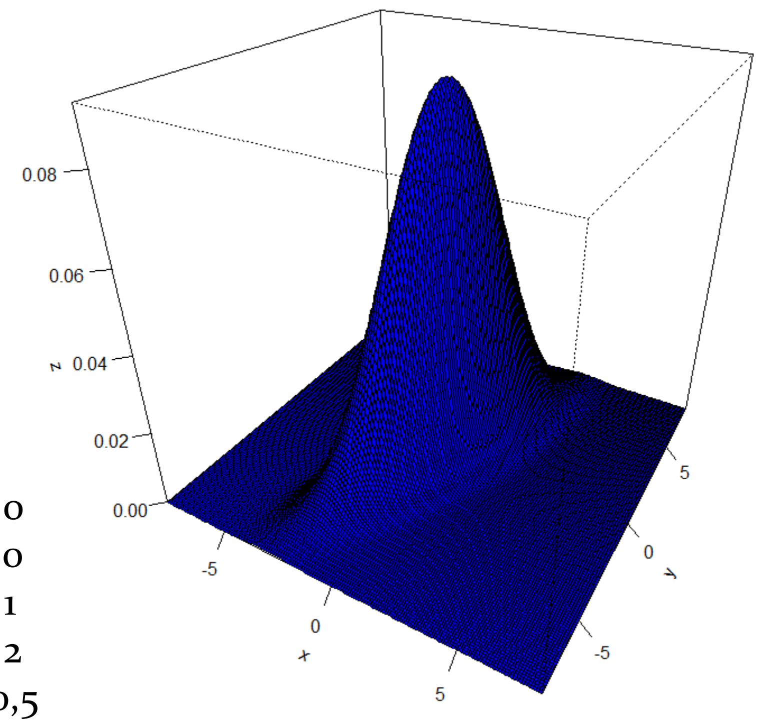
Distribución Normal Bivariante



$\mu_x = 0$
$\mu_y = 0$
$\sigma_x = 1$
$\sigma_y = 1$
$\rho = 0$

33

Distribución Normal Bivariante



$\mu_x = 0$
$\mu_y = 0$
$\sigma_x = 1$
$\sigma_y = 2$
$\rho = 0{,}5$

Distribución Normal Multivariante

- Para n variables que siguen conjuntamente una distribución normal:

$$f_n(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|\Sigma|}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^T \Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})\right]$$

- Donde:
  - $\vec{x}$ es el vector columna con las n variables.
  - $\vec{\mu}$ es el vector columna con las n medias.
  - Σ es la matriz de covarianza.
  - $|\cdot|$ es la operación determinante de una matriz.
  - T es la operación matriz transpuesta.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12}^2 & \cdots & \sigma_{1n}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1}^2 & \sigma_{n2}^2 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

35

Otras distribuciones de interés

- Para el tema de Inferencia Estadística, son necesarias las siguientes distribuciones de probabilidad:
  - χ^2 (ji cuadrado)
  - t de Student
  - F de Fisher-Snedecor

Distribución χ^2 (ji cuadrado)

- Sean k variables aleatorias independientes, $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$, cada una de las cuales sigue una distribución $N(0,1)$.
- Definimos una nueva variable aleatoria llamada Y como la suma de los cuadrados:

$$Y = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2$$

- La variable Y sigue una **distribución de probabilidad ji cuadrado** (en libros mal traducidos del inglés llamada "chi" cuadrado).
  - Debida a Friedriech Helmert y Karl Pearson.
  - Se dice que tiene ***k* grados de libertad**, siendo $k > 0$ un número entero que corresponde a cuántas variables independientes se han considerado.

Distribución χ^2 (ji cuadrado)

- Distribución continua, definida para $x \geq 0$, que toma valores $y \geq 0$ y solo definida para $k > 0$ y entero.
- Función de densidad:

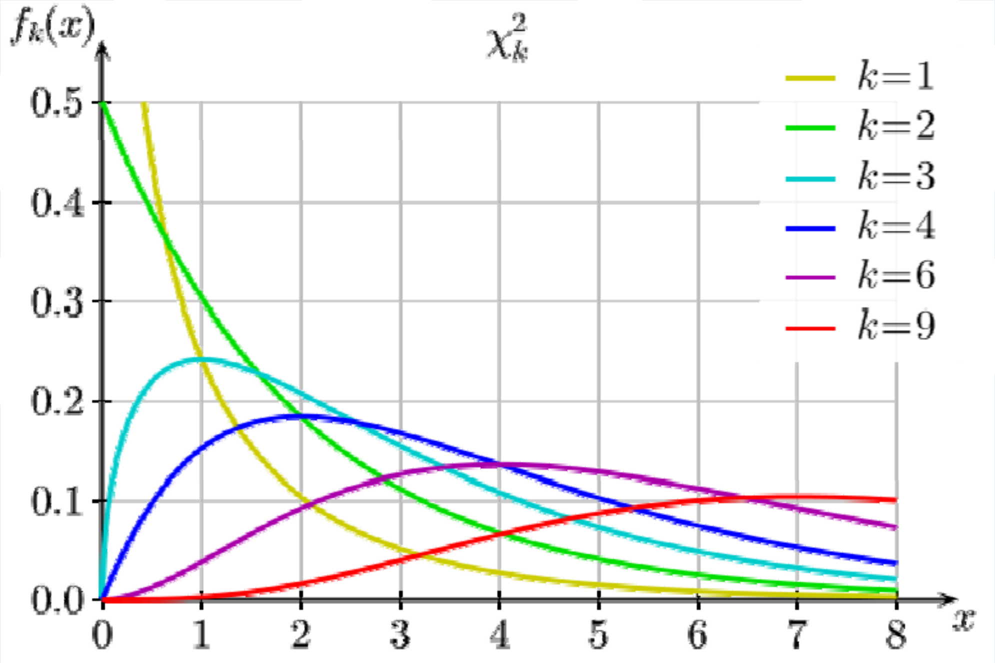
$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

- Donde $\Gamma(z)$ es una función especial en Matemáticas, llamada **Función Gamma**, generalización del factorial para los números complejos.

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \text{ si } n \in N, n > 0$$

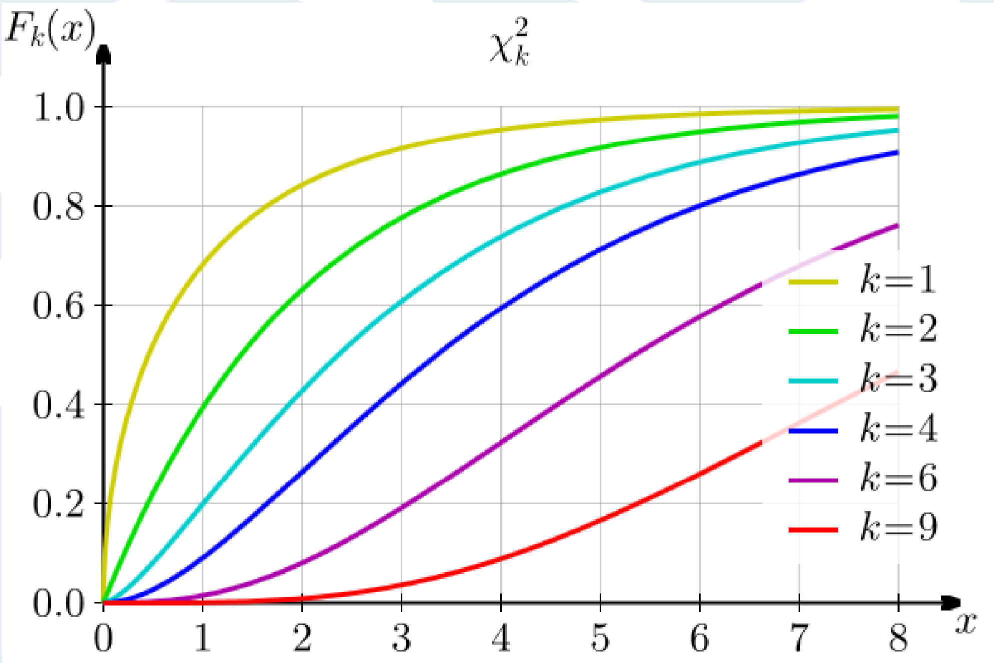
$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \text{ si z} \in C \text{ y no es un entero negativo}, \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

Distribución χ^2 (ji cuadrado)



Función de densidad para la distribución χ^2_k (fuente: Wikipedia)

Distribución χ^2 (ji cuadrado)



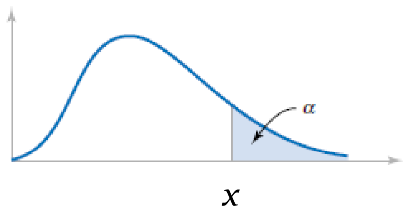
Función de distribución para la distribución χ^2_k (fuente: Wikipedia)

Distribución χ^2 (ji cuadrado)

- Propiedades de una variable $Y \sim \chi^2_k$:
  - $E(Y) = k$
  - $Var(Y) = 2k$
  - Asimetría $= \sqrt{8/k} > 0$ (cola hacia la derecha).
  - En los libros suele venir tabulado el valor de x por encima del cual el área α bajo la función de densidad toma un valor concreto (**función cuartil** medida en la cola derecha).

$$Y \sim \chi^2_k, P(y > x, k) = \alpha \Rightarrow Q(\alpha, k) = x$$

Distribución χ^2 (ji cuadrado)



Función cuartil medida en la cola derecha para la distribución χ^2 según el área α y los grados de libertad k

k \ α	.995	.990	.975	.950	.900	.500	.100	.050	.025	.010	.005
1	.00+	.00+	.00+	.00+	.02	.45	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	.01	.02	.05	.10	.21	1.39	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	.07	.11	.22	.35	.58	2.37	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	.21	.30	.48	.71	1.06	3.36	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	.41	.55	.83	1.15	1.61	4.35	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	.68	.87	1.24	1.64	2.20	5.35	10.65	12.59	14.45	16.81	18.55
7	.99	1.24	1.69	2.17	2.83	6.35	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	7.34	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	8.34	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	9.34	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19

Para k = 8 grados de libertad, el área bajo la cola derecha de la curva a partir de x = 15,51 vale α = 0,05 (es decir, el 5% del área total bajo la curva)

Distribución t de Student

- Debida a William Gosset, que firmaba sus trabajos anónimamente como "Student".
- Sea Z una variable normal estándar, $Z \sim N(0,1)$.
- Sea Y una variable que sigue una distribución ji cuadrado con k grados de libertad, $Y \sim \chi^2_k$.
- Z e Y son independientes entre sí.
- Definimos la variable aleatoria T:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{Y/k}}$$

- T sigue una **distribución t de Student con k grados de libertad**, $k > 0$.

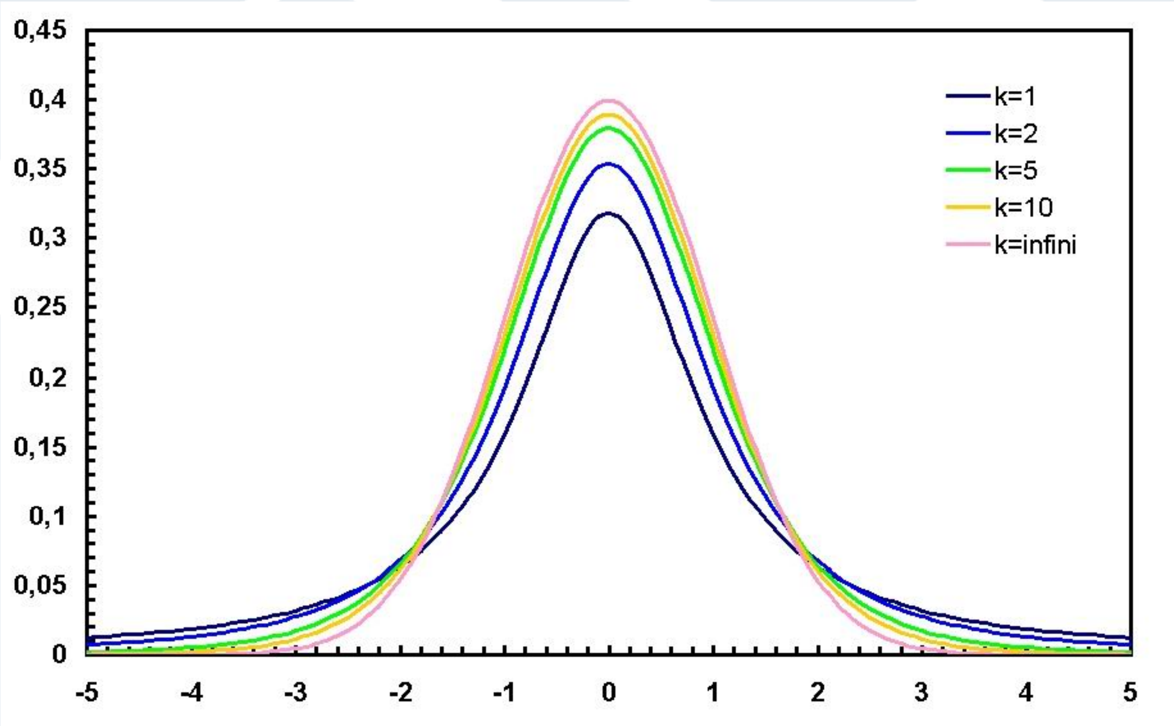
Distribución t de Student

- Distribución continua.
- Función de densidad:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, \quad -\infty < t < \infty$$

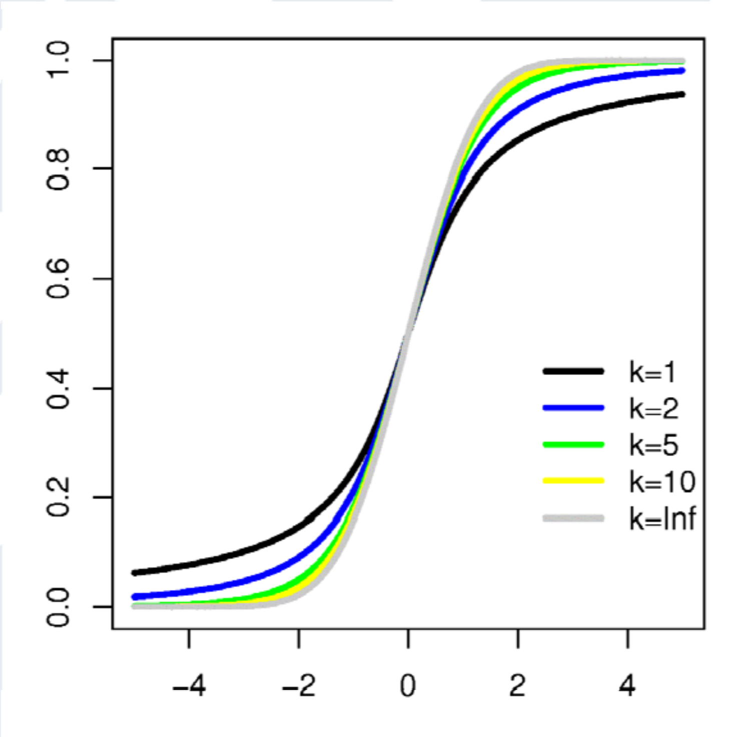
- La distribución t de Student es más baja que la Normal en torno al valor medio cero.
- Si $X \sim t_k$:
  - $E(X) = 0$
  - $Var(X) = k/(k-2)$, para $k > 2$
  - Asimetría = 0

Distribución t de Student



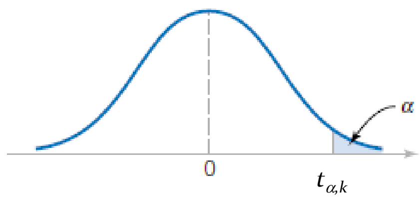
Función de densidad para la distribución t para varios grados de libertad *k* (fuente: Wikipedia)

Distribución t de Student



Función de distribución para la distribución t para varios grados de libertad *k* (fuente: Wikipedia)

Distribución t de Student



Función cuartil medida en la cola derecha para la distribución t de Student según el área α y los grados de libertad k

k \ α	.40	.25	.10	.05	.025	.01	.005	.0025	.001	.0005
1	.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	127.32	318.31	636.62
2	.289	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	23.326	31.598
3	.277	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.213	12.924
4	.271	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	.267	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	.265	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	.263	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	.262	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	.261	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	.260	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587

Para k = 5 grados de libertad, el área bajo la cola derecha de la curva a partir de t = 3,365 vale α = 0,01 (es decir, el 1% del área total bajo la curva)

Distribución F

- Debida a R.A. Fisher y G.W. Snedecor.
- Sean dos variables aleatorias X e Y, independientes entre sí, donde $X \sim \chi^2_{k_1}$ e $Y \sim \chi^2_{k_2}$.
- Definimos la variable aleatoria F como:

$$F = \frac{X/k_1}{Y/k_2}$$

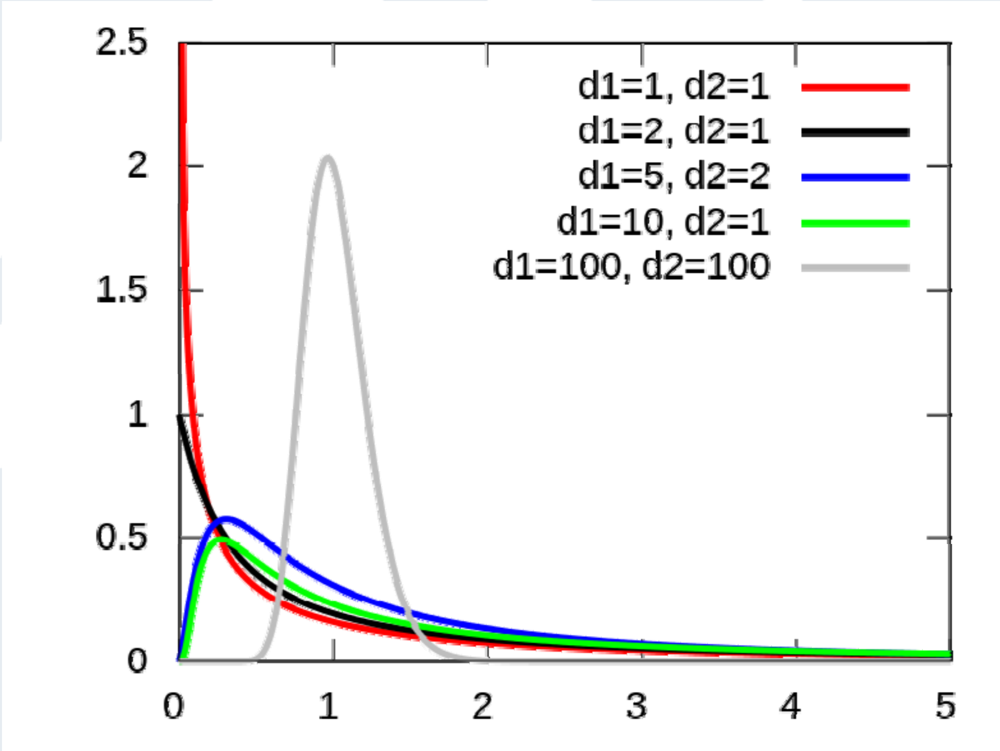
- Esta variable sigue una **distribución F de Fisher-Snedecor con k_1 y k_2 grados de libertad** (ambos enteros positivos).

Distribución F

- Distribución continua.
- Función de densidad: $f(x)=\dfrac{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}+\frac{k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\dfrac{k_1^{\frac{k_1}{2}}k_2^{\frac{k_2}{2}}x^{\frac{k_1}{2}-1}}{\left(k_1x+k_2\right)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}\;,\quad x>0$
- Valor esperado: $\mathrm{E}(X)=\dfrac{k_2}{k_2-2},\;$ para $k_2>2$
- Varianza: $\mathrm{V}(X)=\dfrac{2k_2^2(k_1+k_2-2)}{k_1(k_2-4)(k_2-2)^2},\;$ para $k_2>4$
- Si $X \sim F_{k_1,k_2}$, entonces $Y = X^{-1} \sim F_{k_2,k_1}$
  - Las abcisas que abarcan igual área bajo la curva en cada cola, al intercambiar los grados de libertad, son inversas.

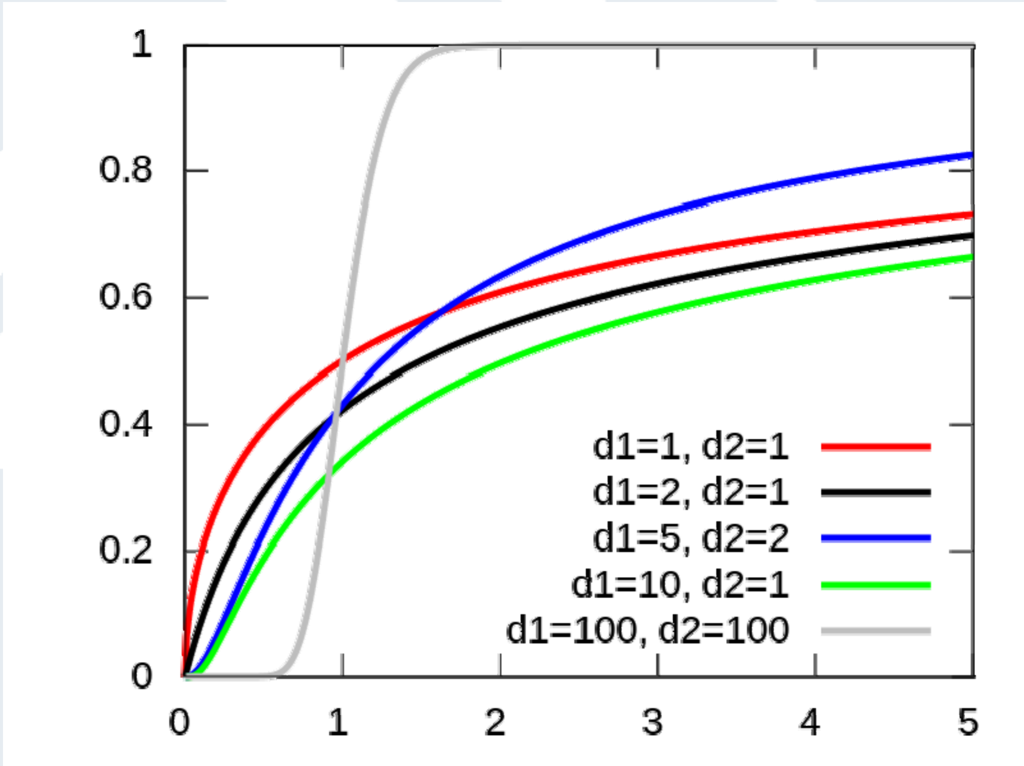
$$\frac{1}{F_{\alpha,k_1,k_2}}=F_{\alpha,k_2,k_1}$$

Distribución F



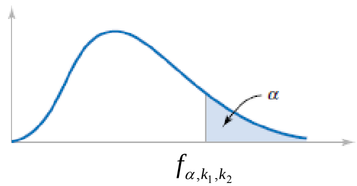
Función de densidad para la distribución F para varios grados de libertad d_1 y d_2 (fuente: Wikipedia)

Distribución F



Función de distribución para la distribución F para varios grados de libertad d_1 y d_2 (fuente: Wikipedia)

Distribución F



Función cuartil medida en la cola derecha para la distribución F según el área α (en este caso 0,25) y los grados de libertad k_1 (numerador) y k_2 (denominador)

k_2 \ k_1	Degrees of freedom for the numerator																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	5.83	7.50	8.20	8.58	8.82	8.98	9.10	9.19	9.26	9.32	9.41	9.49	9.58	9.63	9.67	9.71	9.76	9.80	9.85
2	2.57	3.00	3.15	3.23	3.28	3.31	3.34	3.35	3.37	3.38	3.39	3.41	3.43	3.43	3.44	3.45	3.46	3.47	3.48
3	2.02	2.28	2.36	2.39	2.41	2.42	2.43	2.44	2.44	2.44	2.45	2.46	2.46	2.46	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47
4	1.81	2.00	2.05	2.06	2.07	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08
5	1.69	1.85	1.88	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.88	1.88	1.88	1.88	1.87	1.87	1.87
6	1.62	1.76	1.78	1.79	1.79	1.78	1.78	1.78	1.77	1.77	1.77	1.76	1.76	1.75	1.75	1.75	1.74	1.74	1.74
7	1.57	1.70	1.72	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.70	$\boxed{1.69}$	1.68	1.68	1.67	1.67	1.66	1.66	1.65	1.65	1.65
8	1.54	1.66	1.67	1.66	1.66	1.65	1.64	1.64	1.63	1.63	1.62	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.58
9	1.51	1.62	1.63	1.63	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.56	1.55	1.54	1.54	1.53	1.53
10	1.49	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.52	1.51	1.51	1.50	1.49	1.48
11	1.47	1.58	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.49	1.48	1.47	1.47	1.46	1.45
12	1.46	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.45	1.44	1.43	1.42

Para k_1 = 10 y k_2 = 7 grados de libertad, el área bajo la cola derecha de la curva a partir de x = 1,69 vale α = 0,25 (es decir, el 25% del área total bajo la curva)

Relación entre distribuciones

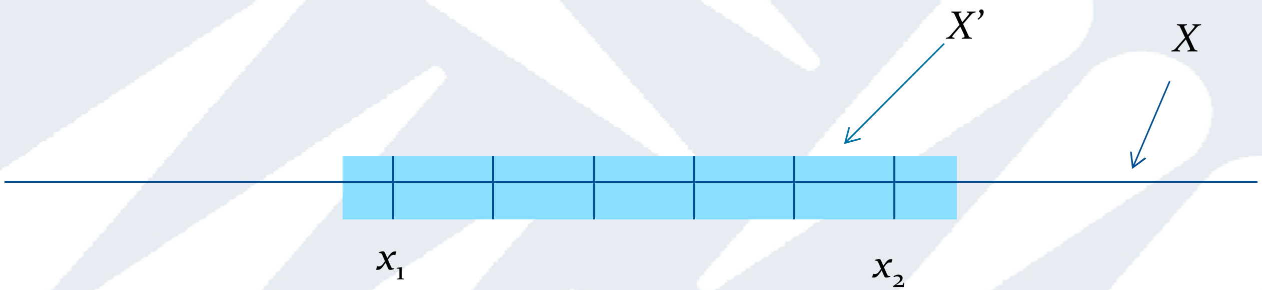
Distribución	Aproximación	Condición	Condición práctica
Binomial → Normal	$B(n, p) \sim N\left(np, \sqrt{npq}\right)$	$n \to \infty$	$np > 5$, si $p \leq 0{,}5$ $nq > 5$, si $p > 0{,}5$
Binomial → Poisson	$B(n, p) \sim P(np)$	$n \to \infty$, $p \approx 0$, $q \approx 1$ (suceso raro)	$n \geq 50$ y $np < 5$
Poisson → Normal	$P(\lambda) \sim N\left(\lambda, \sqrt{\lambda}\right)$	$\lambda \to \infty$	$\lambda > 5$
χ^2 → Normal	$\chi_k^2 \sim N(k, \sqrt{2k})$	$k \to \infty$	$k \geq 30$
t de Student → Normal	$t_k \sim N(0,1)$	$k \to \infty$	$k \geq 30$

Corrección de continuidad

- Las distribuciones Binomial y de Poisson son para variables discretas.
- La distribución Normal es para variables continuas.
- Precaución a la hora de aplicar la aproximación Normal.

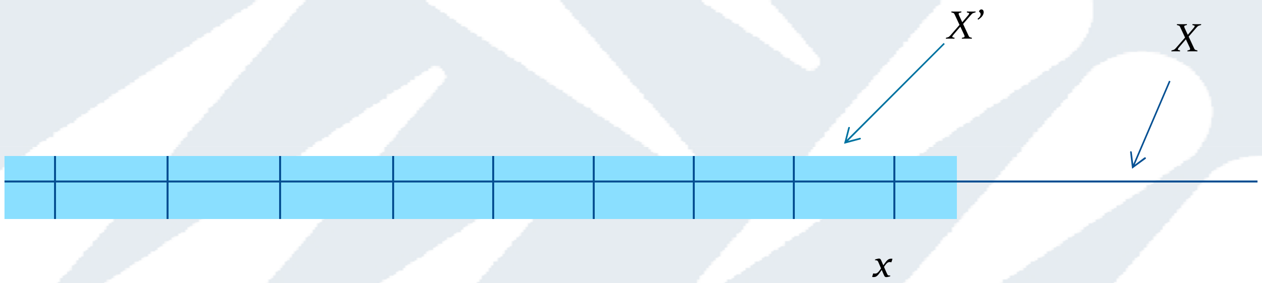
Variable original	Aproximación
X	*X'*
Discreta	Continua
Binomial o de Poisson	Normal

Corrección de continuidad



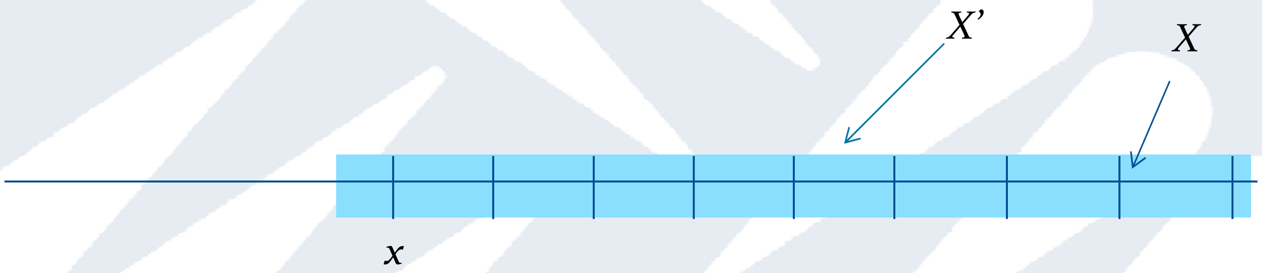
$$P(x_1 \le X \le x_2) \approx P(x_1 - 0{,}5 \le X' \le x_2 + 0{,}5)$$

Corrección de continuidad



$$P(X \leq x) \approx P(X' \leq x + 0{,}5)$$

Corrección de continuidad



$$P(X \geq x) \approx P(X' \geq x - 0{,}5)$$