Sea $\big(V, \langle\ \cdot\ ,\ \cdot\ \rangle\big)$ un espacio vectorial Euclídeo. Dados dos endomorfismos ortogonales $f : V \to V$ y $g : V \to V$, su composición es también un endomorfismo ortogonal. En efecto, para cualquiera $u, v \in V$ se tiene que

$$\langle (f \circ g)(u), (f \circ g)(v) \rangle = \langle f(g(u)), f(g(v)) \rangle = \langle g(u), g(v) \rangle = \langle u, v \rangle.$$

Ejemplo 1 En $\mathbb{R}^2$ es fácil decidir cual será el resultado de una composición de endomorfismos ortogonales si tenemos en cuenta si conservan o invierten la orientación. Por ejemplo, dados dos giros cuya matrices respecto de la base canónica son respectivamente

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

sabemos que su composición tendrá matriz AC respecto de la base canónica. Es decir, que $\det(AC) = \det(A)\det(C) = 1$, y por tanto ya podemos decir que no será una simetría (las cuales tiene determinante -1, excepto la simetría central). Así que la composición será también un giro, de hecho, si usamos las fórmulas trigonométricas de cosenos y senos de una suma de ángulos, deducimos que

$$AC = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

es decir, es el giro de ángulo $\alpha + \beta$. Por ejemplo, podemos componer el giro σ de ángulo $\frac{\pi}{4}$, cuya matriz es,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

consigo mismo, es decir, podemos considerar σ^2, cuyo resultado será evidentemente el giro de ángulo $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ y cuya matriz es

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De hecho, la composición σ^8 nos da el giro de ángulo $8\frac{\pi}{4} = 2\pi$, es decir, la identidad. O dicho de otra forma,

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2 De nuevo en $\mathbb{R}^2$, si componemos un giro con una simetría axial, ¿qué tipo de endomorfismo obtendremos? El giro conserva la oritentación (es decir, tiene una matriz de determinante 1), y la simetría axial lo invierte (es decir, tiene una matriz de determinante -1), así que su composición también la invierte (su determinante será -1 puesto que es el producto de los dos anteriores). Así que la única posibilidad es que la composición sea también una simetría axial.

Por ejemplo, si consideramos el giro $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de ángulo $\frac{\pi}{2}$ con la simetría $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ respecto de la recta $y = 0$, obtenemos que $s \circ \sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es de nuevo una simetría axial, ¿pero respecto a qué recta? Para contestar esta pregunta debemos averiguar qué vectores quedan fijos. El giro σ convierte el vector $(-1, 1)$ en el vector$(-1, -1)$, y la simetría s convierte $(-1, -1)$ en el vector $(-1, 1)$. Así pues, $s \circ \sigma$ deja fijo los vectores en la recta $y = -x$, de lo que deducimos que $s \circ \sigma$ es una simetría respecto de la recta $y = -x$.

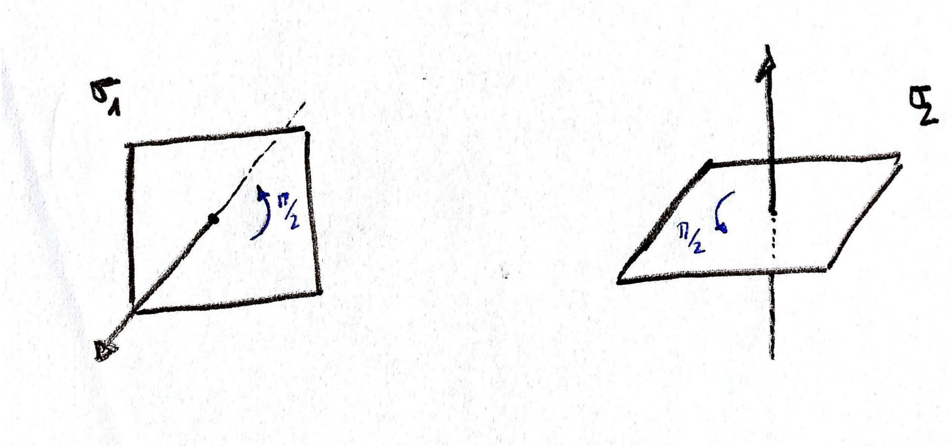
Si hacemos la composición al revés, es decir, consideramos la composición $\sigma \circ s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ entonces también nos quedará una simetría axial. Ahora el vector $(1, 1)$ se convierte por medio de s en el vector $(1, -1)$, y el giro σ transforma $(1, -1)$ en $(1, 1)$. Por tanto $\sigma \circ s$ deja fijo los vectores en la recta $x = y$, de lo que deducimos que $\sigma \circ s$ es la simetría respecto de la recta $x = y$.

En particular, obsérvese que $\sigma \circ s \neq s \circ \sigma$.

Ejemplo 3 En $\mathbb{R}^3$, por ejemplo, la rotación de dos rotaciones axiales nos debe quedar una rotación axial. Por ejemplo, si componemos las rotaciones σ_1 y σ_2 con eje $x = y = 0$ y ángulos $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{3}$, su composición $\sigma_1 \circ \sigma_2$ es la rotación axial respecto del eje $x = y = 0$ de ángulo $\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$ (la cual coincide con la simetría ortogonal respecto de la recta $x = y = 0$).

Otro ejemplo, sean $\sigma_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $\sigma_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ las rotaciones axiales cuyas matrices respecto de la base canónica son respectivamente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



La composición $\sigma = \sigma_2 \circ \sigma_1$ tiene matriz

$$CA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular el eje de la rotación axial $\sigma_1 \circ \sigma_2$ tan solo tenemos que calcular los autovectores asociados al autovalor $\lambda = 1$, es decir,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_1 = L[(1,1,1)]$$

Por tanto el giro se produce básicamente en el plano $[V_1]^\perp = \{x + y + z = 0\}$. Una base ortonormal de $[V_1]^\perp$ es

$$\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})\}$$

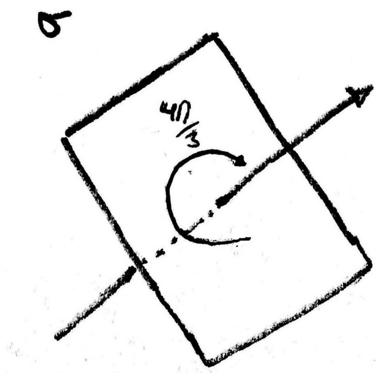
La matriz de $\sigma_2 \circ \sigma_1$ respecto de la base ortonormal de $\mathbb{R}^3$

$$\{(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})\}$$

es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

y por tanto el ángulo de la rotación es $\frac{4\pi}{3}$.



Ejercicio 1 Con los datos del ejemplo anterior, estudiar la composición $\sigma_1 \circ \sigma_2$.