

MATEMÁTICAS, GRUPO F (2019/2020)

Problemas entregables Temas 5 y 6

1. Determina si la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-n} + \sqrt{n}}{n^2 - 1}$ es convergente o divergente.
2. Demuestra que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{2n - 1}$ se puede sumar. Opcional: Programa la serie, e intenta averiguar cuánto vale su suma. Analiza si se trata de una convergencia “rápida” o “lenta” según tu criterio.
3. Precisa los x reales para los cuales converge i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n(n+3)}$, ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{n^2}}{2^n}$.
4. Calcular el dominio de la función de Bessel de orden 0, que se define como $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$.
5. Sea $xe^{-x}\sqrt{1+x}$, ¿cuál es la función más sencilla que se parece a $f(x)$ si x toma valores muy pequeños? ¿Y a $xe^{-x}\sqrt{1+x} - x$? Dibuja con el ordenador cada una de estas funciones junto a la aproximación que hayas encontrado y comprueba si son buenas aproximaciones en el entorno de $x = 0$. Considera $f(x) = \frac{xe^{-x}\sqrt{1+x}}{\arctan(x^a)}$, y halla razonadamente su límite cuando $x \rightarrow 0$ en función del parámetro a natural.
6. Halla los dos primeros términos no nulos del desarrollo de Taylor de $\log(1 + \cos x)$ en $x = 0$ y en $x = \pi/2$. Con la ayuda del ordenador, dibuja la función y los polinomios que has calculado y compáralos.
7. Halla los tres primeros términos no nulos del desarrollo en serie de Taylor de $e^{(\cos x - 1)}$ y $e^{\cos x}$ en $x = 0$ (ver qué ocurre si se intenta calcular ambos desarrollos a partir del de la exponencial). Calcula:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x^4}{e^{(\cos x - 1)} - \cos x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^{\cos x} - e}$

8. Encuentra los errores de este razonamiento por el cual $1 + 2 + 3 + \dots = -1/12$:

Partimos de $S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots$

Multiplicamos por 4: $4S = 4 + 8 + 12 + \dots$, y restamos las dos igualdades, siendo

$$-3S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$$

La serie que aparece en el lado derecho de esta igualdad es la serie de Taylor centrada

en $x = 0$ de $1/(1+x)^2$ evaluada en $x = 1$, luego $-3S = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$,

y obtenemos así $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -1/12$.