Soluciones a los ejercicios

PROBLEMA 1:

Sea $A = \{x \in \mathbb{Z} : \ x^2 < 16\}$. Decidir la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

1. $\{0, 1, 2, 3\} \subset A$
2. $\{3, 1\} \in A$
3. $\{x \in \mathbb{Z} : \ |x| < 4\} \subset A$
4. $\emptyset \subset A$
5. $3 \in A$
6. $\{3\} \in A$
7. $A \subset \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
8. $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

Solución. : V, F, V, V, V, F, F, V.

PROBLEMA 2:

Si $A \cap B = A \cap C$, ¿tiene que ser B = C? Si $A \cup B = A \cup C$, ¿tiene que ser $B = C$?

Solución. La respuesta en negativa en ambos casos. Se puede ver muy fácilmente con diagramas de Venn.

PROBLEMA 3:

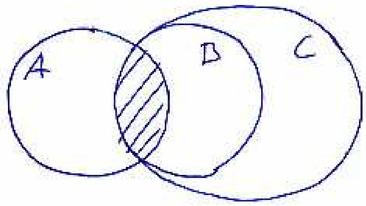
Utilizando diagramas de Venn comprobar que

$$(A \triangle C) \subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle C),$$

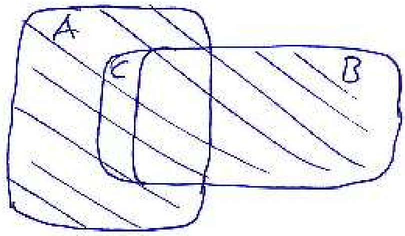
donde $\triangle$ denota la diferencia simétrica $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, y siendo $A \setminus B = A - B$. ¿Es en general una igualdad esa relación de contenido?

Solución. La relación de contenido no es en general una igualdad, como se desprende fácilmente de los diagramas.

(2)



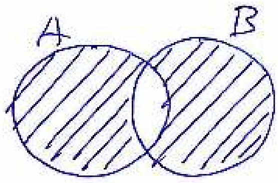
$A \cap B = A \cap C$

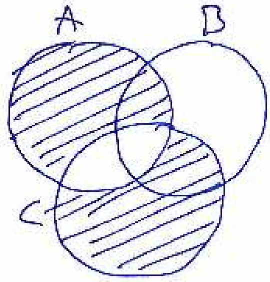


$A \cup B = A \cup C$

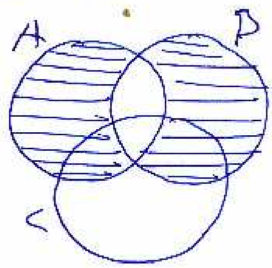
(3)

$A \triangle B$

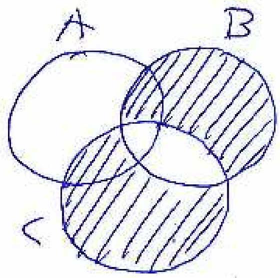




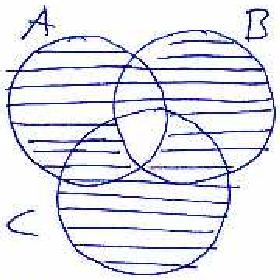
$A \triangle C$



$A \triangle B$



$B \triangle C$



$(A \triangle B) \cup (B \triangle C)$

$A \triangle C \subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$

$A \triangle C \neq (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$

PROBLEMA 4:

Elegir la opción verdadera de las siguientes afirmaciones:

1. $\emptyset \subset \{0\}$
2. $0 \in \emptyset$
3. $\emptyset \in 0$
4. $0 \subset \emptyset$

SOLUCIÓN. La primera. El conjunto vacío está contenido dentro del conjunto que contiene al elemento 0.

PROBLEMA 5:

Usando diagramas de Venn encontrar cuál de las siguientes afirmaciones entre los conjuntos A y B es falsa:

1. $A \cap B = \overline{A} \cup \overline{B}$
2. $\overline{\overline{A}} = A$
3. $A \cup (A \cap B) = A$
4. $A \cap (A \cup B) = A$

SOLUCIÓN.

La primera.

Otra forma sencilla de demostrar la falsedad de una afirmación es dar un contraejemplo:

Sean $A = \{1, 4\}, \quad B = \{2, 4, 5, 6\}, \quad U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Entonces:

$A \cap B = \{4\}$ Pero

$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{\{1, 4\}} \cup \overline{\{2, 3, 4, 5\}} = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \cup \{1, 6, 7, 8, 9, 10\} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Por tanto en general $A \cap B \neq \overline{A} \cup \overline{B}$.

PROBLEMA 6:

Usando diagramas de Venn encontrar cuál de las siguientes afirmaciones entre los conjuntos A y B es falsa:

1. $A \cup (B \setminus A) = A \cap B$
2. $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$
3. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
4. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$

Solución.

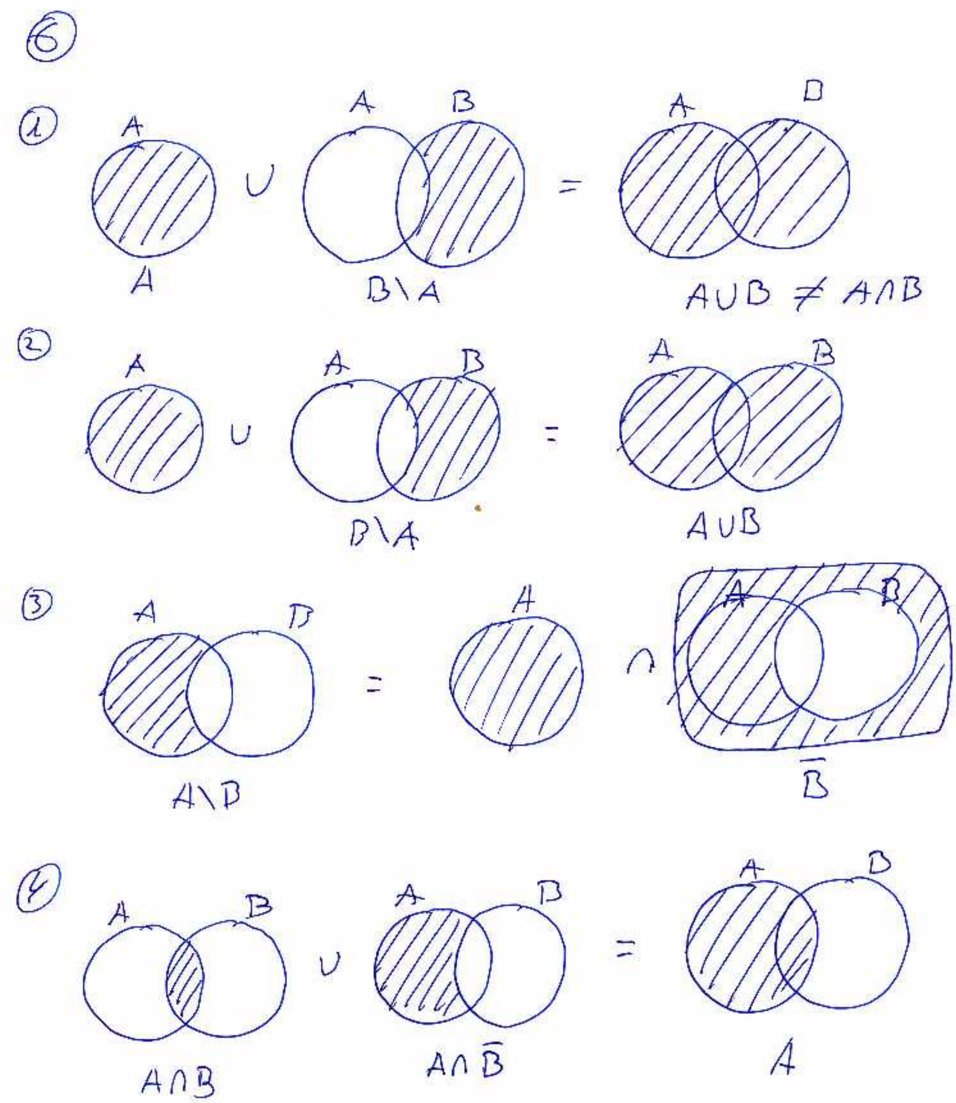
La primera.

Otra forma sencilla de demostrar la falsedad de una afirmación es dar un contraejemplo:

Sean $A = \{1, 4\}$, $\quad B = \{2, 4, 5, 6\}$, $\quad U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Entonces $A \cap B = \{4\}$.

Por otro lado $B \setminus A = \{2, 5, 6\}$, así que $A \cup (B \setminus A) = \{1, 2, 4, 5, 6\} \neq \{4\} = A \cap B$



PROBLEMA 7:

Simplificar la siguiente expresión:

$$\overline{(\overline{A}\cup\overline{B})}\cup\overline{(\overline{A}\cup B)}$$

Solución.

Teniendo en cuenta la ley de Morgan: $\overline{A}\cup\overline{B} = \overline{A\cap B}$ podemos reescribir la expresión del siguiente modo: $(A\cap B)\cup\overline{(\overline{A}\cup B)}$ y aplicando lo mismo a la segunda parte de la expresión tenemos $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$ y teniendo en cuenta la propiedad distributiva $((A\cap B)\cup A)\cap(A\cap B\cap\overline{B}) = A\cap A = A$, pues $B\cap\overline{B}=\emptyset$.

PROBLEMA 8:

Demostrar que se verifican las siguientes igualdades:

1. $A\cup(A\cap B) = A\cap(A\cup B) = A$
2. $(A\cup B)\setminus C = (A\setminus C)\cup(B\setminus C)$
3. $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$
4. $A\setminus B = A\triangle(A\cap B)$

Solución.

1. (Obvia)
2. Es obvia, basta usar unos digramas de Venn.
3. Propiedad asociativa de la diferencia simétrica.
4. Si tenemos en cuenta que $A\triangle C = A\cup C\setminus A\cap C$ y asumimos que $C = A\cap B$ entonces la segunda parte de la igualdad será $A\cup(A\cap B)\setminus A\cap(A\cap B)$ y por tanto $A\setminus B$.

PROBLEMA 9:

Simplificar la expresión:

$$\overline{(\overline{[(A\cup B)\cap C]}\cup\overline{B})}$$

Solución.

Usando la ley de Morgan obtenemos $[[(A\cup B)\cap C]\cap B]$ que es igual a $(A\cup B)\cap B\cap C$, y como los tres primeros miembros son B el resultado pedido es $B\cap C$.

PROBLEMA 10:

1. ¿Cuál de los siguiente conjuntos es $\mathcal{P}(A)$ para algún conjunto A?

$$\emptyset,\quad \{\emptyset,a\},\quad \{\emptyset,\{a\}\},\quad \{\emptyset,\{a\},\{\emptyset,a\}\},\quad \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$$

2. Determinar el cardinal de los siguientes conjuntos:

$$A = \mathcal{P}(\{a, b, \{a, b\}\}), \quad B = \mathcal{P}(\{\emptyset, a, \{a\}, \{\{a\}\}\}), \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$$

Solución.

1. La tercera y última expresión.
2. 8, 16 y 2 respectivamente.

PROBLEMA 11:

Si $|A| = 55$, $|B| = 40$, $|C| = 80$, $|A \cap B| = 20$, $|A \cap B \cap C| = 17$, $|B \cap C| = 24$ y $|A \cup C| = 100$, hallar

1. $|A \cap C|$
2. $|C \setminus B|$
3. $|(B \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)|$.

Solución.

1. Como $|A \cup C| = |A| + |C| - |A \cap C|$ entonces $100 = 55 + 80 - |A \cap C|$
2. $80 - 24 = 56$.
3. $24 - 17 = 7$.

PROBLEMA 12:

Un biólogo trabaja con 66 especies de plantas, de las cuales 29, 41 y 25 viven en ecosistemas de tipo A, B y C respectivamente. Sabiendo que 16 pueden vivir tanto en ecosistemas A como B, 8 en ecosistemas A y C, y 7 en ecosistemas B y C, obtener el número de especies que pueden estar presentes en los tres ecosistemas. Calcular también el número de especies que pueden vivir en ecosistemas de tipo A y B pero que no pueden vivir en los de tipo C.

Solución. Vamos a echar mano del principio de inclusión exclusión para tres conjuntos:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

En este caso tendremos podemos traducirlos a números según el enunciado de la siguiente manera:
$66 = 29 + 41 + 25 - 16 - 8 - 7 + |A \cap B \cap C|$. Despejado $|A \cap B \cap C|$ que es lo que nos piden sale 2
Sobre el número de especies que pueden vivir en ecosistemas de tipo A y B pero que no pueden vivir en los de tipo C se puede deducir fácilmente que son 14, es decir $16 - 2$.

PROBLEMA 13:

Sea la función $f(x) = \lceil x \rceil$ la "función parte entera por arriba" (función techo) y $f(x) = \lfloor x \rfloor$ la función "parte entera por abajo" (función suelo). Así por ejemplo $\lceil 1{,}1 \rceil = 2$ y $\lfloor 0{,}3 \rfloor = 0$. Entonces calcular:

a) $\lceil 3/4 \rceil$
b) $\lfloor 7/8 \rfloor$
c) $\lceil -3/4 \rceil$
d) $\lfloor -7/8 \rfloor$

SOLUCIÓN.

a) 1 b) 0 c) 0 d) -1

PROBLEMA 14:

1. Usar la propiedad $\lceil x+n \rceil = \lceil x \rceil + n$ para calcular $\lceil 3{,}01 \rceil$
2. Demostrar la falsedad o vercidad de la expresión: $\lceil x+y \rceil = \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$

SOLUCIÓN.

1. $\lceil 3{,}01 \rceil = \lceil 0{,}01 + 3 \rceil = \lceil 0{,}01 \rceil + 3 = 1 + 3 = 4$
2. La expresión $\lceil x+y \rceil = \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$ es falsa. Basta un contraejemplo para demostralo $\lceil 1/2 + 1/2 \rceil = 1$, pero $\lceil 1/2 \rceil + \lceil 1/2 \rceil = 1 + 1 = 2$

PROBLEMA 15:

Determinar si las siguientes funciones son biyecciones:

a) $f(x) = 2x + 2$
b) $f(x) = x^2 - 1$
c) $f(x) = x^3$
d) $f(x) = (x^2 + 1)/(x^2 + 2)$

SOLUCIÓN.

Sí, No, Sí, No.

PROBLEMA 16:

En un grupo de 15 personas hay 7 que tienen nacionalidad francesa, 8 que tienen nacionalidad británica y otros 8 que tienen nacionalidad española. Además hay 2 que son británicos y españoles a la vez, 4 que son españoles y franceses simultáneamente y 3 que tienen la doble nacionalidad británica y francesa. ¿Cuántos tienen triple nacionalidad?

SOLUCIÓN.

Por el principio de inclusión exclusión es fácil ver que sólo hay uno.
$|(E \cap B \cap F)| = 15 - 7 - 8 - 8 + 2 + 4 + 3 = 1$

PROBLEMA 17:

En un grupo de 12 estudiantes hay 7 matriculados en Matemática Discreta, 9 que están matriculados en Álgebra y 10 en Estadística. Además se sabe que hay 3 que están matriculados en las tres a la vez, en Álgebra y Estadística hay hay 8, y 5 que lo están en Estadística y Discreta simultáneamente. ¿Cuántos están matriculados en Álgebra y Discreta?

<u>SOLUCIÓN. </u>Por el principio de inclusión exclusión es fácil ver que sólo hay uno.
$|(E \cap A \cap D)| = 3 = 12 - 9 - 10 - 7 + 8 + 5 + |A \cap D|$ y despejando obtenemos $|A \cap D| = 4$

<u>PROBLEMA 18:</u>

Sea el conjunto $A = \{2, 3, 4, 6, 12, 15, 24, 90, 180, 360\}$ y la relación de divisibilidad

$$a\mathcal{R}b \iff a \mid b\,.$$

Teniendo en cuenta que el digrama de Hasse del conjunto ordenado $(A, |\,)$ que se muestra en la figura.

(a) Encontrar (si existen) los elementos maximales, minimales, máximo y mínimo de A.

(b) Dado el subconjunto $B = \{2, 3, 4, 6, 12\}$, encontrar (si existen) los conjuntos mayorante y minorante y el supremo e ínfimo de B.

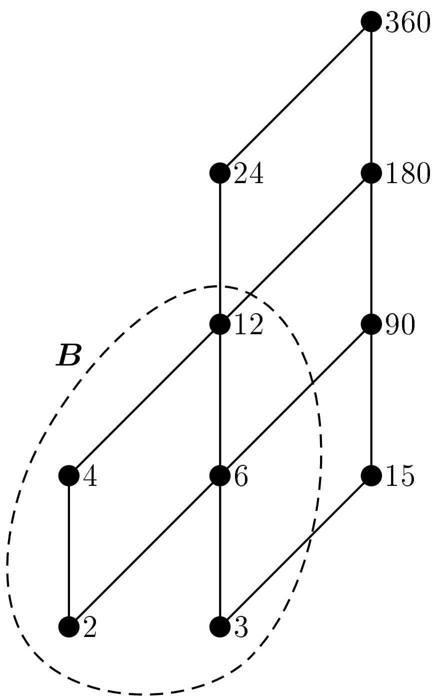


Figura 1: El diagrama de Hasse asociado al problema.

<u>SOLUCIÓN. </u>

a) El único elemento maximal de A es 360, luego, al tratarse de un conjunto finito, $\text{máx}(A) = 360$. Los elementos minimales de A son $\{2, 3\}$ y por tanto no existe $\text{mín}(A)$.

b) El conjunto mayorante de B es $\text{mayor}(B) = \{12, 24, 180, 360\}$, luego $\sup(B) = 12$. El conjunto minorante de B es $\text{minor}(B) = \emptyset$, luego no existe $\text{ínf}(B)$.

<u>PROBLEMA 19:</u>

Considérese la relación de orden parcial $\preceq$ definida en el conjunto D de los divisores positivos de 84, excluyendo el 1, mediante

$$a \preceq b \;\Leftrightarrow\; a \text{ divide a } b\,.$$

1. Dibujar el diagrama de Hasse del orden parcial $(D, \preceq)$.

2. Dar, si existen, los elementos maximales y minimales, así como el máximo y mínimo de $(D, \preceq)$.

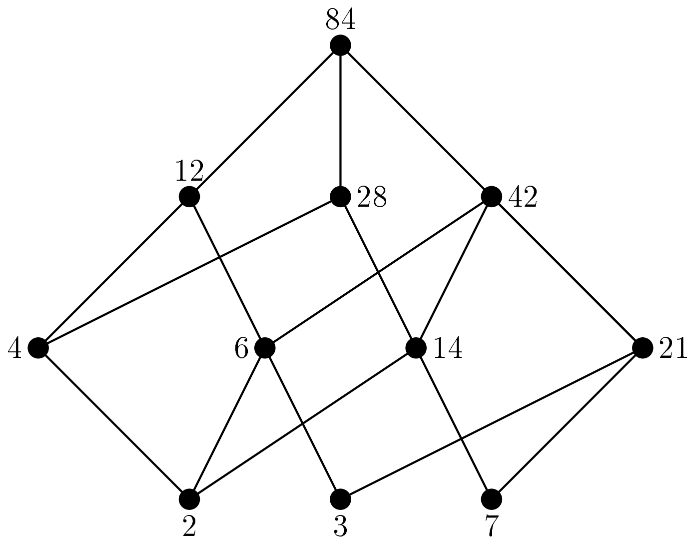
3. Dar, si existen, el conjunto de cotas superiores, cotas inferiores, supremo e ínfimo en $(D, \preceq)$ del conjunto $B = \{2, 3, 6, 28\} \subset D$.

<u>Solución.</u>

1) Es trivial enumerar los elementos que forman parte del conjunto D. En concreto

$$D = \{2, 3, 7, 4, 6, 14, 21, 12, 28, 42, 84\} .$$

El diagrama de Hasse asociado al conjunto parcialmente ordenado $(D, \preceq)$ es



2) Trivialmente 84 es maximal y máximo; 2, 3, 7 son minimales y no hay mínimo.

3) El conjunto de las cotas superiores de B es $\{84\}$ por lo que 84 es el supremo. El conjunto de las cotas inferiores de B es vacío por lo que no hay ínfimo.

<u>PROBLEMA 20:</u>

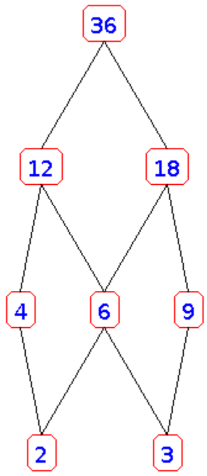
Considérese la relación de orden parcial $\preceq$ definida en el conjunto D de los divisores positivos de 36 , **excluyendo el 1**, mediante

$$a \preceq b \Leftrightarrow a \text{ divide a } b\, .$$

1. Dibujar el diagrama de Hasse del orden parcial $(D, \preceq)$.

2. Dar, si existen, los elementos maximales y minimales, así como el máximo y mínimo de $(D, \preceq)$.

Solución.



Maximales: 36. Mimales: 2 y 3. Máximo: 36. No existe mínimo.

PROBLEMA 21:

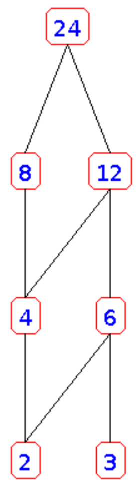
Considérese la relación de orden parcial $\preceq$ definida en el conjunto D de los divisores positivos de 24 , **excluyendo el 1**, mediante

$$a \preceq b \;\Leftrightarrow\; a \text{ divide a } b\,.$$

1. Dibujar el diagrama de Hasse del orden parcial $(D, \preceq)$.

2. Dar, si existen, los elementos maximales y minimales, así como el máximo y mínimo de $(D, \preceq)$.

Solución.



Maximales: 24. Minimales; 2 y 3. Máximo: 24. No existe mínimo.

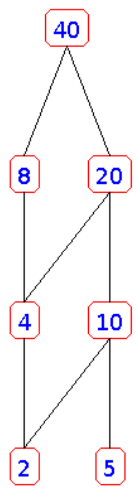
PROBLEMA 22:

Considérese la relación de orden parcial $\preceq$ definida en el conjunto D de los divisores positivos de 40 , **excluyendo el 1**, mediante

$$a \preceq b \Leftrightarrow a \text{ divide a } b\,.$$

1. Dibujar el diagrama de Hasse del orden parcial $(D, \preceq)$.
2. Dar, si existen, los elementos maximales y minimales, así como el máximo y mínimo de $(D, \preceq)$.

Solución.



Maximales: 40. Minimales 2 y 5. Máximo: 40. No existe mínimo.

PROBLEMA 23:

Sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathbb{R}^3$ definida como

$$(a_1, a_2, a_3)\ \mathcal{R}\ (b_1, b_2, b_3) \ \Leftrightarrow\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2.$$

Demostrar que $\mathcal{R}$ es de equivalencia y encontrar las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

Solución.

Para demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia hay que demostrar que es reflexiva, simétrica y transitiva. Definamos la función $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, entonces $\vec{a}\,\mathcal{R}\,\vec{b} \ \Leftrightarrow\ f(\vec{a}) = f(a_1, a_2, a_3) = f(b_1, b_2, b_3) = f(\vec{b})$. Esta observación simplifica el razonamiento:

- Reflexiva: $f(\vec{a}) = f(\vec{a})$, luego $\vec{a}\mathcal{R}\vec{a}$.
- Simétrica: Si $\vec{a}\mathcal{R}\vec{b}$, entonces $f(\vec{a}) = f(\vec{b})$, y por tanto $f(\vec{b}) = f(\vec{a}) \Rightarrow \vec{b}\mathcal{R}\vec{a}$.
- Transitiva: Si $\vec{a}\mathcal{R}\vec{b}$ y $\vec{b}\mathcal{R}\vec{c}$, entonces $f(\vec{a}) = f(\vec{b}) = f(\vec{c})$. Luego, $\vec{a}\mathcal{R}\vec{c}$.

Dado un cierto $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ se tiene que

$$f(a_1, a_2, a_3) \ = \ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = A^2 \geq 0\,.$$

La clase de equivalencia que contiene al vector $\vec{a}$ estará formada por todos aquellos puntos $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ que satisfagan $f(\vec{b}) = A^2$. Resulta entonces evidente que las clases de equivalencia vienen dadas por superficies esféricas en $\mathbb{R}^3$ parametrizadas por el valor de su radio $A \geq 0$. Obviamente, la intersección de dos esferas de distinto radio es vacía. Además, es posible representar cada una de las clases de equivalencia usando el único punto en el que el semi-eje positivo $x \geq 0$ corta a la correspondiente esfera. De este modo, los elementos del conjunto cociente son de la forma

$$[(A, 0, 0)]_{\mathcal{R}} \ = \ \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \ \mid\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = A^2\}\,.$$

y se tiene que

$$\mathbb{R}^3/\mathcal{R} \ = \ \{[(A, 0, 0)]_{\mathcal{R}} \ \mid\ A \in \mathbb{R}_+\}\ .$$

PROBLEMA 24:

Sea el conjunto $V = \{x \mid 1 \leq x \leq 20\} \subset \mathbb{N}$. Sea el producto cartesiano $V \times V$ y sobre él definimos la siguiente relación

$$(x, y)\,\mathcal{R}\,(a, b) \ \Leftrightarrow\ x + b \ = \ y + a\,.$$

1. Demostrar que es una relación de equivalencia.
2. Calcular las clases de equivalencia. ¿Cuál es la clase que tiene mayor número de elementos? ¿Cuál es la clase que tiene menor número de elementos?
3. Calcular el conjunto cociente $(V \times V)/\mathcal{R}$ y decir su número de elementos.

Solución.

1) $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia porque es de la forma $(x, y)\mathcal{R}(a, b)$ si y sólo si $f(x, y) = f(a, b)$ con $f(x, y) = x - y$. La demostración detallada de este punto se encuentra en el problema 1 de este documento.

2) Las clases de equivalencia son de la forma $x-y=$ constante. La constante etiqueta las clases de equivalencia y puede tomar valores entre -19 y 19. Por ejemplo la clase de equivalencia del $(1,1)$ corresponde a tomar dicha constante igual a cero y contiene a los elementos

$$[(1,1)]_{\mathcal{R}} \;=\; \{(x,x) \mid 1 \leq x \leq 20\}\,.$$

En general podemos escribir las $19 \cdot 2 + 1 = 39$ clases de equivalencia de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
[(x,1)]_{\mathcal{R}} &= \{(x+a, 1+a) \mid 0 \leq a \leq 20-x\}\,, \qquad 1 \leq x \leq 20\,,\\
[(1,x)]_{\mathcal{R}} &= \{(1+a, x+a) \mid 0 \leq a \leq 20-x\}\,, \qquad 2 \leq x \leq 20\,.
\end{aligned}$$

En la segunda línea hemos suprimido el caso $x=1$, al haberlo tenido en cuenta en la primera línea.
El número de elementos de cada clase es

$$\begin{aligned}
|[(x,1)]_{\mathcal{R}}| &= 21-x\,, \qquad 1 \leq x \leq 20\,,\\
|[(1,x)]_{\mathcal{R}}| &= 21-x\,, \qquad 2 \leq x \leq 20\,.
\end{aligned}$$

Luego la clase con mayor número de elementos será la $[(1,1)]_{\mathcal{R}}$ que tiene 20 elementos. Las clases con menor número de elementos serán $[(1,20)]_{\mathcal{R}}$ y $[(20,1)]_{\mathcal{R}}$ con un sólo elemento.

3) El conjunto cociente $(V \times V)/\mathcal{R}$ tendrá 39 elementos y será igual a

$$(V \times V)/\mathcal{R} \;=\; \{[(x,1)]_{\mathcal{R}} \mid 1 \leq x \leq 20\} \,\cup\, \{[(1,x)]_{\mathcal{R}} \mid 2 \leq x \leq 20\}\;.$$

PROBLEMA 25:

Considera la siguiente relación definida en $\mathbb{N}$:

$$x\mathcal{R}y \;\Leftrightarrow\; \exists\, k \in \mathbb{Z}_+ \;:\; y = 2^k x\,.$$

(a) Demuestra que $(\mathbb{N}, \mathcal{R})$ es un conjunto parcialmente ordenado.

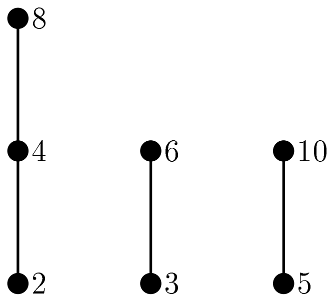
(b) Sea $X = \{2,3,4,5,6,8,10\}$. Dibuja el diagrama de Hasse de $(X, \mathcal{R})$.

(c) Encuentra, si existen, el máximo, el mínimo, los elementos maximales y minimales y las cotas superiores e inferiores del conjunto $X \subset \mathbb{N}$.

Solución.

a) La relación será una relación de orden si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. La reflexividad de $\mathcal{R}$ se sigue directamente de la igualdad $x = 2^k x$, valida para $k = 0 \in \mathbb{Z}_+$.
Para demostrar que la relación satisface la propiedad antisimétrica debemos comprobar que si se cumple que $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}x$ entonces necesariamente se sigue que $x=y$. En este punto es crucial darse cuenta de que la antisimetría de la relación es consecuencia de que únicamente estamos considerando enteros no negativos en los exponentes de 2^k. Si no fuera así, aun en el caso en que $x \neq y$, dado un k tal que $x = 2^k y$, bastaría tomar $-k$ para tener $y = 2^{-k} x$.
Para demostrar que $\mathcal{R}$ satisface la propiedad transitiva debemos demostrar que, si $x = 2^\ell y$ e $y = 2^m z$, entonces necesariamente $x = 2^k z$ para algún $k \in \mathbb{Z}_+$. Sustituyendo la segunda ecuación en la primera tenemos que, en efecto, $x = 2^\ell 2^m z = 2^{\ell+m} z = 2^k z$, con $k = \ell + m \in \mathbb{Z}_+$.

b) El diagrama de Hasse pedido es el siguiente:



c) El conjunto de los elementos maximales de $(X, \mathcal{R})$ es $\{8, 6, 10\}$. Por su parte, $\{2, 3, 5\}$ es el conjunto de los elementos minimales. Obviamente no hay ni máximo ni mínimo en $(X, \mathcal{R})$. Finalmente, tanto el conjunto de las cotas inferiores como el de las cotas superiores de $X \subset \mathbb{N}$ son vacíos.

PROBLEMA 26:

Resolver las siguientes cuestiones:

1. Calcular el número de maneras de colocar en un tablero de ajedrez orientado y con 64 casillas las siguientes piezas: un rey, una reina, un caballo, una torre y un alfil blancos y un rey, una torre, un caballo y un alfil negros.
2. En los alambres que hay entre dos postes de un tendido trifásico de alta tensión en Bodega Bay se distribuyen 99 mirlos indistinguibles. ¿De cuántas maneras se pueden colocar en los tres alambres si no consideramos la distancia entre pájaros?
3. Si, por el contrario, tenemos en cuenta la distancia entre pájaros y si en cada alambre solo hay 200 posiciones posibles para los pájaros, ¿de cuántas maneras se pueden colocar los 99 mirlos?

NOTA: Los resultados se darán en función de números combinatorios $\binom{a}{b}$ y/o factoriales $a!$

SOLUCIÓN.

1) Las piezas de ajedrez son todas distintas entre sí y las casillas del ajedrez también son distintas entre sí (al estar orientado). Por lo tanto debemos colocar $5 + 4 = 9$ piezas distintas en $8^2 = 64$ casillas distintas. La primera pieza la podemos colocar de 64 maneras, una vez colocada, podemos colocar la segunda de 63 maneras distintas, etc. Una vez colocadas las ocho primeras piezas, hay $64 - 8 = 56$ maneras de colocar la última pieza. Luego, la solución del problema es

$$64 \cdot 63 \cdot 62 \cdots 57 \cdot 56 \;=\; \frac{64!}{55!} \;=\; 9993927307714560\,.$$

También se podría hacer de la siguiente manera: hay $\binom{64}{9}$ maneras de elegir las 9 casillas a ocupar y, una vez elegidas, hay $9!$ maneras de colocar las 9 piezas en ellas. Luego, la solución es $\binom{64}{9}\, 9! = 64!/55!$

2) Tenemos que distribuir 99 objetos iguales (los mirlos) en 3 cajas distintas (los alambres). Como en cada alambre puede haber cualquier número de mirlos (incluido ninguno), el resultado es

$$\binom{99+2}{2} \;=\; \binom{101}{2} \;=\; 5050\,.$$

3) En este caso, las posiciones de los mirlos son distinguibles. De hecho hay 600 posiciones posibles que pueden ocupar los 99 mirlos. Luego habrá

$$\binom{600}{99}$$

maneras de colocar a los 99 mirlos.

PROBLEMA 27:

Resolver los siguientes problemas:

(a) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir diez bolas idénticas en seis recipientes distintos?

(b) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir si ningún recipiente puede quedar vacío?

(c) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir si el cuarto recipiente contiene un número impar de bolas?

SOLUCIÓN.

a) Representamos cada bola mediante un cuadrado y cada recipiente por un par de barras. El enunciado nos dice que las bolas son idénticas; pero los recipiente no lo son. Una manera posible de hacer el reparto es la siguiente:

$$|\ \square\,\square\,\square\ |\ \square\,\square\,\square\ |\quad |\ \square\,\square\,\square\,\square\ |\ \ |\ \ |$$

Los restantes repartos se obtienen reordenando los objetos que aparecen en la representación anterior. En concreto, contamos con siete barras; pero las dos de los extremos no las podemos mover, de manera que sólo hay cinco barras móviles y diez cuadrados. Como no hay ninguna restricción en la manera de colocar las barras y los cuadrados, la solución pedida es

$$\binom{10+5}{5} = \binom{15}{5} = 3003\,.$$

b) Si ningún recipiente puede quedar vacío, el argumento es el casi el mismo que en el apartado a). La única diferencia es que ahora las cinco barras móviles hay que colocarlas obligatoriamente entre dos cuadrados para que siempre haya al menos un cuadrado en cada recipiente (es decir, entre dos barras consecutivas). Una reparto posible es el siguiente:

$$|\ \square\,\square\ |\ \square\,\square\ |\ \square\ |\ \square\,\square\,\square\ |\ \square\ |\ \square\ |$$

Como hay nueve espacios entre los diez cuadrados, la solución pedida es

$$\binom{9}{5} = 126\,.$$

c) Si el cuarto recipiente tiene un numero impar de bolas, sólo puede contener $1, 3, 5, 7$ ó 9 bolas. En el primer caso, tendríamos una bola en dicho recipiente y nueve bolas en el resto a colocar sin ninguna restricción en los cinco recipientes restantes. Usando el mismo argumento que en el primer apartado, la solución de este caso sería $\binom{9+5-1}{5-1} = \binom{13}{4}$.
Si colocamos 3 bolas en el cuarto recipiente, tenemos que situar las siete bolas restantes en los cinco recipiente que nos quedan. La solución es $\binom{7+5-1}{5-1} = \binom{11}{4}$. Claramente si colocamos k

bolas en el cuarto recipiente, el número de maneras de situar las $10-k$ bolas restantes en los cinco recipientes es $\binom{10-k+5-1}{5-1} = \binom{14-k}{4}$. La solución pedida es por tanto

$$\binom{13}{4} + \binom{11}{4} + \binom{9}{4} + \binom{7}{4} + \binom{5}{4} \;=\; 1211\,.$$

PROBLEMA 28:

Determinar el número de subconjuntos de un conjunto de 10 elementos que

(a) tengan menos de 5 elementos,

(b) tengan más de 7 elementos,

(c) tengan un número impar de elementos.

SOLUCIÓN.

La manera más rápida de solucionar este problema es aprovechar la biyección entre el número de subconjuntos de un conjunto de n elementos y el de las cadenas binarias de longitud n, de manera que si un elemento pertenece a un subconjunto dado, el bit correspondiente es 1 (y 0 en caso contrario).

El apartado a) nos pide el número de cadenas de bits de longitud 10 con menos de 5 unos. El número de cadenas de bits de longitud 10 con k unos es simplemente

$$N_k \;=\; \binom{10}{k}\,, \qquad 0 \le k \le 10\,.$$

De esta modo, la solución de a) es

$$N_{k<5} \;=\; \sum_{k=0}^{4} N_k \;=\; \sum_{k=0}^{4} \binom{10}{k} \;=\; 1 + 10 + \frac{90}{2} + \frac{720}{3!} + \frac{10!}{6!\,4!} \;=\; 386\,.$$

El apartado b) consiste en calcular el número $N_{k>7}$ de cadenas de bits de longitud 10 con más de 7 unos. Luego,

$$N_{k>7} \;=\; \sum_{k=8}^{10} N_k \;=\; \sum_{k=8}^{10} \binom{10}{k} \;=\; \frac{90}{2} + 10 + 1 \;=\; 56\,.$$

El apartado c) consiste en calcular el número de cadenas de bits de longitud 10 con un número impar de unos. Luego,

$$\begin{aligned} N_{k\text{ impar}} &= \sum_{p=0}^{4} N_{2p+1} \\ &= \sum_{p=0}^{4} \binom{10}{2p+1} \\ &= 2\left[\binom{10}{1} + \binom{10}{3}\right] + \binom{10}{5} \\ &= 512\,. \end{aligned}$$

El resultado es lógico ya que el número total de cadenas de bits de longitud 10 es $2^{10} = 1024$ y aquellas con un número impar de unos serán, por simetría, la mitad (i.e., 512).

PROBLEMA 29:

¿De cuantas maneras se pueden recolocar las letras de la palabra BASEBALL de tal modo las nuevas palabras empiecen y terminen por vocal?

SOLUCIÓN.

$$N = 3\frac{6!}{2!2!}$$

PROBLEMA 30:

¿De cuantas maneras se pueden recolocar las letras de la palabra MISSISSIPPI de tal modo las nuevas palabras empiecen por I? ¿Y para que la P estén juntas?

SOLUCIÓN.

$$N = \frac{10!}{3!4!2!}$$

$$N = 10\frac{9!}{4!4!}$$

PROBLEMA 31:

Dado el conjunto de símbolos $\{a, a, a, a, a, b, b, b, c, d, d\}$ ¿Cuántas palabras de 11 letras se pueden formar reordenando sus elementos?

SOLUCIÓN.

$$N = \frac{11!}{5!3!1!2!}$$

PROBLEMA 32:

De cuantas maneras se puede obtener una mano de 3 espadas y 2 bastos de una baraja española de 40 cartas.

SOLUCIÓN.

$$N = \binom{10}{3} \cdot \binom{10}{2} = 120 \times 45 = 5400$$

PROBLEMA 33:

De un grupo de 12 estudiantes se quiere enviar a 4 delegados a una convención. ¿De cuántas maneras se puede hacer? ¿Y si dos no pueden asistir juntos? ¿Y si 2 que están casados sólo pueden ir juntos?

SOLUCIÓN.

- Como hay 12 si elegimas 4 de ellos tendremos

$$\binom{12}{4} = 495$$

- Los otros dos miembros de la delegación pueden elegirse de

$$\binom{10}{2}$$

maneras distintas, así que lo pedido es

$$\binom{12}{4} - \binom{10}{2} = 450$$

- Si los casados no van $\binom{10}{4} = 210$, si van $\binom{10}{2} = 45$. Así que $N = 210 + 45 = 255$ maneras.