Capítulo 8

Grafos

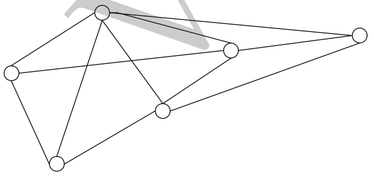
8.1. ¿Qué es un grafo?

Los grafos, los objetos que estudiaremos en éste y los siguientes capítulos, resultan ser extremadamente útiles para analizar problemas muy diversos como, por ejemplo, los siguientes:

1. Problemas de **asignación de tareas**: tenemos un conjunto de trabajadores y otro de tareas y la información de para qué tareas está preparado cada trabajador y buscamos una asignación de tareas (a cada trabajador, una tarea distinta para la que esté preparado) de forma que consigamos ocupar al mayor número de trabajadores posible.

2. **Construcción de redes**: tenemos una serie de ciudades que queremos conectar mediante un oleoducto; un estudio de ingeniería previo nos permite conocer el precio de cada conexión. Se trata de conectar todas las ciudades con el menor coste posible.

3. **Problema de horarios**: en una cierta licenciatura de una Universidad se deben impartir 10 asignaturas, y no se pueden programar a la misma hora dos asignaturas si hay algún alumno matriculado en ambas. Lo que se busca es minimizar el número de horas necesario para programar todas las asignaturas salvando esa dificultad; o bien determinar cuáles son los posibles horarios si el número de horas disponible es fijo.



Los grafos son, como veremos, un lenguaje, una notación, que permite representar **relaciones binarias** —es decir, entre pares de objetos— en un conjunto (recordemos la sección 3.5). De una manera informal, podríamos decir que un grafo es una colección de **vértices** y de **aristas** que unen estos vértices. Los vértices los dibujaremos como puntos del plano, y las aristas serán líneas que unen estos puntos. Vayamos con las definiciones formales:

Definición 8.1 *Un* ***grafo*** *G es un conjunto no vacío V (de vértices) y un conjunto A (de aristas) extraído de la colección de subconjuntos de dos elementos de V. Una arista de G es, pues, un subconjunto $\{a, b\}$, con $a, b \in V$, $a \neq b$.*

Para ser precisos, deberíamos decir que esta definición se refiere a lo que se conoce como un **grafo simple y sin lazos**. En la subsección 8.1.1 presentaremos varias generalizaciones de este concepto, que resultarán muy útiles para otras cuestiones. Mientras no se diga lo contrario, cuando hablemos de un grafo siempre estaremos refiriéndonos a este caso sencillo. Por supuesto, diremos que dos grafos son **iguales** si tienen el mismo conjunto de vértices y la misma colección de aristas. Nombraremos un grafo G mediante $G = (V, A)$. A veces, cuando manejemos varios grafos a la vez, utilizaremos símbolos como $V(G)$ y $A(G)$ para recordar a qué grafo corresponden los conjuntos de vértices y aristas a las que nos estamos refiriendo.

EJEMPLO 8.1.1 *Traducimos al lenguaje de grafos los problemas enunciados anteriormente:*

1. El problema de la asignación de tareas tiene una traducción inmediata: los vértices estarán etiquetados con los nombres de los trabajadores y de las tareas (en este tipo de problemas, generalmente se dibujan los vértices correspondientes a las tareas a un lado y los correspondientes a los trabajadores, a otro). Y dibujaremos una arista entre un vértice que represente a un trabajador y otro que represente a una tarea si efectivamente el trabajador está preparado para realizar dicha tarea.

2. Para el problema de la construcción de la red, las ciudades serán los vértices y las conexiones, las aristas. Y, por supuesto, lo que buscaremos será unir todos los vértices con el menor número posible de aristas y de manera que la red resultante sea lo más barata posible.

3. En el problema de horarios, representaremos las asignaturas con los vértices y las incompatibilidades entre asignaturas, con aristas. Para abordar el problema, aún nos falta ver un ingrediente: cómo se colorea un grafo. En este caso, los colores serán las horas de que dispongamos. Pero esto lo veremos más adelante. ♣

EJEMPLO 8.1.2 *Consideremos un conjunto de vértices* $V = \{1, 2, 3\}$. *Construyamos algunos grafos distintos con ese conjunto de vértices.*

Los subconjuntos de dos elementos de V son $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ y $\{2, 3\}$. Dos elecciones distintas de conjunto de aristas son $A_1 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ y $A_2 = \{\{1, 2\}\}$, que dan lugar a los grafos G_1 y G_2 que dibujamos a continuación:

♣

En muchas ocasiones, conviene considerar grafos que están incluidos "dentro" de otros. Dado un grafo $G = (V, A)$, formamos un **subgrafo** $H = (V', A')$ de G seleccionando algunos de los vértices de G (esto es, $V' \subseteq V$). Y, de las aristas que unieran vértices del conjunto V' en el grafo original G, nos quedamos con algunas de ellas (o todas)[1].

[1]Hay que ser cuidadosos con esto: si nos limitáramos a pedir que H contuviera a algunos de los vértices y algunas de las aristas de G, podríamos llegar a situaciones sin sentido como incluir una arista pero no alguno de sus vértices (no sería un grafo verdadero)

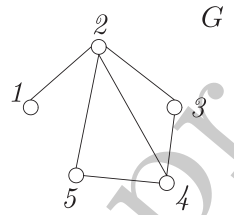
Un par de subgrafos que serán especialmente relevantes son los siguientes:

- Dados un par de grafos H y G, diremos que H es un **subgrafo abarcador**[2] de G si H es un subgrafo de G y, además, $V(H) = V(G)$. Es decir, si H contiene a todos los vértices de G.

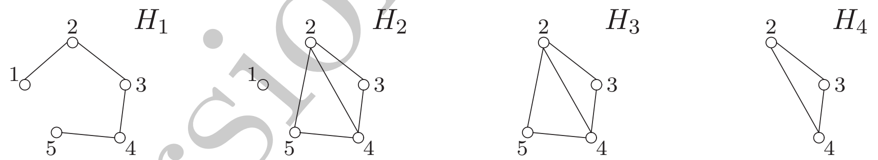
- Diremos que H es un **subgrafo inducido** de G para un conjunto de vértices $V' \subseteq V(G)$ si se cumple, por un lado, que $V(H) = V'$. Y, por otro, que si $v, w \in V'$ y $\{v, w\} \in A(G)$, entonces $\{v, w\} \in A(H)$.

  Es decir, H tiene como conjunto de vértices a un cierto subconjunto V' de los vértices de G; y como conjunto de aristas, a todas aquéllas de G cuyos extremos sean vértices de V'.

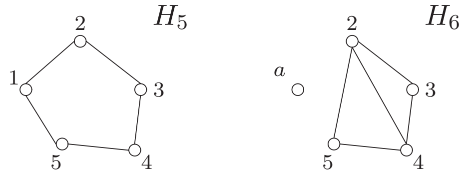
Ejemplo 8.1.3 *Consideremos el siguiente grafo G:*



El conjunto de vértices de G es $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, mientras que el de las aristas es $A(G) = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}$. Los siguientes cuatro grafos son subgrafos de G:



Los grafos H_1 y H_2 son, además, subgrafos abarcadores de G (porque incluyen a todos los vértices de G). El grafo H_3 es el subgrafo inducido de G para los vértices $\{2, 3, 4, 5\}$. Y el grafo H_4, para los vértices $\{2, 3, 4\}$. Por el contrario, los dos siguientes grafos no son subgrafos de G:



El grafo H_5, porque incluye una arista, la $\{1, 5\}$ que no estaba en G. Y el H_6, porque su conjunto de vértices no es un subconjunto del de G. ♣

[2] El ejemplo más relevante de subgrafo abarcador lo encontraremos cuando hablemos de árboles abarcadores, sección 9.3.

Contemos ahora cuántas elecciones distintas de conjunto de aristas podemos tener si el conjunto de vértices tiene tamaño n. Digamos que $V = \{1, 2, \dots, n\}$: ¿cuántos grafos distintos podremos construir que tengan a V como conjunto de vértices? Primero, evaluamos cuántos "candidatos" tenemos para ser aristas:

$$\#\big\{\text{subconjuntos de tamaño 2 extraídos de } \{1, \dots, n\}\big\} = \binom{n}{2}.$$

Todo lo que queda es escoger unas cuantas aristas de entre estos candidatos; así que el número de grafos distintos con vértices $\{1, 2, \dots, n\}$ es

$$\#\Big\{\text{subconjuntos extraídos de } \big\{1, \dots, \tbinom{n}{2}\big\}\Big\} = 2^{\binom{n}{2}}.$$

Por cierto, un número gigantesco, en cuanto n sea grande. Ya en el caso en que haya siete vértices, tendremos

$$2^{\binom{7}{2}} = 2^{21} = 2097152 \quad \text{grafos distintos.}$$

Hemos contado aquí el número de grafos *distintos* con n vértices. La elección de los símbolos $\{1, \dots, n\}$ para representar los vértices es cómoda, y la haremos habitualmente, pero el cálculo sería válido para cualquier otra elección de n símbolos para los vértices. En lo que sigue, los símbolo, $u, v, w \dots$ representarán, generalmente, a vértices. Las aristas serán a o quizás e (del inglés *edge*).

En la representación gráfica habitual, para saber de qué grafo se trata, tendremos que etiquetar los vértices. Pero, para muchas cuestiones, las etiquetas que se utilicen son irrelevantes. En la subsección 8.1.2 introduciremos un concepto, la isomorfía de grafos, que recoge esta idea.

8.1.1. Matrices asociadas a un grafo. Grado de un vértice

Una forma muy útil de representar un grafo $G = (V, A)$ es mediante su **matriz de vecindades** (o matriz de adyacencia). La idea, análoga a la que ya usamos en la sección 3.5 dedicada a las relaciones, es formar una matriz de ceros y unos. Si el conjunto de vértices es $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, el grafo se puede describir mediante una matriz $n \times n$:

	v_1	v_2	v_3	$\cdots$	v_n
v_1	0	1	0	$\cdots$	1
v_2	1	0	1	$\cdots$	1
v_3	0	1	0	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
v_n	1	1	0	$\cdots$	0

En la posición (v_i, v_j) pondremos un 1 si $\{v_i, v_j\} \in A$, y un 0 en caso contrario. La matriz tendrá ceros en la diagonal (porque no permitimos lazos) y será simétrica: si en la posición (v_i, v_j) aparece un 1 es porque $\{v_i, v_j\} \in A$ y por tanto en la posición (v_j, v_i) deberá aparecer también un 1. Así que un grafo G **simple y sin lazos** con n vértices es exactamente lo mismo que una matriz $n \times n$ simétrica de ceros y unos con ceros en la diagonal.

Esta identificación es muy importante. Para muchos de las cuestiones que trataremos en lo sucesivo, bastará considerar el dibujo asociado al grafo. Pero, como veremos, el de los grafos es un lenguaje especialmente diseñado para un uso algorítmico, algoritmos que requerirán la intervención del ordenador. Y para un ordenador, por supuesto, un grafo es una matriz de ceros y unos. Conviene tener esto en mente en los argumentos que desarrollemos.

Algunas de las generalizaciones del concepto de grafo que prometíamos anteriormente se pueden describir también en el lenguaje de las matrices:

- Por ejemplo, si permitiéramos lazos, esto es, aristas cuyos dos vértices sean el mismo, estaríamos considerando, simplemente, matrices (cuadradas) simétricas de ceros y unos (con, posiblemente, unos en la diagonal).
- Pero también podríamos permitir que hubiera aristas múltiples (por ejemplo, dos vértices conectados por dos o más aristas); en este caso hablaremos de **multigrafos**. En términos matriciales, un multigrafo sería una matriz simétrica cuyas entradas son ceros o números naturales: en la diagonal irían ceros si no permitiéramos lazos.
- Otra posibilidad, que estudiaremos con detalle en la subsección 8.1.6, es la de dar *orientación* a las aristas. En los **grafos dirigidos** o **digrafos**, las entradas de la matriz siguen siendo ceros y unos, pero ésta ya no necesariamente simétrica.
- Por último, a veces conviene considerar la posibilidad de asociar a cada arista e de un grafo un número real, su **peso**, $p(e)$. Pensemos, por ejemplo, en una red de carreteras, en la que cada tramo tiene asociado su longitud en kilómetros. En este caso, hablaremos de un **grafo con pesos** (o grafo ponderado). La matriz de un tal grafo con pesos sería simétrica, y sus entradas serían los pesos de cada arista. En la sección 8.7 consideraremos **grafos dirigidos con pesos**; las matrices de vecindades asociadas ya no serían necesariamente simétricas, y sus entradas serían los pesos correspondientes.

Pero insistimos en que en lo sucesivo, mientras no se diga lo contrario, todos los grafos a los que nos referiremos serán simples y sin lazos. Un concepto fundamental en un grafo es el de grado de un vértice:

Definición 8.2 *Dado un grafo $G = (V, A)$, diremos que dos vértices $v, w \in V$ son **vecinos** si $\{v, w\} \in A$. El **grado de un vértice** es el número de vecinos que tiene en el grafo,*

$$\textit{grado de } v \equiv gr(v) = \#\{w \in V \, : \, \{v, w\} \in A(G)\} .$$

Si el grado de un vértice es 0, diremos que es un vértice **aislado**. En la matriz de vecindades, para determinar el grado de un vértice v, basta sumar los unos que aparezcan en su fila. A la lista de los grados de los vértices de un grafo G la llamaremos la **sucesión de grados**:

$$(gr(v_1), gr(v_2), \ldots, gr(v_n)) .$$

Por convenio, se suele escribir esta lista con los valores ordenados de menor a mayor.

Pero no toda lista de n números ≥ 0 se corresponde con la sucesión de grados de un grafo con n vértices. Por ejemplo, se tiene la siguiente restricción:

Lema 8.1 *En un grafo $G = (V, A)$*

$$\sum_{v \in V} gr(v) = 2|A|\,.$$

DEMOSTRACIÓN. El resultado es casi obvio, pues cada arista involucra a dos vértices. Una prueba rigurosa requiere invocar a otra matriz asociada a un grafo, la **matriz de incidencia**:

	v_1	v_2	v_3	$\cdots$	v_n
a_1	1	1	0	$\cdots$	0
a_2	1	0	1	$\cdots$	0
a_3	0	1	0	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_m	0	1	0	$\cdots$	1

Las columnas están etiquetadas con los vértices $\{v_1, \ldots, v_n\}$, y las filas, con las aristas $\{a_1, \ldots, a_m\}$. En la posición (a_i, v_j) colocaremos un 1 si el vértice v_j es extremo de la arista a_i; y un 0 en caso contrario. Apliquemos ahora un argumento de doble conteo. En la fila etiquetada por la arista a_1 aparecerán sólo dos unos (sus dos extremos); lo mismo ocurre con el resto de las filas. Así que, sumando por filas, obtenemos $2\,m = 2\,|A|$. Al hacerlo por columnas, observamos que la columna correspondiente al vértice v_j contendrá tantos unos como vecinos tenga este vértice: su suma valdrá justamente $gr(v_j)$. Sumando los resultados de todas las columnas, obtenemos lo que buscábamos. ■

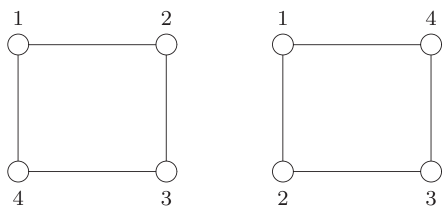
Un par de características importantes en un grafo son las siguientes:

Definición 8.3 *Llamaremos **mínimo grado** y **máximo grado** de un grafo a los números*

$$\delta(G) = \min_{v \in V(G)} \big\{gr(v)\big\} \qquad y \qquad \Delta(G) = \max_{v \in V(G)} \big\{gr(v)\big\}\,.$$

Si los dos números coinciden, por ejemplo en el valor k, entonces todos los vértices del grafo tendrán grado k, y hablaremos de un grafo **k-regular**.

8.1.2. Isomorfismo de grafos



Observemos los dos grafos que aparecen dibujados a la derecha. En ambos casos, el conjunto de vértices es $\{1, 2, 3, 4\}$. Pero son grafos distintos: en un caso, el conjunto de aristas es $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}\}$, mientras que en el otro es $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$. Aún siendo distintos, estos dos grafos contienen, en cierto sentido, la misma información (un simple cambio de nombres transforma uno en el otro). En ambos casos, hablaríamos del "grafo del cuadrado". Esta idea es la que pretendemos desarrollar en esta subsección.

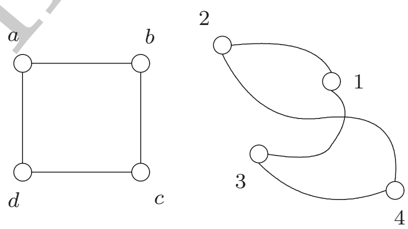
Definición 8.4 *Sean G y G' dos grafos, con conjuntos de vértices y aristas (V, A) y (V', A'), respectivamente. Decimos que una aplicación biyectiva $\phi : V \longrightarrow V'$ es un* ***isomorfismo de grafos*** *si:*

$$\{v, w\} \in A \iff \{\phi(v), \phi(w)\} \in A' .$$

Es decir, si ϕ conserva las relaciones de vecindad entre vértices.

Dos grafos se dirán ***isomorfos*** *si existe una aplicación biyectiva entre sus conjuntos de vértices (un cambio de nombres, de etiquetas) que conserve las relaciones de vecindad: si dos vértices son vecinos con el primer conjunto de etiquetas, tendrán que seguir siéndolo con el segundo.*

En el caso de los dos grafos con los que abríamos esta subsección, el lector podrá comprobar que la aplicación $\phi : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ dada por $\phi(1) = 1$, $\phi(2) = 4$, $\phi(3) = 2$ y $\phi(4) = 3$ es un isomorfismo entre los dos grafos.



No es fácil, en general, decidir si dos grafos son isomorfos o no. En los casos sencillos, si los dos grafos son isomorfos, se puede encontrar la biyección "a ojo". ¡Sobre todo si el dibujo nos ayuda! Los dos grafos que aparecen a la derecha también son isomorfos, pese a que la manera de dibujarlos no parezca indicarlo. Una manera de comprobar si dos grafos son isomorfos (que, por supuesto, habrán de tener el mismo número de vértices, digamos n), sería comprobar si alguna de las $n!$ aplicaciones biyectivas entre los conjuntos de vértices respectivos cumple las propiedades necesarias para ser un isomorfismo entre los dos grafos. Pero éste, desde luego, no es un procedimiento razonable si n es grande.

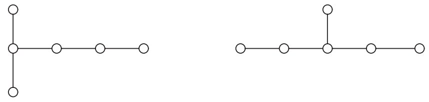
Sin embargo, para decidir que dos grafos no son isomorfos contamos con ciertas propiedades de un grafo que se han de conservar por isomorfismos:

1. Ambos grafos han de tener el mismo número de vértices (si no lo tienen, no podremos construir una aplicación biyectiva entre los conjuntos de vértices).
2. Cada vértice ha de mantener sus relaciones de vecindad. En particular, si $G = (V, A)$ y $G' = (V', A')$ son dos grafos isomorfos mediante ϕ, entonces, para cada $v \in V$:

   $$gr(v) = gr(\phi(v)).$$

   Si, por ejemplo, en un grafo tenemos un vértice de grado 7 y en el otro no, no podrán ser isomorfos.
3. Con más generalidad, si dos grafos son isomorfos, entonces han de tener la misma sucesión de grados. Sin embargo, el que dos grafos tengan la misma sucesión de grados no garantiza que sean isomorfos, como muestra el ejemplo 8.1.4.
4. La sucesión de grados ha de conservarse, y como sabemos que en todo grafo la suma de los grados coincide con (dos veces) el número de arista, deducimos que dos grafos isomorfos han de tener el mismo número de aristas.

Ejemplo 8.1.4 *Consideremos los dos grafos siguientes (nos olvidamos de las etiquetas de los vértices):*



Ambos grafos tienen seis vértices, cinco aristas y su sucesión de grados es $(1, 1, 1, 2, 2, 3)$. Sin embargo, no son isomorfos pues, por ejemplo, el vértice de grado 3 es, en un caso, vecino de dos de grado 1 y de uno de grado 2; y en el otro, de uno de grado 1 y de dos de grado 2. ♣

Hay otras propiedades que son conservadas bajo isomorfismos (todas las relacionadas con vecindades); por ejemplo, el llamado cuello de un grafo, del que hablaremos en la subsección 8.1.4. Sin embargo, **no existe una caracterización** para la isomorfía de dos grafos (una serie de propiedades que determinen si dos grafos son o no isomorfos).

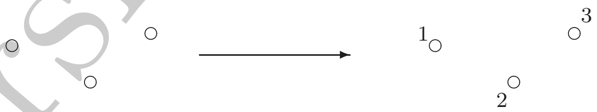
La isomorfía de dos grafos se puede interpretar también en términos de sus matrices correspondientes. Dados dos grafos G y G', con matrices de vecindades M y M', respectivamente:

$$G \text{ y } G' \text{ son isomorfos} \iff \begin{array}{c}\text{existe una permutación tal que si la aplicamos sobre} \\ \text{las filas y columnas de } M \text{, obtenemos } M'\end{array}$$

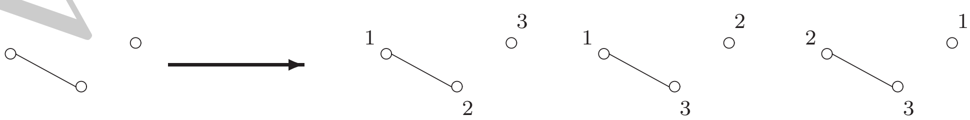
Intentemos, al menos para los valores pequeños de n, la clasificación de los grafos no isomorfos con n vértices.

Ejemplo 8.1.5 *Clasifiquemos por clases todos los grafos distintos que podemos formar con el conjunto de tres vértices* $V = \{1, 2, 3\}$.

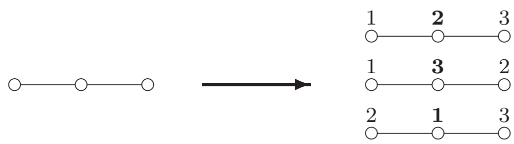
Como hay tres posibles aristas, habrá $2^3 = 8$ grafos distintos. Vistos salvo isomorfismos, ¿cuántos hay? Sin aristas, hay sólo uno. Nótese que, para esta configuración sin aristas, también hay un único grafo (al etiquetar los vértices).



Con una arista, hay una única configuración, a la que corresponden tres grafos distintos, pues basta decidir qué vértice va solo (o qué dos comparten arista).

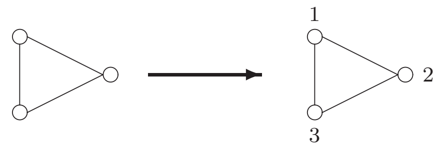


Con dos aristas hay, de nuevo, una única configuración (un único grafo salvo isomorfismo), aquél en el que los tres vértices forman una “cadena”:



Como se señala en la figura, hay tres grafos distintos que pertenecen a esta clase, pues basta determinar el símbolo que situamos en el vértice de grado 2; y esto lo podemos hacer de tres formas distintas. El lector podrá comprobar que los otros tres posibles etiquetados no producen grafos nuevos.

Por último, con tres aristas hay uno, al que corresponde un único grafo:



En total, los 8 grafos distintos se engloban en cuatro clases, un grafo sin aristas, tres grafos distintos con una arista, otros tres con dos aristas, y uno con las tres aristas. ♣

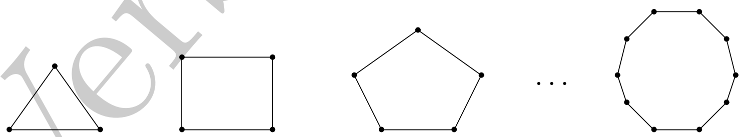
Pero, en general, esta clasificación será más complicada (habrá, por ejemplo, varios grafos no isomorfos con el mismo número de aristas). Animamos al lector a que intente la clasificación en los casos $n = 4$ y $n = 5$ (hay 11 y 35 grafos no isomorfos con ese número de vértices, respectivamente). El estudio general requiere herramientas más complicadas que veremos en el capítulo 14.

8.1.3. Algunos ejemplos de clases de grafos

A continuación enumeraremos algunas clases de grafos que aparecerán continuamente en lo que sigue; conviene recordar sus nombres y características.

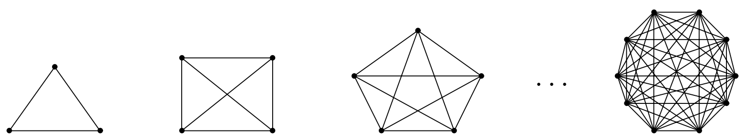
Diremos que un grafo es un L_n, un **grafo lineal** con n vértices ($n \geq 2$) si tiene n vértices (dos de grado 1 y el resto, si los hay, de grado 2) y es isomorfo a:

Otra clase de grafos muy relevante son los llamados **grafos circulares** con n vértices (todos de grado 2), para $n \geq 3$, que denotaremos por C_n:



C_3 C_4 C_5 C_{10}

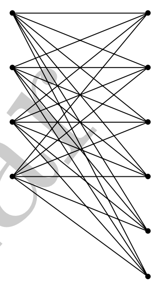
Si un grafo con n vértices tiene todas las $\binom{n}{2}$ posibles aristas, diremos que estamos ante el **grafo completo** con n vértices, K_n:



K_3 K_4 K_5 K_{10}

En el otro extremos encontramos los **grafos vacíos** N_n, con n vértices y ninguna arista.

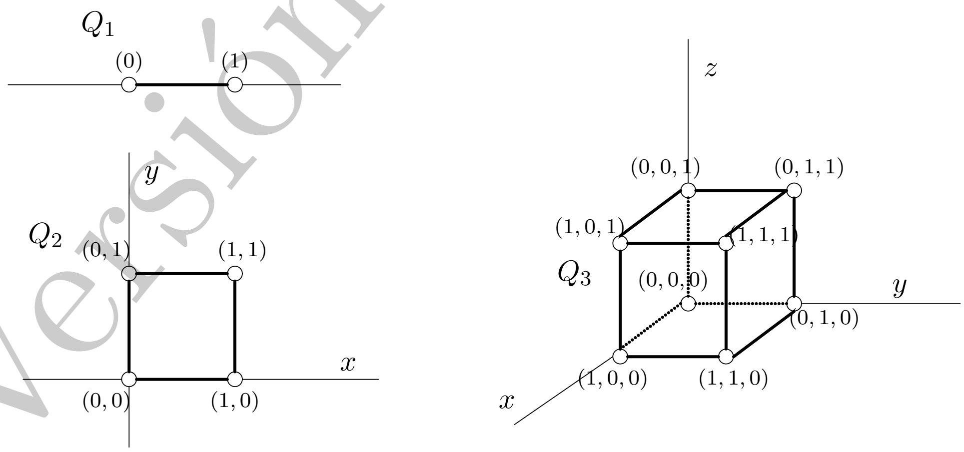
Una clase de grafos que tienen relevancia en diversos problemas (por ejemplo, en los problemas de asignación de tareas), son los llamados **grafos bipartitos**. Se trata de aquéllos en los que podemos partir el conjunto de vértices en dos clases, de manera que no haya aristas entre vértices de la misma clase. Un caso particular son los **grafos bipartitos completos**, que nombraremos como $K_{r,s}$. En el dibujo de la derecha aparece un $K_{4,6}$. Un grafo $K_{r,s}$ consta de $r+s$ vértices, divididos en dos clases; e incluye las $r \times s$ aristas que van de los vértices de un tipo a los del otro. Obsérvese que un grafo bipartito con r vértices de un tipo y s de otro se puede obtener del $K_{r,s}$ escogiendo un subconjunto de las aristas.



El grafo del **cubo**, Q_n, tiene como vértices los puntos del retículo n-dimensional de coordenadas 0 o 1. Esto es, el conjunto de los vértices de Q_n son todas las listas de longitud n que podemos formar con ceros y unos. En total, pues, tiene 2^n vértices. Dos vértices de Q_n serán vecinos si las listas de ceros y unos que los identifican difieren en una *única* posición. Por tanto, todos los vértices tienen el mismo grado, n (hay n distintas maneras de variar una posición en una n-lista): Q_n es un grafo n-regular. Una simple cuenta nos permite calcular el número de aristas:

$$2\,|A(Q_n)| = \sum_{v \in V(Q_n)} gr(v) = \sum_{j=1}^{2^n} n = n\,2^n \quad \Longrightarrow \quad |A(Q_n)| = n\,2^{n-1}\,.$$

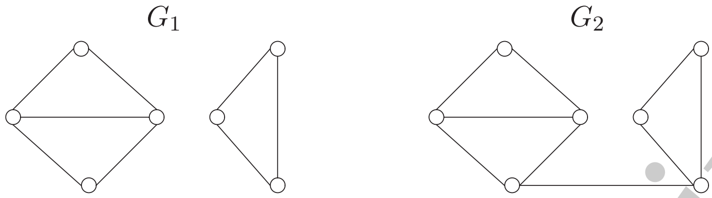
En una, dos y tres dimensiones son fáciles de dibujar:



Obsérvese que Q_1 es isomorfo a L_2, y Q_2, a C_4. Los grafos Q_n, pese a que los dibujos esbozados no hagan sospecharlo, son bipartitos: observemos que la mitad de los vértices están etiquetados con listas de n posiciones que contienen un número par de ceros, y la otra mitad, un número impar. Y dos listas que tienen un número par de ceros no pueden ser vecinas en este grafo (e igual para las impares).

8.1.4. Conexión en grafos

Consideremos los dos siguientes grafos:



¿En qué se diferencian? Parece claro que en el de la derecha las aristas del grafo nos permiten "llegar" de un vértice a cualquier otro; algo que no podemos hacer en el de la izquierda. El objetivo de esta subsección es el de entender el concepto de "conexión" en grafos.

A. Paseos, caminos y semejantes

Tratamos de definir las distintas maneras de "moverse" por un grafo, de vértice a vértice, y siguiendo las aristas.

Definición 8.5 *Un **paseo** en un grafo $G = (V, A)$ es una sucesión finita de vértices*

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_r \qquad \textit{(pueden repetirse vértices)}$$

de forma que $\{x_i, x_{i+1}\}$ es una arista de G, para cada $i = 0, 1, \ldots, r-1$.

Diremos que este paseo "conecta" x_0 con x_r. La longitud del paseo será r, que no tiene por qué coincidir con el número real de vértices visitados, pues ya hemos señalado que éstos se pueden utilizar varias veces.

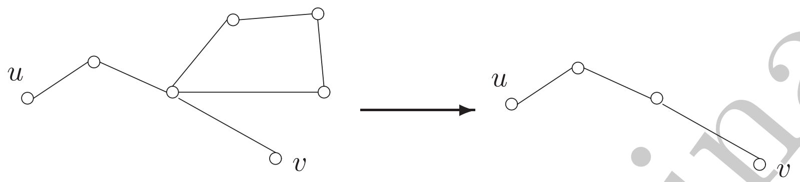
La noción de paseo es demasiado general y, aunque sería suficiente para definir el concepto de conexión en un grafo, conviene precisarla algo más[3]:

Definición 8.6 *Algunos otros conceptos asociados con un grafo son los siguientes:*

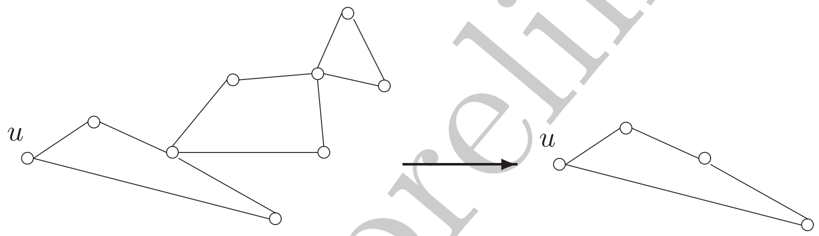
1. *Un paseo $x_0, \ldots, x_r$ se dice que es **cerrado** si $x_0 = x_r$.*
2. *Un paseo se dice que es un **camino** si no se repite ninguna arista.*
3. *A un camino cerrado se le llama un **circuito**.*
4. *Un **ciclo** será un paseo $x_0, \ldots, x_r$, con $r \geq 3$ y $x_0 = x_r$ (cerrado) cuyos vértices sean todos distintos (excepto el primero y el último, claro).*

[3]Los términos que utilizamos aquí, paseo, camino, etc., podrían no coincidir con los usados en otros textos. Hemos intentado que fueran lo más descriptivos posible. Por ejemplo, en un paseo se pueden repetir aristas y vértices; los paseos reales, a veces, consisten en ir de un sitio a otro, quizás retrocediendo, volviendo a pasar por el mismo lugar… Un camino parece responder, más bien, a una trayectoria en el que no recorramos dos veces la misma senda. El nombre de ciclo está bien establecido en la literatura.

En realidad, un camino que conecte dos vértices en un grafo podría incluir ciclos. Observemos que quitarlos no supone ningún problema (nos quedamos con un camino que sigue conectando los vértices extremos; aunque, por supuesto, la longitud del camino cambiará):



Si en un camino en el que no se repiten vértices, diremos que es un **camino simple**. De la misma manera, de un camino cerrado (un circuito) siempre podemos extraer un ciclo (que pudiera no contener a todos los vértices del circuito original):



Observemos que encontrar un ciclo con n vértices en un grafo es lo mismo que localizar un C_n que sea subgrafo del original.

Estos nuevos conceptos nos permiten añadir criterios nuevos para decidir si dos grafos son o no isomorfos: dados dos grafos G y G' isomorfos mediante ϕ, entonces si $C = \{v_0, \ldots, v_r\}$ es un ciclo en G, entonces $C' = \{\phi(v_0), \ldots, \phi(v_r)\}$ es un ciclo en G'. En particular se conservará la longitud del menor ciclo que haya en el grafo:

Definición 8.7 *Si G es un grafo, se llama* **cuello** *del grafo G al mínimo*[4] *de las longitudes de los ciclos de G.*

Como decíamos, si dos grafos G y G' son ϕ-isomorfos, entonces $cuello(G) = cuello(G')$. Por ejemplo, si consideramos los grafos

es fácil ver que tienen igual número de vértices y de aristas y todos los vértices son de grado 3; pero no son isomorfos, porque $cuello(G) = 3$, mientras que $cuello(G') = 4$. Pero recordemos una vez más que comprobar que todas estas propiedades son iguales en dos grafos no basta para concluir que dos grafos son isomorfos. Habrá que encontrar una biyección entre los respectivos conjuntos de vértices que respete las relaciones de vecindad.

[4] Si G no contiene ciclos, entonces convenimos que $cuello(G) = +\infty$.

B. Conexión y componentes conexas

Ya estamos preparados para definir el concepto que nos interesaba.

Definición 8.8 *Un grafo $G = (V, A)$ es **conexo** si dados cualesquiera dos vértices distintos $v, w \in V$, podemos encontrar un paseo que los conecte.*

Para ser precisos, la definición abarca a los grafos con al menos dos vértices. Por convenio, diremos que un grafo con un único vértice es también conexo.

Obsérvese que si existe un paseo que conecte dos vértices u y v, entonces podemos encontrar un camino que los conecte. Más aún, podremos encontrar un camino simple, cuya longitud no podrá ser mayor que $V(G) - 1$. Así que, en lo que sigue, a veces manejaremos la noción de conexión por caminos.

Nuestra siguiente preocupación es determinar qué ocurre cuando un grafo no es conexo. En un grafo no conexo, hay vértices que no pueden ser conectados. Como sugiere la intuición, el grafo estará formado por diversos "bloques" de vértices, cada uno de los cuales será un grafo conexo.

Para definir adecuadamente este concepto, empecemos considerando un grafo $G = (V, A)$ y un vértice suyo, $v \in V$. Llamaremos **componente conexa de v en G** al conjunto de vértices $\{w \in V \,:\, \text{existe camino en } G \text{ conectando } v \text{ y } w\}$. Nótese que si w está en la componente conexa de v, entonces v está en la de w.

La observación clave es que si consideramos dos vértices distintos de V, u y v, sus componentes conexas, que llamaremos G_u y G_v, o bien son la misma o bien son disjuntas.

- Supongamos que existe un camino conectando u y v. Sea ahora un vértice $w \in G_u$: sabemos que hay un camino conectando w con u. Si ese camino incluye al vértice v, deducimos que $w \in G_v$. Pero lo mismo ocurre si no lo incluye: entre el camino entre w y v y el camino entre u y v, podemos construir un camino entre w y v. El argumento análogo para G_v nos permite deducir que $G_u = G_v$.

- Supongamos, por el contrario, que no existe camino alguno conectando los vértices u y v. Si sus componentes conexas tuvieran intersección no vacía, al menos existiría un vértice w que está, simultáneamente, en G_u y en G_v. Pero entonces, con un argumento similar al anterior, encontraríamos un camino conectando v con w, algo contrario a la hipótesis. Así que G_u y G_v son disjuntos en este caso.

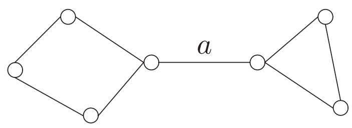
Ya podemos definir:

Definición 8.9 *Dado un grafo $G = (V, A)$, una **componente conexa** de G será el grafo que se obtiene al tomar todos los vértices que están en la componente conexa de un cierto vértice de V y todas las aristas del grafo que conectan estos vértices.*

Señalemos que las componentes conexas de un grafo son grafos conexos y es fácil ver que todo grafo se puede representar como unión de grafos conexos (sus componentes conexas).

Definición 8.10 *Diremos que una arista a de un grafo G es un **puente** si el grafo $G \setminus \{a\}$ que se obtiene de G al quitar la arista a (y dejar los mismos vértices) tiene más componentes conexas que G.*

Por ejemplo, en el siguiente grafo conexo



a es la única arista del grafo que es puente. En particular, si el grafo G de partida es conexo, entonces se tiene el siguiente resultado:

Lema 8.2 *Si G es un grafo conexo y a es una arista puente de G, entonces $G \setminus \{a\}$ tiene exactamente dos componentes conexas.*

DEMOSTRACIÓN. Llamemos v y w a los vértices que son extremos de la arista a. Y dividamos los vértices de G en dos clases:

1. el conjunto de vértices V_1, formado por aquéllos para los que existe un camino que los conecta con v *sin usar* la arista a (esto es, sin pasar por el vértice u). Entre éstos está, por supuesto, el propio vértice v.

2. El conjunto V_2 de los vértices que *necesariamente* han de usar la arista a para conectarse a v. Entre ellos está w (¿por qué?).

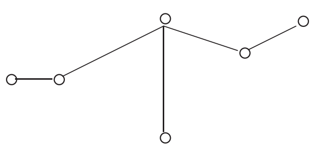
Que esto es una partición de los vértices de G es obvio. Pero, además, la intersección de V_1 y V_2 es vacía: si un vértice $x \in V(G)$ estuviera en V_1 y en V_2 a la vez, a no sería arista puente, porque podríamos quitarla sin que se desconectara el grafo. Si ahora formamos el grafo $G \setminus \{a\}$, sus dos componentes conexas son, precisamente, los vértices de V_1 (y sus aristas) y los vértices de V_2 (y sus aristas). ■

Con estas herramientas, podemos establecer un resultado *a priori* sobre grafos conexos, que responde a la idea intuitiva de que han de tener suficientes aristas como para poder conectar todos sus vértices.

Proposición 8.3 *Si G es un grafo conexo, entonces $|A(G)| \geq |V(G)| - 1$.*

DEMOSTRACIÓN. La razón es que la conexión óptima (con menor número de aristas) se produce cuando tenemos exactamente una arista menos que vértices, como en la figura de la derecha (veremos este hecho cuando hablemos de árboles). Pero en general tendremos más aristas. La prueba la haremos utilizando el principio de inducción fuerte en $|A|$, el número de aristas.

6 vértices y 5 aristas



Si no tenemos aristas, para que el grafo sea conexo, sólo puede haber un vértice. Si lo que tenemos es un grafo conexo con $|A| = 1$, la única posibilidad es que sea el grafo L_2, que tiene dos vértices.

Supongamos cierto que si tenemos un grafo conexo con k aristas, para cualquier $k \leq m$, entonces $|V| \leq k + 1$. Consideremos entonces un grafo conexo G con $|A(G)| = m + 1$. Sea a una arista cualquiera de G y construyamos un nuevo grafo H quitando esta arista a. El grafo H tiene los mismos vértices que G pero una arista menos (la a) que G. Caben dos posibilidades para este nuevo grafo:

1. Si H sigue siendo conexo (es decir, si a no era arista puente en G), por hipótesis de inducción (tiene m aristas), y teniendo en cuenta que $|A(H)| = |A(G)| - 1$ y que $V(G) = V(H)$, tendremos que

$$|A(H)| \geq |V(H)| - 1 \quad \Longrightarrow \quad |A(G)| \geq |V(G)|\,.$$

2. Pero si a era puente en G, H ya no es conexo, sino que tiene dos componentes conexas; llamémoslas H_1 y H_2. Ambas son grafos conexos y tienen menos aristas que G (fijémonos en que estos subgrafos pueden constar de un único vértice). Teniendo en cuenta que

$$|A(H_1)| + |A(H_2)| = |A(H)| = |A(G)| - 1 \quad \text{y} \quad |V(H_1)| + |V(H_2)| = |V(H)|,$$

y con la hipótesis de inducción, terminamos la demostración:

$$\left.\begin{array}{l} |A(H_1)| \geq |V(H_1)| - 1 \\ |A(H_2)| \geq |V(H_2)| - 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow |A(G)| - 1 \geq |V(G)| - 2 \Rightarrow |A(G)| \geq |V(G)| - 1\,.$$

■

Podemos generalizar este resultado al caso de que el grafo conste de más de una componente conexa. La demostración del siguiente enunciado sólo exige aplicar el anterior a cada componente conexa de G y sumar:

Proposición 8.4 *Si G es un grafo con k componentes conexas, entonces $|A| \geq |V| - k$.*

C. Número de paseos, matriz de vecindades y conexión

Llamemos a_{ij} a las entradas de la matriz M de vecindades de un grafo G con vértices $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Los números a_{ii} son 0 para cada $i = 1, \ldots, n$. Si $i \neq j$, a_{ij} será 1 si v_i es vecino de v_j y 0 en caso contrario.

Aunque por ahora suene poco informativo, podemos interpretar el número a_{ij} como el número de paseos de longitud 1 que hay entre el vértice v_i y el vértice v_j. Lo interesante es que esta interpretación se puede generalizar.

Teorema 8.5 *Si M es la matriz de vecindades de un grafo G, la entrada (i,j) de la matriz M^k cuenta el número de paseos de longitud k entre los vértices v_i y v_j.*

Demostración. La hacemos por inducción en k. El caso $k = 1$ ya ha sido comprobado antes. Llamemos $a_{ij}^{(k)}$ a la entrada que ocupa la posición (i,j) en la matriz M^k. Como $M^k = M^{k-1}M$, las reglas de multiplicación de matrices nos dicen que

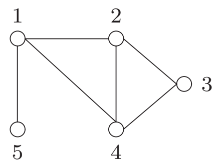
$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}^{(k-1)}\, a_{lj}\,.$$

Observemos ahora que $a_{il}^{(k-1)}\, a_{lj}$ es igual a $a_{il}^{(k-1)}$ si es que v_l es vecino de v_j, mientras que vale 0 en caso contrario.

Por hipótesis, $a_{il}^{(k-1)}$ cuenta el número de paseos de longitud $k-1$ entre v_i y v_l. Así que, en la suma de arriba, estamos contando todos los posibles paseos de v_i a v_j de longitud k clasificándolos en función del vértice que, en cada paseo, sea justo el anterior a v_j. ■

Lo vemos en un ejemplo sencillo:

EJEMPLO 8.1.6 *Consideremos el grafo siguiente:*



La matriz de vecindades, y sus primeras potencias, son

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 5 & 2 \\ 6 & 5 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que en la diagonal de M^2 aparecen los grados de cada vértice. Esto es general: la entrada $a_{ii}^{(2)}$ coincide con el grado de v_i, pues el número $a_{ii}^{(2)}$ cuenta los paseos de longitud 2 de v_i a v_i.

De la matriz M^3 deducimos, por ejemplo, que hay seis paseos distintos de longitud tres entre los vértices 1 y 2. El lector podrá encontrar los seis camino $1{-}5{-}1{-}2$, $1{-}4{-}1{-}2$, $1{-}2{-}1{-}1$, $1{-}2{-}3{-}2$, $1{-}2{-}4{-}2$, $1{-}4{-}3{-}2$ sobre el grafo. ♣

Apliquemos estas ideas a la tarea de comprobar si un grafo G es conexo o no. Y, en el caso en que no lo sea, a la determinación de sus componentes conexas.

Sea G un grafo con n vértices y matriz de vecindades M. Observemos que, si dos vértices se pueden conectar en un grafo, es seguro que lo podrán hacer utilizando un camino simple de longitud a lo sumo $n-1$. La entrada (i,j) de la matriz

$$\widetilde{M} = I + M + M^2 + \cdots + M^{n-1}$$

(donde I significa la matriz identidad $n \times n$) contiene la información sobre el número de paseos, de longitud a lo sumo $n-1$, que existen entre los vértices v_i y v_j. Por lo tanto, si alguna entrada de la matriz $\widetilde{M}$ es nula, entonces el grafo no puede ser conexo. Y viceversa, si *todas* las entradas de $\widetilde{M}$ son positivas, entonces el grafo será conexo.

Si el grafo no es conexo, la matriz $\widetilde{M}$ también contiene la información sobre las componentes conexas. Tomemos, por ejemplo, la primera fila de la matriz, etiquetada con el vértice v_1: las posiciones en las que aparezcan unos determinan los vértices de la componente conexa a la que pertenece v_1. El procedimiento se repetiría para la fila correspondiente al primer vértice no incluido en la componente anterior. Y así sucesivamente, hasta determinar todas las componentes conexas del grafo. En la sección 9.3 veremos otra maneras de abordar estas cuestiones.

EJERCICIOS.

8.1.1 *Dados los vértices* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$*, ¿cuántos grafos distintos con* m *aristas se pueden formar?.*

Solución. $\binom{\binom{n}{2}}{m}$

8.1.2 *Comprobar que se pueden formar hasta* $2^{n(n+1)/2}$ *grafos distintos, simples y con lazos, con los vértices* $\{v_1, \ldots, v_n\}$

8.1.3 *Dado un grafo* $G = (V, A)$*, el número*

$$gr(G) = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} gr(v)$$

representa el grado medio de los vértices del grafo G*. Este número estará entre el grado mínimo y el máximo,*

$$\delta(G) \leq gr(G) \leq \Delta(G)\,.$$

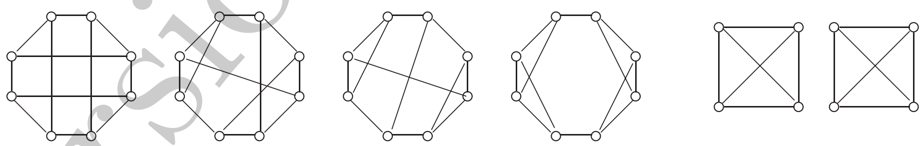
Comprobar que este número, $gr(G)$*, que es una medida del número de aristas que hay en el grafo* G *por cada vértice cumple que*

$$gr(G) = \frac{1}{2} \frac{|A(G)|}{|V(G)|}\,.$$

8.1.4 *Construir cinco grafos con 8 vértices, todos de grado 3, de forma que cada dos de esos grafos no sean isomorfos.*

Sugerencia. Clasificar por el número de ciclos de orden tres que aparezcan.

Solución.



8.1.5 *Probar que* C_n *es el único grafo conexo (salvo isomorfismos) con* n *vértices de forma que el grado de todos sus vértices es 2.*

8.1.6 *¿Cuántos grafos de tres vértices pueden construirse de manera que cada dos no sean isomorfos? ¿Y cuántos con cuatro?*

Sugerencia. Hacer una partición de los grafos según haya o no vértices de grado tres; luego según haya o no de grado dos, etc.

Solución. (a) 4 (b) 11.

8.1.7 *Fijemos los vértices* $\{1, \ldots, n\}$ *y sea* G *el grafo completo con esos vértices.*

(a) *¿Cuántos grafos isomorfos a un* C_3 *distintos se pueden formar que sean subgrafos de* G*?*

(b) *¿Cuántos grafos isomorfos a un* C_k *distintos se pueden formar que sean subgrafos de* G*?*

(c) ¿Cuántos grafos isomorfos a un K_r se pueden formar con los vértices $\{1,\dots,n\}$? (Obsérvese que el apartado (a) es un caso particular de (b) y (c)).

(d) La misma pregunta, pero para un $K_{r,s}$.

Solución. $(a)\ \binom{n}{3}$ $\quad(b)\ \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{2k}$ $\quad(c)\ \binom{n}{r}$ $\quad(d)\ \frac{n!}{2\,r!\,s!\,(n-r-s)!}$.

8.1.8 *Sea G un grafo con n vértices, m aristas y p componentes conexas. Probar que se cumple la siguiente desigualdad:*

$$n-p \le m \le \frac{1}{2}(n-p)(n-p+1)\,.$$

Sugerencia. Para la primera desigualdad, $m \ge n-p$, utilizar la relación entre número de aristas y número de vértices en cada componente conexa. O bien construir un nuevo grafo conexo, uniendo las componentes conexas. Para la segunda, elegir un vértice en cada componente conexa e identificarlos. Nótese que la cota por arriba coincide con el número máximo de aristas que puede tener un grafo con $n-(p-1)$ vértices, del tipo del que se obtiene cuando identificamos p vértices.

8.1.9 *Sea un grafo G y sean $\delta=\delta(G)$ y $c=c(G)$ el grado mínimo y el cuello de G, respectivamente ($c(G)<+\infty$).*

(a) Supongamos que c es un número impar, digamos $c=2m+1$. Probar que el número de vértices de G es, al menos,

$$1+\delta+\delta(\delta-1)+\delta(\delta-1)^2+\cdots+\delta(\delta-1)^{m-1}\,.$$

Así que, en particular, $|V(G)|\ge(\delta-1)^{\frac{c-1}{2}}$.

(b) Supongamos que c es un número par, $c=2m$. Entonces, el número de vértices de G es, al menos, $2+2(\delta-1)+2(\delta-1)^2+\cdots+2(\delta-1)^{m-1}$.

(c) Comprobar que se tiene siempre que $|V(G)|\ge(\delta-1)^{\left[\frac{c-1}{2}\right]}$.

<u>Comentario</u>: si un grafo tiene δ grande (todos los vértices tienen muchos vecinos) y c grande (todos los ciclos son largos), estos resultados nos dicen que tendrá muchos vértices. Por ejemplo, si de un grafo sabemos que no tiene triángulos (C_3) ni cuadrados (C_4) y tiene menos de 100 vértices, entonces al menos uno tiene grado ≤ 10. O si $\delta=10$ y $c=10$, entonces el grafo tiene al menos 6561 vértices. Sin embargo, esto ocurre cuando exigimos que ambos números sean altos simultáneamente: un grafo como el K_{11} tiene $\delta=10$, y sólo tiene 11 vértices. Mientras que un C_{10} tiene $c=10$ (y 10 vértices).

Sugerencia. En el caso de cuello impar, construir el grafo partiendo de un cierto vértice, asignándole vecinos; éstos deben estar unidos a nuevos vértices a menos que el valor del cuello del grafo nos permita unirlos con vértices ya dibujados. Inténtese probar que las cotas son óptimas, que se puede alcanzar la igualdad. Por ejemplo, inténtese en el caso $m=2$ y $k=3$. En el caso de cuello par, comenzar con 2 vértices vecinos.

8.1.10 *Demostrar que si G es un grafo con n vértices y al menos $(k-1)n-\binom{k}{2}+1$ aristas, donde $0<k<n$, entonces hay un subgrafo de G con $\delta(H)\ge k$.*

Sugerencia. Ir eliminando de G los vértices con grado menor que k, si los hubiera, y contar el número de pasos que se han dado.

8.1.11 *Sea G un grafo con $V(G) \subseteq \{1,\dots,n\}$ con $|V(G)| = v$ y $|A(G)| = a$. ¿Cuántos grafos distintos con vértices en $\{1,\dots,n\}$ contienen a G como subgrafo?*

> **Sugerencia.** Dado el grafo G con v vértices, elegir, de entre los restantes $n - v$ un cierto número de vértices para formar el grafo. Y luego, contar las posibles aristas que se pueden elegir (entre vértices de G, entre vértices de G y los nuevos vértices, etc.

Solución. $\sum_{k=0}^{n-v}\binom{n-v}{k}2^{k\,v+\binom{k}{2}+\binom{v}{2}-a}$.

8.1.12 *Probar que si G es un grafo con al menos dos vértices, entonces G tiene al menos dos vértices con el mismo grado.*

> **Sugerencia.** Aplicar el principio del palomar. Relaciónese con el problema de la reunión de un grupo de personas que se conocen.

8.1.13 *Sea G un grafo con n vértices y 2 componentes conexas.*

(a) *¿Cuál es el número mínimo de aristas que G puede tener en esas condiciones?.*

(b) *Supongamos además que cada componente de G es un grafo completo, ¿cuál es el número mínimo de aristas que G puede tener?.*

Solución. (a) $n - 2$ (b) $\frac{n(n-2)}{4}$ si n par, $\frac{(n-1)^2}{4}$ si n impar.

8.1.14 *En una reunión de 20 personas hay en total 48 pares de personas que se conocen.*

(a) *Justificar por qué hay al menos una persona que a lo sumo conoce a cuatro personas.*

(b) *Supongamos que hay exactamente una persona X que conoce a lo sumo a cuatro; y supongamos que esta X conoce al menos a una. Verificar que las otras 19 conocen exactamente a cinco cada una. ¿A cuántos conoce X?*

> **Sugerencia.** Utilícese que conocemos cuánto vale la suma de los grados de un grafo.

8.1.15 *Sea G un grafo conexo con cuello $c(G)$. Probar que si $d(u, v) \le 2\,c(G)$, entonces hay una única geodésica de u a v.*