10.1. Introducción a las funciones generatrices

10.1.1. El método simbólico

El **método simbólico** es un procedimiento de *representación* o, si se quiere, de *codificación*, que aplicaremos al análisis de las soluciones de familias de problemas combinatorios como, por ejemplo, cuántos multiconjuntos de determinadas características podemos formar con n elementos. Aquí n es el índice de la familia en cuestión; cada valor de n nos sitúa ante un problema distinto, pero estos problemas están, claro, muy relacionados. Nuestro objetivo es entenderlos todos a la vez, codificándolos en un único objeto, que será una serie de potencias.

Particiones de enteros, composiciones, permutaciones, etc., son ejemplos de estas familias. En todas ellas veremos la utilidad del método simbólico; pero ahora, para descubrir el método, vamos a centrarnos en multiconjuntos.

Recordemos que el número de k-multiconjuntos que se pueden formar con elementos extraídos del conjunto $\{1,\dots,n\}$ es, para cada $n \geq 1$ y $k \geq 0$,

$$R(n,k) = \#\left\{ \begin{array}{c} \text{multiconjuntos con } k \text{ elementos} \\ \text{extraídos de } \{1,\dots,n\} \end{array} \right\} = \binom{k+n-1}{n-1}.$$

La fórmula de la derecha se obtuvo, mediante argumentos combinatorios, de biyecciones, en la subsección 3.1.8.

Nos interesa ahora imponer condiciones a los multiconjuntos (por ejemplo, que el elemento 1 aparezca un número determinado de veces, o que los elementos se repitan a lo sumo un número de veces, o que. . .). Si reflexionamos sobre el argumento combinatorio que nos da la fórmula anterior, nos damos cuenta de que no resultaría muy fácil. Este último comentario es propaganda para el lector, porque, por supuesto, el método simbólico nos permitirá, por lo menos, representarlos de manera ágil y flexible.

Empecemos modestamente, sólo con tres símbolos: $\{1,2,3\}$. Nos interesan todos los multiconjuntos distintos que se pueden formar con los elementos $\{1,2,3\}$ en los que el 1 aparece a lo sumo dos veces, el 2 a lo sumo una vez y el 3 a lo sumo dos veces.

Listemos todos los multiconjuntos que cumplen esta condición atendiendo a su tamaño:

$$\text{Multiconjuntos:} \left\{ \begin{array}{lllll} \text{tamaño } 0 \ \to\ \emptyset & & & & \\ \text{tamaño } 1 \ \to\ \{1\} & \{2\} & \{3\} & & \\ \text{tamaño } 2 \ \to\ \{1,1\} & \{1,2\} & \{1,3\} & \{2,3\} & \{3,3\} \\ \text{tamaño } 3 \ \to\ \{1,1,2\} & \{1,1,3\} & \{1,2,3\} & \{1,3,3\} & \{2,3,3\} \\ \text{tamaño } 4 \ \to\ \{1,1,2,3\} & \{1,1,3,3\} & \{1,2,3,3\} & & \\ \text{tamaño } 5 \ \to\ \{1,1,2,3,3\} & & & & \end{array} \right.$$

Y observemos que podemos describir todos estos multiconjuntos de forma compacta e informativa de la manera siguiente:

$$\{1_\alpha, 2_\beta, 3_\gamma\} \qquad \text{con} \qquad 0 \leq \alpha \leq 2,\ 0 \leq \beta \leq 1 \text{ y } 0 \leq \gamma \leq 2.$$

donde α indica el número de veces que aparece el elemento 1 en el multiconjunto, β el número de veces que lo hace el 2 y γ, el 3.

Por otro lado, la propia notación anterior nos invita a considerar el siguiente producto de polinomios

$$(1 + x_1 + {x_1}^2)\,(1 + x_2)\,(1 + x_3 + {x_3}^2)\,.$$

Si desarrollamos este producto y agrupamos los términos que nos aparecen según su grado total (la suma de los grados con que aparezcan las variables x_1, x_2 y x_3), obtenemos:

$$\text{Sumandos:}\left\{\begin{array}{lclllll} \text{grado } 0 & \to & 1 & & & & \\ \text{grado } 1 & \to & x_1 & x_2 & x_3 & & \\ \text{grado } 2 & \to & {x_1}^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_2x_3 & {x_3}^2 \\ \text{grado } 3 & \to & {x_1}^2x_2 & {x_1}^2x_3 & x_1x_2x_3 & x_1{x_3}^2 & x_2x_3^2 \\ \text{grado } 4 & \to & {x_1}^2x_2x_3 & x_1^2x_3^2 & x_1x_2x_3^2 & & \\ \text{grado } 5 & \to & {x_1}^2x_2{x_3}^2 & & & & \end{array}\right.$$

Todos los sumandos son de la forma

$$x_1^\alpha\, x_2^\beta\, x_3^\gamma \qquad \text{con} \qquad 0 \le \alpha \le 2,\ 0 \le \beta \le 1 \text{ y } 0 \le \gamma \le 2.$$

De manera que los multiconjuntos y los monomios son la misma cosa: en ambos casos, basta con dar una lista de tres números, (α, β, γ), que cumplan las restricciones señaladas arriba, para tener, en un caso, un multiconjunto de los que queremos contar, y en el otro un sumando en el desarrollo del polinomio. La regla (biyección) que nos permite pasar de unos objetos a otros será

$${x_1}^\alpha {x_2}^\beta {x_3}^\gamma \longleftrightarrow \{1_\alpha, 2_\beta, 3_\gamma\} \quad \Big(= \Big\{1, \overset{\alpha \text{ veces}}{\cdots}, 1, 2, \overset{\beta \text{ veces}}{\cdots}, 2, 3, \overset{\gamma \text{ veces}}{\cdots}, 3\Big\}\Big)\,.$$

Además, el grado total de cada monomio coincide con el tamaño del multiconjunto que tiene asociado.

Hemos transformado —ésta es la esencia del método simbólico— el problema de contar el número de multiconjuntos de tamaño digamos k que podemos formar con los elementos $\{1, 2, 3\}$, respetando las restricciones señaladas, en el de contar cuántos términos de grado total k aparecen en el desarrollo del producto de polinomios escrito anteriormente.

Resta un último paso en el esquema de representación del método simbólico. Suele ser el caso que sólo nos interesa el *número* de multiconjuntos con las propiedades requeridas, y no una lista con todos ellos. Si en el producto

$$(1 + x_1 + x_1^2)(1 + x_2)(1 + x_3 + x_3^2)$$

ponemos $x_1 = x_2 = x_3 = x$, entonces todos los monomios de grado k se transforman en x^k, y el coeficiente de x^k de

$$(1 + x + x^2)(1 + x)(1 + x + x^2)$$

nos dice, finalmente, cuantos k-multiconjuntos hay con las restricciones impuestas.

La idea es general: utilizando los mismos argumentos podemos establecer una biyección entre los dos siguientes colecciones de objetos:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Multiconjuntos extraídos}\\ \text{de } \{1,\dots,n\} \text{ en los que}\\ \text{cada elemento } j \text{ aparece,}\\ \text{a lo sumo, } r_j \text{ veces.}\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{Sumandos que aparecen en el desarrollo}\\ \text{del producto de polinomios en } n \text{ variables}\\ \displaystyle\prod_{j=1}^{n}\Big(1+x_j+\cdots+x_j^{r_j}\Big)\end{array}\right\}$$

Fijémonos en que el número de elementos $\{1,\dots,n\}$ que conforman los multiconjuntos coincide con el de variables que consideramos, $x_1,\dots,x_n$. Y que el número de apariciones permitidas de cada elemento j (entre 0 y r_j) tiene su traducción en el tipo de polinomio en la variable x_j que consideramos (en este caso, un polinomio con todos los términos entre grado cero y grado r_j).

Además, el número de k-multiconjuntos extraídos de $\{1,\dots,n\}$ en los que cada elemento j aparece, a lo sumo, r_j veces es el coeficiente de x^k de

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1+x+x^2+\cdots+x^{r_j}\right) .$$

Esta es la esencia del método simbólico. Veámoslo ahora en acción en unos cuantos ejemplos.

EJEMPLO 10.1.1 ***Repetición arbitraria***. *Si no queremos imponer restricciones sobre cuántas repeticiones se permiten a los elementos, entonces debemos considerar el producto siguiente:*

$$(1+x_1+{x_1}^2+\cdots)(1+x_2+{x_2}^2+\cdots)\cdots(1+x_n+{x_n}^2+\cdots) .$$

Es, por supuesto, un producto de series formales. Tendremos infinitos términos, y cada uno de ellos se corresponderá con un multiconjunto extraído de $\{1,\dots,n\}$ sin restricciones sobre el número de veces que aparece cada elemento.

Si ahora substituimos cada una de las variables $x_1,x_2,\dots,x_n$ por una única variable x entonces tenemos la serie

$$\left(1+x+x^2+\dots\right)^n$$

en la que el coeficiente de x^k nos da el número de multiconjuntos de tamaño k. ♣

EJEMPLO 10.1.2 *Sea ahora el producto de polinomios*

$$(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\cdots(1+x_n) .$$

Cuando desarrollamos este producto, obtenemos 2^n sumandos; con la interpretación anterior, estos 2^n sumandos se corresponderán con todos los multiconjuntos (la repetición está permitida, en principio) extraídos de $\{1,\dots,n\}$ (tantos elementos como variables) en los que el 1 aparece a lo sumo 1 vez (porque el polinomio en x_1 sólo tiene los términos de grado cero y grado uno), el 2 a lo sumo 1 vez... y el n a lo sumo 1 vez. Es decir, todos los subconjuntos **sin repetición** extraídos de $\{1,\dots,n\}$.

Como antes, si lo que queremos es el número de subconjuntos sin repetición de tamaño k que podemos extraer de $\{1, \dots, n\}$, entonces substituimos $x_1, \dots, x_n$ por una única x y obtenemos el polinomio

$$(1 + x)^n \, .$$

La respuesta a nuestro problema, el número de subconjuntos sin repetición de tamaño k que podemos formar con los elementos $\{1, \dots, n\}$, queda codificada como el coeficiente k-ésimo de la serie de potencias de la función $(1 + x)^n$. ♣

Ejemplo 10.1.3 ***El cambio de monedas.*** *Disponemos de monedas de dos, cinco, veinte y cincuenta céntimos de euro. Queremos contar de cuántas maneras distintas podemos dar el cambio de, digamos, diez euros.*

En un cambio de estos pueden entrar cero, una, dos, etc., monedas de dos céntimos. Llamemos P_2 al conjunto de todas las posibles combinaciones de dos céntimos y representémoslas simbólicamente como

$$P_2 \quad \longrightarrow \quad \cancel{\textcircled{2}} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{2}\textcircled{2} \quad \textcircled{2}\textcircled{2}\textcircled{2} \quad \textcircled{2}\textcircled{2}\textcircled{2}\textcircled{2} \quad \cdots$$

donde el primer símbolo significa que no se utiliza ninguna moneda de dos céntimos. Hagamos lo mismo con las monedas de cinco céntimos:

$$P_5 \quad \longrightarrow \quad \cancel{\textcircled{5}} \quad \textcircled{5} \quad \textcircled{5}\textcircled{5} \quad \textcircled{5}\textcircled{5}\textcircled{5} \quad \textcircled{5}\textcircled{5}\textcircled{5}\textcircled{5} \quad \cdots$$

Supongamos, por el momento, que se nos permite dar cambio utilizando monedas de dos y cinco céntimos. Las posibles combinaciones (que llamaremos $P_{2,5}$) serán

$$\begin{array}{llllllll}
P_{2,5} & \longrightarrow & \cancel{\textcircled{2}\textcircled{5}} & \cancel{\textcircled{2}}\textcircled{5} & \cancel{\textcircled{2}}\textcircled{5}\textcircled{5} & \cancel{\textcircled{2}}\textcircled{5}\textcircled{5}\textcircled{5} & \cancel{\textcircled{2}}\textcircled{5}\textcircled{5}\textcircled{5}\textcircled{5} & \cdots \\
 & & \textcircled{2}\cancel{\textcircled{5}} & \textcircled{2}\textcircled{5} & \textcircled{2}\textcircled{5}\textcircled{5} & \textcircled{2}\textcircled{5}\textcircled{5}\textcircled{5} & \textcircled{2}\textcircled{5}\textcircled{5}\textcircled{5}\textcircled{5} & \cdots \\
 & & \textcircled{2}\textcircled{2}\cancel{\textcircled{5}} & \textcircled{2}\textcircled{2}\textcircled{5} & \textcircled{2}\textcircled{2}\textcircled{5}\textcircled{5} & \textcircled{2}\textcircled{2}\textcircled{5}\textcircled{5}\textcircled{5} & \cdots & \\
 & & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

(Obsérvese que el orden de presentación de las monedas no importa). Intentemos ahora expresar estos símbolos en términos de objetos más conocidos: por ejemplo, podemos asociar a P_2 un polinomio en una variable x_2,

$$P_2(x_2) = 1 + x_2 + x_2^2 + x_2^3 + \cdots$$

Y está clara la relación: el elemento de P_2 que no tiene moneda alguna se corresponde con el término 1 del polinomio, el que tiene una moneda, con el término x_2, etc. Lo mismo podemos hacer para las monedas de cinco:

$$P_5(x_5) = 1 + x_5 + x_5^2 + x_5^3 + \cdots$$

Esta representación será útil si podemos reproducir el álgebra de las monedas, es decir, si alguna combinación de los polinomios $P_2(x_2)$ y $P_5(x_5)$ nos produce todas las configuraciones de monedas que se pueden obtener al mezclar los dos tipos. Si multiplicamos los dos polinomios,

$$\begin{aligned} P_2(x_2)\, P_5(x_5) &= \big(1 + x_2 + x_2^2 + x_2^3 + \cdots\big)\,\big(1 + x_5 + x_5^2 + x_5^3 + \cdots\big) \\ &= 1\,\big(1 + x_5 + x_5^2 + \cdots\big) + x_2\,\big(1 + x_5 + x_5^2 + \cdots\big) + x_2^2\,\big(1 + x_5 + x_5^2 + \cdots\big) + \cdots \end{aligned}$$

Perfecto, ¡funciona!. Porque a cada configuración de monedas que puede aparecer le corresponde un término (y sólo uno) en este producto de polinomios: por ejemplo, dos monedas de dos y tres de cinco se corresponde con el término $x_2^2\, x_5^3$.

Así que podemos definir, de forma análoga, otros polinomios para cubrir el resto de los casos: para las monedas de veinte, el polinomio $P_{20}(x_{20})$, y para las de cincuenta, $P_{50}(x_{50})$. Y entonces toda la información sobre las configuraciones de monedas que pueden aparecer usando los cuatro tipos está codificada en el producto de polinomios

$$P_2(x_2)\, P_5(x_5)\, P_{20}(x_{20})\, P_{50}(x_{50}) = \prod_{j=2,5,20,50} \big(1 + x_j + x_j^2 + x_j^3 + \cdots\big)$$

Pero lo queríamos contar, recordemos, era de cuántas maneras se puede dar cambio de diez euros con estos cuatro tipos de monedas. Consideremos una configuración de monedas cualquiera; más bien, su término asociado, que será de la forma

$$x_2^a\, x_5^b\, x_{20}^c\, x_{50}^d\,,$$

donde a, b, c y d son ciertos enteros no negativos. Representa a la configuración en la que hay a monedas de dos céntimos, b de cinco, etc. Su "valor" es

$$2a + 5b + 20\,c + 50\,d\,.$$

En estos términos, la pregunta que nos estamos haciendo queda transparente: buscamos de cuántas maneras distintas se puede obtener

$$2a + 5b + 20\,c + 50\,d = 1000\,,$$

pues 10 euros son 1000 céntimos. Vamos a hacer, de nuevo, un cambio de variables, pero no el habitual. Ahora, para tener en cuenta los diferentes valores de cada moneda, haremos los cambios

$$x_2 = x^2 \quad x_5 = x^5 \quad x_{20} = x^{20} \quad x_{50} = x^{50}\,,$$

de manera que, por ejemplo, un factor x_{20}^c se convierte en x^{20c}. Con este cambio, el producto de polinomios se convierte en

$$\big(1 + x^2 + x^4 + \cdots\big)\,\big(1 + x^5 + x^{10} + \cdots\big)\,\big(1 + x^{20} + x^{40} + \cdots\big)\,\big(1 + x^{50} + x^{100} + \cdots\big)$$

Y el coeficiente del término de grado 1000 del desarrollo de este producto de funciones es la respuesta a nuestra pregunta. Nótese que en esta expresión están codificadas *todas* las respuestas a los posibles problemas de cambio de monedas con 2, 5, 20 y 50, y no sólo la de dar cambio de 1000. ♣

Así que estas técnicas parecen útiles para abordar problemas diversos. Es hora de que formalicemos un poco.

10.1.2. Funciones generatrices

En lo que sigue vamos a asociar funciones a sucesiones infinitas de números,

$$f(x) \quad \longleftrightarrow \quad (a_n)_{n=0}^{\infty},$$

mediante la regla

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\,.$$

La función $f(x)$ es lo que llamaremos **función generatriz**[2] de los (a_n). Las llamamos "funciones" aunque, *a priori*, puede que la serie no converja y no tengamos una función. Cuando queramos considerar a f como una función para, por ejemplo, sustituir un cierto valor de x, habrá que ser muy cuidadoso con las cuestiones de convergencia. Pero mientras no sea ése el caso, podríamos argumentar todo mediante series formales, como en la subsección 4.7.

El número a_n, que generalmente será la respuesta a un cierto problema combinatorio, será el coeficiente de x^n en la serie de potencias anterior. Esto lo resumiremos muchas veces con la notación

$$a_n = \mathrm{Coef}_n[f(x)]\,.$$

Por ejemplo, y recordando algunos de los ejemplos que vimos en la subsección 10.1.1, el número de subconjuntos sin repetición de tamaño k que podemos formar con $\{1,\dots,n\}$ es el coeficiente k-ésimo de la serie de potencias (un polinomio, en realidad)

$$(1+x)^n\,.$$

O el número de maneras de dar cambio de n céntimos de euro con monedas de 2, 5, 20 y 50 es el coeficiente n-ésimo de la serie de potencias

$$\big(1 + x^2 + x^4 + \cdots\big)\,\big(1 + x^5 + x^{10} + \cdots\big)\,\big(1 + x^{20} + x^{40} + \cdots\big)\,\big(1 + x^{50} + x^{100} + \cdots\big)\,.$$

Funciones generatrices de suma conocida

Si conocemos la suma de una función generatriz, es decir, si disponemos de una expresión para la función, entonces tenemos grandes ventajas.

Por ejemplo, si resulta que la serie de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ converge en un cierto intervalo $(-R,R)$ y conocemos la expresión de $f(x)$, entonces podremos evaluar la función (y cualquiera de sus derivadas) en valores de x que cumplan que $|x| < R$. En particular, podremos calcular los coeficientes mediante

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,,$$

[2] En palabras de Wilf, de su muy recomendable *"Generatingfunctionology"*, una función generatriz es una cuerda de la ropa en la que tendemos una sucesión de números para exhibirla. A veces se habla de función generatriz *ordinaria*, para distinguirla de otros tipos de funciones generatrices: funciones generatrices de probabilidad (véase la sección 10.6), funciones generatrices exponenciales (capítulo 13) o funciones generatrices de Dirichlet (sección 13.6).

que no es sino la fórmula de Taylor habitual (aunque, en general, este método de cálculo de coeficientes es poco práctico). De todo esto hablaremos en la sección 10.3, pero, por ahora, veamos algunos ejemplos.

El ejemplo básico es la suma de la serie geométrica,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\,,$$

que, desde el punto de vista analítico, sólo tiene sentido si $|x| < 1$. Ahora, en este nuevo lenguaje, resulta que $1/(1-x)$ es la función generatriz de la sucesión infinita de unos:

$$\frac{1}{1-x} \quad \longleftrightarrow \quad (1)_{n=0}^{\infty}\,.$$

En otras palabras, y con la notación que señalábamos antes, $\mathrm{Coef}_n[1/(1-x)] = 1$ para cada $n = 0, 1, 2\ldots$. Por razones que pronto se harán evidentes, ésta será nuestra **serie de potencias básica**, tengámosla siempre en mente. Otra serie de potencias bien conocida es la que define la función exponencial, que ya expresamos de las tres formas habituales:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x\,; \quad e^x \longleftrightarrow \left(\frac{1}{n!}\right)_{n=0}^{\infty}\,; \quad \text{o bien } \mathrm{Coef}_n\,[e^x] = \frac{1}{n!} \quad \text{para cada } n \geq 0.$$

Obsérvese que la serie de potencias de la izquierda converge para cualquier valor de x.

El teorema del binomio nos proporciona otro caso conocido: para $m \geq 1$,

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n\,.$$

Esta representación es válida para todo x porque, en realidad, la serie de potencias es un polinomio, pues para $m \geq n$ los coeficientes binómicos son nulos:

$$(1+x)^m \longleftrightarrow \left(\binom{m}{0}, \binom{m}{1}, \ldots, \binom{m}{m}, 0, 0, \ldots\right)\,;$$

Ejemplo 10.1.4 *Calculemos los coeficientes asociados a la función $f(x) = (1-x)^{-m-1}$, para un cierto $m \geq 0$ fijo.*

Obsérvese que el caso $m = 0$ corresponde a la serie básica, cuyo desarrollo ya conocemos. Nótese también que, al derivar sucesivamente la serie básica,

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}\,, \quad \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}\,, \quad \left(\frac{1}{1-x}\right)''' = \frac{6}{(1-x)^4}\,, \ldots$$

generamos, salvo constantes, la familia de funciones en las que estamos interesados. Mientras estemos en $|x| < 1$, todas estas manipulaciones son válidas. Así que tiene sentido calcular los coeficientes de la función $(1-x)^{m-1}$, para cierto $m \geq 0$, mediante la fórmula de Taylor.

Sea entonces $f(x) = (1-x)^{-m-1}$, y calculemos sus derivadas sucesivas:

$$f'(x) = \frac{m+1}{(1-x)^{m+2}}\,,\ f''(x) = \frac{(m+1)(m+2)}{(1-x)^{m+3}}\,,\ \cdots,\ f^{(n)}(x) = \frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}{(1-x)^{m+n+1}}.$$

Así que

$$f^{(n)}(0) = \frac{(m+n)!}{m!}.$$

Por tanto,

$$a_n = \operatorname{Coef}_n\left[\frac{1}{(1-x)^{m+1}}\right] = \frac{(m+n)!}{n!\,m!} = \binom{m+n}{m}.$$

O, como escribimos habitualmente,

$$\frac{1}{(1-x)^{m+1}} \quad\longleftrightarrow\quad \left(\binom{m+n}{m}\right)_{n=0}^{\infty} = \left(\binom{m}{m}, \binom{m+1}{m}, \binom{m+2}{m}, \dots\right).$$

Nótese que m es un parámetro fijo y que n es el índice de la sucesión. Cuando $m = 0$, recuperamos la sucesión que vale uno para cada n. ♣

Ahora podemos completar las observaciones que hicimos en los ejemplos de la sección del método simbólico. Así, por ejemplo, como vimos en el ejemplo 10.1.1, el número de multiconjuntos de tamaño k que podemos formar con los símbolos $\{1,\dots,n\}$ coincidía con el coeficiente k-ésimo de la serie de potencias $(1+x+x^2+\cdots)^n$. Y ahora ya podemos escribir que

$$R(n,k) = \operatorname{Coef}_k[(1+x+x^2+\cdots)^n] = \operatorname{Coef}_k\left[\frac{1}{(1-x)^n}\right] = \binom{(n-1)+k}{n-1},$$

como bien sabíamos.

Si lo que nos preocupa es el número de maneras de dar cambio de de n céntimos con monedas de 2, 5, 20 y 50 céntimos, la repuesta está en el coeficiente n-ésimo de la función

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1+x^2+x^4+\cdots\right)\left(1+x^5+x^{10}+\cdots\right)\left(1+x^{20}+x^{40}+\cdots\right)\left(1+x^{50}+x^{100}+\cdots\right) \\ &= \frac{1}{1-x^2}\,\frac{1}{1-x^5}\,\frac{1}{1-x^{20}}\,\frac{1}{1-x^{50}}\,. \end{aligned}$$

De esta expresión no estamos en condiciones (todavía) de extraer mucha información. Con ayuda del ordenador, sin embargo, podríamos obtener que el coeficiente milésimo es 19006. En la sección 10.8 veremos técnicas que nos permitirán estimar el orden de magnitud de estos coeficientes.

10.1.3. El método de las funciones generatrices

Vamos a ilustrar la manera en que hay que proceder (y las precauciones que habría que tomar) a la hora de utilizar las funciones generatrices en el siguiente ejemplo, en el que recurrimos a una de nuestras sucesiones favoritas, la de Fibonacci.

Consideremos los números de Fibonacci F_n, dados por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad \text{para cada } n \geq 2.$$

El primer paso es asociar a estos números su función generatriz,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n\, x^n\,,$$

de la que no sabemos, o al menos haremos como que no sabemos[3], si converge o no. Para ilustrar la versatilidad de este enfoque de las funciones generatrices, no fijamos todavía nuestro objetivo; podría interesarnos obtener una fórmula cerrada para los F_n (esto es, resolver la recurrencia), quizás calcular alguna serie numérica relacionada con los F_n, o quizás…

La información de que disponemos es la ecuación de recurrencia (y los valores iniciales), así que la utilizamos para manipular la sucesión de números:

$$\begin{aligned} F(x) &= F_0 + F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + \cdots = F_0 + F_1x + (F_0 + F_1)x^2 + (F_1 + F_2)x^3 + \cdots \\ &= F_0 + F_1x + \big(F_0\, x^2 + F_1\, x^3 + F_2\, x^4 + \cdots\big) + \big(F_1\, x^2 + F_2\, x^3 + F_3\, x^4 + \cdots\big) \\ &= F_0 + F_1x + x^2F(x) + x(F(x) - F_0)\,. \end{aligned}$$

Todo lo que hemos hecho hasta aquí son manipulaciones formales, como las que hicimos en la sección 4.7, y sobre las que volveremos con más detalle en la sección 10.2: sumar sucesiones de números, desplazar sucesiones, etc. Utilizando los valores iniciales, $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$, concluimos que

$$F(x)(1 - x - x^2) = x\,.$$

Seguimos con una identidad puramente formal, que nos dice que el producto de la serie $F(x)$ por el polinomio $(1 - x - x^2)$ da como resultado la sucesión de números $(0, 1, 0, 0, \dots)$, que hemos codificado como x. La solución (formal) es que $F(x)$ coincide el producto de x por la recíproca (formal) de $(1 - x - x^2)$, que podríamos calcular con las técnicas que vimos en la sección 4.7:

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}\,.$$

Ahora bien, la *función* $x/(1-x-x^2)$ tiene un desarrollo de potencias, que llamamos simplemente $\boldsymbol{\Sigma}(x)$. Esto es un resultado general (véase el teorema 10.3), pero en este caso no hace falta apelar a él, pues basta observar que

$$\boldsymbol{\Sigma}(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = x\,\frac{1}{1 - (x + x^2)} = x\sum_{n=0}^{\infty}(x + x^2)^n\,,$$

donde hemos utilizado la serie básica. Así que, necesariamente, la expresión formal $x/(1 - x - x^2)$, esto es, $F(x)$, debe coincidir con la serie de potencias $\boldsymbol{\Sigma}(x)$.

Si lo que nos interesara fuera obtener una fórmula para los F_n, podríamos reescribir los términos $(x+x^2)^n$ que aparecen en la serie $\boldsymbol{\Sigma}(x)$ utilizando, a su vez, el teorema del binomio.

[3]Y es que en realidad conocemos muy bien los números de Fibonacci. Por ejemplo, de la fórmula de Binet (véase la sección 6.3), se deduce que F_n es prácticamente igual a $\tau^n/\sqrt{5}$. O, más modestamente, sin necesidad de conocer la fórmula explícita, se puede comprobar por inducción que $F_n < 2^n$ si $n \geq 1$. De estas estimaciones de tamaño se puede deducir sin dificultad la convergencia de la serie.

O quizás utilizar el método de las fracciones simples para encontrar los coeficientes. Todas estas técnicas las desarrollaremos más adelante.

Pero nuestro análisis nos permite llegar más allá. Por ejemplo, como veremos más adelante, la serie $\mathbf{\Sigma}(x)$ converge en el intervalo $(-1/\tau, 1/\tau) \approx (-0,6180, 0,6180)$. Por supuesto, la razón áurea tenía que aparecer. Así que, *a posteriori*, comprobamos que $F(x)$ converge en ese intervalo. De manera que, por ejemplo, tiene sentido evaluar $F(x)$ en, digamos, $x = 1/2$, para obtener que

$$F(1/2) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \frac{1}{2^n} = \frac{1/2}{1-(1/2)-(1/2)^2} = 2\,.$$

O quizás en $x = \tau/3$, que también está en el intervalo de convergencia, para obtener una nueva identidad:

$$F(\tau/3) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \frac{\tau^n}{3^n} = \frac{\tau/3}{1-(\tau/3)-(\tau/3)^2} = \frac{3\tau}{9-3\tau-\tau^2}\,.$$

En los usos de funciones generatrices que iremos desgranando más adelante, deberíamos incluir siempre justificaciones de esta índole. Pero no insistiremos en ellas, sobre todo, para no perder el hilo y repetirnos en exceso. Pero el lector está ya avisado.

Recordando los pasos que hemos seguido en este ejemplo, podemos enunciar los tres pasos del método de las funciones generatrices:

- Primero, "colgamos" la sucesión de números en que estemos interesados de la cuerda de ropa (según Wilf) o función generatriz $f(x)$. Esto no es más que el método simbólico del que hablamos en la subsección 10.1.1.
- El siguiente paso es hallar una expresión adecuada para $f(x)$. Para ello necesitaremos manipular las expresiones que nos vayan saliendo. Las reglas necesarias las explicaremos en la sección 10.2.
- Por último, necesitaremos *desarrollar* $f(x)$, pues, al fin y al cabo, lo que nos interesan son fórmulas para los coeficientes. O quizás nos baste con analizar la $f(x)$ obtenida. O más aún, es posible que lo que interese sea evaluar la función $f(x)$ en un cierto valor de x. De todo esto hablaremos en la sección 10.3.

10.2. Manipulación de funciones generatrices

Veremos ahora cómo algunas operaciones entre funciones generatrices se traducen en sus sucesiones asociadas; o viceversa. En todo lo que sigue, salvo cuando sea imprescindible hacer un estudio explícito, supondremos que todas las manipulaciones están bien justificadas (véase, de todas formas, el ejercicio 10.2.1).

Regla 1: Sumar y multiplicar por constantes

Sean dos funciones generatrices $f(x)$ y $g(x)$, asociadas a dos sucesiones de números, (a_n) y (b_n), respectivamente. Y sean α y β dos números cualesquiera. Esta primera regla nos dice cuáles son los coeficientes de la función $\alpha f(x) + \beta g(x)$. Los que uno espera, por supuesto:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \longleftrightarrow (a_n)_{n=0}^{\infty} \\[1em] g(x) \longleftrightarrow (b_n)_{n=0}^{\infty} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \alpha f(x) + \beta g(x) \longleftrightarrow (\alpha\, a_n + \beta\, b_n)_{n=0}^{\infty}}$$

La prueba es trivial y queda como entretenimiento (ni siquiera ejercicio) para el lector.

Regla 2: Producto de funciones

La siguiente regla considera el producto puntual de dos funciones generatrices $f(x)$ y $g(x)$, asociadas a (a_n) y (b_n), respectivamente. Empezamos con las primeras manipulaciones:

$$f(x) \cdot g(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\, x^j \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_k\, b_j\, x^{k+j}$$

Ahora viene el paso clave para la fórmula que presentaremos luego. Se trata de determinar el coeficiente n-ésimo de la serie de potencias $f(x)g(x)$. Obtendremos términos con x^n cuando los índices j y k sean tales que $k + j = n$. Y cada combinación de éstas contribuirá con el producto $a_j b_k$ correspondiente. Así que, si llamamos c_n a los coeficientes de $f(x)g(x)$, podemos escribir que

$$c_n = \sum_{k+j=n} a_k\, b_j\,.$$

En realidad es una suma doble, en los índices k y j; pero sólo sumamos aquéllos cuya suma valga n. Aún podemos reescribirla de forma más manejable. Miremos los primeros casos. Por ejemplo, para c_0, debemos considerar las maneras de escribir $k + j = 0$: sólo hay una, $k = 0$ y $j = 0$, así que $c_0 = a_0\, b_0$.

Para el segundo coeficiente, c_1, ya hay más posibilidades: tendremos $k + j = 1$ cuando, o bien $k = 0$ y $j = 1$, o bien $k = 1$ y $j = 0$; es decir, $c_1 = a_0\, b_1 + a_1\, b_0$.

El lector ya podrá escribir el valor de c_2, listando, simplemente, los posibles pares (k, j) que cumplan que $k + j = 2$. Llegará así sin dificultad a que $c_2 = a_0\, b_2 + a_1\, b_1 + a_2\, b_0$.

Tras este análisis preliminar, la regla general es casi obvia:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}\,,$$

el llamado **producto de Cauchy**:

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} f(x) \longleftrightarrow (a_n)_{n=0}^{\infty} \\[2ex] g(x) \longleftrightarrow (b_n)_{n=0}^{\infty} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f(x)\cdot g(x) \longleftrightarrow \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}\right)_{n=0}^{\infty}}$$

Este producto tiene una interpretación combinatoria sobre la que es conveniente reflexionar. Imaginemos que tenemos objetos de dos tipos, A y B. Para cada n, hay a_n objetos de tipo A y tamaño n, y b_n de tipo B y tamaño n.

El objetivo es formar objetos de tamaño total n que estén formados por uno de tipo A y otro de tipo B. Para construirlos, aplicamos las reglas de la suma y del producto:

1. Llamamos j al tamaño del objeto de tipo A elegido. El parámetro j, por supuesto, se moverá entre 0 y n.
2. Elegimos el objeto de tipo A de tamaño j. Esto se podrá hacer de a_j formas.
3. Elegimos el objeto de tipo B, que tendrá que ser de tamaño $n-j$: se podrá hacer de b_{n-j} maneras.

En total, si llamamos c_n al número de objetos que podemos construir con esas características, se tendrá que

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j\, b_{n-j}\,.$$

En términos de las funciones generatrices asociadas, si llamamos f y g a las funciones generatrices asociadas a las sucesiones (a_n) y (b_n), respectivamente, la función $f(x)g(x)$ será la función generatriz de los c_n.

Para ilustrar esta interpretación, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.2.1 *En un consejo de administración hay 25 personas, de las que 11 son mujeres. Se quiere formar un comité con 10 personas. ¿De cuántas formas se podrá hacer?*

La respuesta es inmediata: hay $\binom{25}{10}$ comités distintos.

Pero ahora vamos a contarlos atendiendo a la proporción de hombres y mujeres que hay en ellos. En la terminología anterior, los objetos de tipo A serán las posibles combinaciones de mujeres que forman parte del comité, y los de tipo B, las de hombres:

$$\begin{aligned} a_n &= \#\{\text{formas de escoger } n \text{ de entre las 11 mujeres}\} = \binom{11}{n}, \\ b_n &= \#\{\text{formas de escoger } n \text{ de entre los 14 hombres}\} = \binom{14}{n}. \end{aligned}$$

Sus funciones generatrices asociadas son

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{11}{n} x^n = (1+x)^{11} \quad \text{y} \quad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{14}{n} x^n = (1+x)^{14}.$$

La respuesta que buscamos es el coeficiente c_{10} de la función $A(x)\,B(x)$:

$$A(x)\,B(x) = (1+x)^{11}\,(1+x)^{14} = (1+x)^{25} \implies \mathrm{Coef}_{10}\,[A(x)\,B(x)] = \binom{25}{10}.$$

Hemos probado, de paso, que

$$\binom{25}{10} = \sum_{j=0}^{10} \binom{11}{j} \binom{14}{10-j}.$$

Y si generalizamos el argumento (con s mujeres, t hombres y un comité de n personas), tendremos una prueba, con funciones generatrices, de la **identidad de Vandermonde**,

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{s}{j} \binom{t}{n-j} = \binom{s+t}{n},$$

que ya ha aparecido en varias ocasiones (el argumento combinatorio se presentaba en la subsección 3.1.2; con la interpretación geométrica de los coeficientes binómicos la volvíamos a obtener en la subsección 3.1.4). ♣

Regla 3: Desplazar coeficientes

En muchas ocasiones interesa considerar la sucesión de números que se obtiene de una dada desplazando los coeficientes hacia la derecha o hacia la izquierda. Consideremos la función generatriz $f(x)$ de una cierta sucesión (a_n). Si multiplicamos por x, obtenemos una nueva función $h(x) = x\,f(x)$:

$$x\,f(x) = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n.$$

Es decir, el coeficiente n-ésimo de $xf(x)$ es el coeficiente $n-1$ de $f(x)$. Pero cuidado, para $n \geq 1$: el coeficiente cero de $xf(x)$ es ahora 0:

$$xf(x) \quad \longleftrightarrow \quad (0, a_0, a_1, a_2, \dots).$$

Y si multiplicamos por una potencia mayor, x^m, con $m \geq 1$, desplazamos la sucesión hacia la derecha m posiciones y tendremos m ceros al principio.

Luego la regla se escribirá:

$$\boxed{f(x) \longleftrightarrow (a_n)_{n=0}^{\infty} \quad \implies \quad x^m\,f(x) \longleftrightarrow (0, 0, \overset{(m)}{\dots}, 0, a_0, a_1, a_2, \dots) = (a_{n-m})_{n=0}^{\infty}}$$

La última expresión es simplemente una notación que nos permite abreviar, en la que aplicamos el convenio de que si el índice del coeficiente es negativo, entonces el coeficiente vale cero.

El desplazamiento de coeficientes en el otro sentido requiere un cierto cuidado. Por ejemplo, partimos de una sucesión $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ asociada a una función $f(x)$ y nos preguntamos por la función generatriz $g(x)$ asociada a la sucesión $(a_1, a_2, a_3, \dots)$. Obsérvese que los coeficientes b_n de esta nueva función vienen dados por $b_n = a_{n+1}$, para cada $n \geq 0$.

Primero, claro, hay que eliminar el coeficiente a_0, así que debemos considerar la función

$$f(x) - a_0 = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

Pero esto no es todavía $g(x)$, pues la función $f(x) - a_0$ está asociada a la sucesión de números $(0, a_1, a_2, \dots)$. Obsérvese que, de paso, hemos hallado una "regla" que permite sustituir un coeficiente cualquiera por 0; aquí lo hemos hecho para el primer coeficiente, pero el lector podría reflexionar sobré cuál es la función generatriz de la sucesión en la que, por ejemplo, sustituimos el vigésimo coeficiente[4] de la original por 0.

La función que buscamos, $g(x)$, está asociada a $(a_1, a_2, a_3, \dots)$. Así que, con la regla de desplazamiento *hacia la derecha*, $xg(x)$ genera la sucesión $(0, a_1, a_2, a_3, \dots)$, que es, precisamente, $f(x) - a_0$. De manera que

$$xg(x) = f(x) - a_0 \quad \Longrightarrow \quad g(x) = \frac{f(x) - a_0}{x}.$$

¡Ay!, una x en el denominador, y se supone que esto es una serie de potencias centrada en el 0. Pero no debemos preocuparnos, porque la serie de la función $f(x) - a_0$ no tiene término independiente, así que al dividirla por x obtenemos una serie de potencias legal.

El caso general sigue los mismo argumentos. Dado un $m \geq 1$, si $f(x)$ es la función generatriz de la sucesión (a_n), entonces

$$\boxed{\frac{f(x) - a_0 - a_1\, x - \cdots - a_{m-1}\, x^{m-1}}{x^m} \quad \longleftrightarrow \quad (a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots) = (a_{n+m})_{n=0}^{\infty}}$$

La operación del numerador sustituye los primeros m coeficientes por 0 y la "división" por x^m los elimina. En otros términos, las reglas de desplazamiento se pueden escribir como que

$$\begin{aligned} \mathrm{Coef}_n\,[f(x)] &= \mathrm{Coef}_{n+m}\,[x^m\, f(x)]\,, \\ (\text{si } n \geq m) \quad \mathrm{Coef}_n\,[f(x)] &= \mathrm{Coef}_{n-m}\left[\frac{f(x) - a_0 - a_1\, x - \cdots - a_{m-1}\, x^{m-1}}{x^m}\right]. \end{aligned}$$

Como ejemplo de aplicación de estas reglas, consideremos la función $1/(1-x)$, asociada a la sucesión $(1, 1, 1, \dots)$. Entonces,

$$\frac{x}{1-x} \longleftrightarrow (0, 1, 1, 1 \dots)\,, \quad \frac{x^2}{1-x} \longleftrightarrow (0, 0, 1, 1, \dots)\,, \quad \text{etc.}$$

Pero si desplazamos, por ejemplo, la sucesión hacia la izquierda tres posiciones, volvemos a tener la sucesión de unos. No hay problema, porque, como el lector podrá comprobar, la función

$$\frac{\frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2}{x^3} \quad \text{vuelve a ser} \quad \frac{1}{1-x}.$$

[4]La respuesta, claro, es $f(x) - a_{19}x^{19}$.

Regla 4: Derivar (y algo más)

Si tenemos una función f que genera unos ciertos (a_n), ¿qué función generará la sucesión $(n\, a_n)$? Buscamos una operación que, aplicada a f, haga que sus coeficientes aparezcan multiplicados por la posición que ocupan. La estructura especial de las series de potencias nos hace sospechar que esa operación va a ser la derivación (o casi):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}.$$

Así que $f'(x)$ está asociada a la sucesión $(1a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$. Casi lo tenemos, salvo que el primer coeficiente debería ser $0a_0$. Así que debemos desplazar la sucesión hacia la derecha una posición, y esto ya lo aprendimos a hacer con la regla anterior:

$$x\, f'(x) \quad \longleftrightarrow \quad (0a_0, 1a_1, 2a_2, 3a_3, \dots) = (n\, a_n)_{n=0}^{\infty}$$

Si lo que queremos es obtener la función asociada a la sucesión $(n^2\, a_n)$, el mismo argumento, pero ahora aplicado a la función $x\, f'(x)$ (cuyos coeficientes son $n\, a_n$), nos lleva a que

$$x\,\big(x\, f'(x)\big)' \quad \longleftrightarrow \quad (n^2\, a_n)_{n=0}^{\infty}.$$

Y así podríamos seguir. Cada factor n extra en el coeficiente se obtiene repitiendo la operación. Por abreviar, llamemos $(x\, d/dx)$ al operador que actúa sobre una función derivándola primero y multiplicándola por x después. Entonces, para cada $m \geq 1$,

$$\boxed{f(x) \longleftrightarrow (a_n)_{n=0}^{\infty} \quad \Longrightarrow \quad \left(x\,\frac{d}{dx}\right)^m (f(x)) \longleftrightarrow (n^m\, a_n)_{n=0}^{\infty}}$$

Esta operación será especialmente interesante, por ejemplo, a la hora de calcular medias, algo que haremos varias veces más adelante, en especial en la sección 10.6. Por ahora, y como ilustración, veamos cuál es la función generatriz $f(x)$ de la sucesión de números $(0, 1, 2, 3, \dots)$. Sabemos que $1/(1-x)$ genera la sucesión $(1, 1, 1, \dots)$, así que no hay más que aplicarle esta regla para obtener lo que buscamos:

$$x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2} \quad \longleftrightarrow \quad (0, 1, 2, 3, \dots)\,.$$

O, con más generalidad, podemos obtener la sucesión de números $(0, d, 2d, 3d, 4d, \dots)$, que están en progresión aritmética que empieza en 0 y de diferencia d:

$$\frac{d}{1-x} \quad \longleftrightarrow \quad (d, d, d, d, \dots) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dx}{(1-x)^2} \quad \longleftrightarrow \quad (0, d, 2d, 3d, \dots)$$

Con muy poco más de esfuerzo se puede comprobar que la función generatriz de una progresión aritmética general, que empiece en un cierto a y tenga diferencia d, es

$$\frac{a}{1-x} + \frac{dx}{(1-x)^2} = \frac{a + (d-a)x}{(1-x)^2} \quad \longleftrightarrow \quad (a, a+d, a+2d, a+3d, \dots)\,.$$

Regla 5: Obtener sumas parciales

La función $1/(1-x)$, aquélla cuyos coeficientes son todos unos, es muy especial. Veamos el efecto que tiene, sobre los coeficientes de una cierta función, la multiplicación por la serie básica. Aplicamos, simplemente, la regla 2:

$$f(x)\,\frac{1}{1-x} = \sum_{s=0}^{\infty} a_s x^s \sum_{t=0}^{\infty} x^t = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right) x^n\,;$$

los b_{n-k} que deberían aparecer dentro de la suma de la derecha son todos 1, en este caso. Es decir, que

$$\boxed{f(x) \longleftrightarrow (a_n)_{n=0}^{\infty} \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(x)}{1-x} \longleftrightarrow (a_0, a_0+a_1, a_0+a_2+a_2, \dots) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right)_{n=0}^{\infty}}$$

Así que el coeficiente n-ésimo de la función $f/(1-x)$ es la suma de los n primeros coeficientes de la función f. El efecto de dividir por $1-x$ es que devuelve lo que llamaremos las **sumas parciales** de los coeficientes originales.

Ejemplo 10.2.2 *Calculemos de nuevo la suma de los primeros n números naturales.*

El resultado ya lo conocemos (véase, por ejemplo, el ingenioso argumento de Gauss, página 57). Obtengámoslo con funciones generatrices.

Sabemos que la función $x/(1-x)^2$ está asociada a los números $(0,1,2,3,\dots)$. Es decir, que su coeficiente k-esimo es, justamente, k. Esto lo obtuvimos utilizando la regla 4.

Ahora, con esta nueva regla, resulta que

$$f(x) = \frac{1}{1-x}\,\frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^3} \quad \longleftrightarrow \quad \left(\sum_{k=0}^{n} k \right)_{n=0}^{\infty}$$

Así que la respuesta está en el coeficiente n-esimo de la función $f(x)$. Conocemos (véase el ejemplo 10.1.4) los coeficientes de $(1-x)^{-3}$, así que sólo hay que utilizar la regla 3 para concluir: si $n \geq 1$,

$$\mathrm{Coef}_n\left[\frac{x}{(1-x)^3}\right] = \mathrm{Coef}_{n-1}\left[\frac{1}{(1-x)^3}\right] = \binom{3+(n-1)-1}{3-1} = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

(también válido para $n=0$). Análogos argumentos permiten obtener la suma de los primeros n cuadrados, cubos, etc. (véase el ejercicio 10.2.4, y también el 10.2.5). ♣

Ejemplo 10.2.3 *Consideremos los **números armónicos** H_n, dados, para cada $n \geq 1$, por*

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$$

Definimos $H_0 = 0$. Queremos encontrar la función generatriz de estos H_n.

El primer paso es encontrar una función, digamos $g(x)$, cuyos coeficientes sean los números $1/j$. Lo que nos interesa son las sumas parciales asociadas a estos números. Conviene, para que H_0 sea luego 0, definir el primer coeficiente de $g(x)$ como 0. Nuestra función es, pues,

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

Buscamos una expresión para esta función, que luego multiplicaremos por $1/(1-x)$. Para obtenerla, observamos que si la derivamos

$$g'(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Así que la función $g(x)$ satisface una ecuación diferencial, cuya solución es

$$g(x) = \log\left(\frac{1}{1-x}\right) + C.$$

Como $g(0) = 0$, el valor de la constante resulta ser

$$g(x) = \log\left(\frac{1}{1-x}\right) + C \Longrightarrow g(0) = \log(1) + C = 0 \quad \Longrightarrow C = 0.$$

Y ahora basta con multiplicar por $1/(1-x)$ para obtener la función generatriz de los números armónicos:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \log\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n\, x^n\,.$$

♣

Regla 6: Seleccionar coeficientes

Ya sabemos cómo hay que proceder para eliminar (esto es, sustituir por 0) algunos coeficientes. En ocasiones es necesario eliminar un conjunto infinito de ellos, por ejemplo los coeficientes de índice par, para quedarnos con los de índice impar. O quizás nos interese rescatar, únicamente, los coeficientes cuyos índices sean múltiplos de 5.

Veamos el primer caso: $f(x)$ es la función generatriz de una sucesión de números (a_n); y queremos quedarnos únicamente con los coeficientes de índice par. Si escribimos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\,, \quad \text{entonces} \quad f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (-1)^n x^n$$

No hay por qué preocuparse: si $f(x)$ tiene sentido para un cierto x, es decir, si x está dentro del radio de convergencia, entonces $-x$ también lo estará y tendrá sentido hablar de $f(-x)$. Ahora, como es casi obvio, sumamos estas dos series,

$$f(x) + f(-x) = (a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + \cdots) + (a_0 - a_1\, x + a_2\, x^2 - a_3\, x^3 + \cdots)\,,$$

sólo sobreviven los términos de índice impar (y aparecen multiplicados por 2). Por tanto,

$$\frac{f(x)+f(-x)}{2} = \sum_{n \text{ par}} a_n\, x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}\, x^{2k}\,.$$

Ya podemos escribir la regla correspondiente:

$$\boxed{f(x) \longleftrightarrow (a_n)_{n=0}^{\infty} \quad\Longrightarrow\quad \frac{f(x)+f(-x)}{2} \longleftrightarrow (a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, a_6, 0, \dots)}$$

De manera análoga, si restamos ambas series, seleccionaremos los términos de índice impar (que aparecerán también multiplicados por 2), así que

$$\boxed{f(x) \longleftrightarrow (a_n)_{n=0}^{\infty} \quad\Longrightarrow\quad \frac{f(x)-f(-x)}{2} \longleftrightarrow (0, a_1, 0, a_3, 0, a_5, 0, \dots)}$$

Seleccionar los términos cuyos índices, por ejemplo, son múltiplos de 3 o de 4 es algo más complicado, y requiere entender esta series de potencias en el contexto de la variable compleja (véanse los ejercicios 10.2.6 y 10.2.7).

EJERCICIOS.

10.2.1 *Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones generatrices que convergen en intervalos $(-R,R)$ y $(-M,M)$, respectivamente. ¿Dónde convergen las funciones $\alpha f(x)+\beta g(x)$ y $f(x)g(x)$? ¿Y la función $f(x)/(1-x)$? Comprobar que las funciones $x^m f(x)$ y $f^{(m)}(x)$ convergen en el mismo intervalo que la $f(x)$ original.*

10.2.2 *si $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ son las funciones generatrices de las sucesiones (a_n), (b_n) y (c_n), respectivamente, ¿cuáles son los coeficientes de las función $f(x)g(x)h(x)$? Si $m \geq 1$, ¿cuáles son los coeficientes de la función $f^m(x)$?*

10.2.3 *(a) Utilizar el ejercicio anterior para describir los coeficientes de la función $1/(1-x)^m$.*
(b) Aplicar esta observación al cálculo del número de soluciones de la ecuación diofántica

$$x_1 + \cdots + x_m = n$$

donde $x_j \geq 0$, para cada $j = 1, \dots, m$, que ya obtuvimos, con argumentos combinatorios, en la subsección 3.1.3.
(c) Refinar el argumento anterior para comprobar que $\binom{n-1}{m-1}$ es el número de soluciones de la ecuación diofántica $x_1 + \cdots + x_m = n$ cuando exigimos que los x_j sean ≥ 1.

10.2.4 *Comprúebese, utilizando la regla 4 sobre derivación, que*

$$\frac{x+x^2}{(1-x)^3} \quad\longleftrightarrow\quad (0, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots)\,.$$

Dedúzcase, utilizando la regla 5, que la suma de los primeros n cuadrados vale $n(n+1)(2n+1)/6$. Constrúyase también el argumento que permite evaluar la suma de los primeros n cubos.

10.2.5 *Considérense las dos funciones*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \qquad y \qquad g(x) = \sum_{k=1}^{n} k\, x^k .$$

Comprúebese que $g(x) = xf'(x)$. Obsérvese que $g(1) = f'(1)$ nos da el valor de la suma de los n primeros números naturales. Calcúlese $f'(1)$, derivando directamente en la fórmula de $f(x)$ (y con la ayuda de la regla de L'Hôpital). Constrúyase un argumento similar para comprobar que la suma de los primeros n cuadrados vale $n(n+1)(2n+1)/6$.

10.2.6 *Sea $f(x)$ la función generatriz de una sucesión de números (a_n). Escribir, en términos de $f(x)$, la función generatriz cuyos coeficientes son los mismos a_n en los índices que sean múltiplos de cuatro y cero en los restantes índices.*

Solución. $\big[f(x) + f(ix) + f(-x) + f(-ix)\big]/4$.

10.2.7 *Recordando que los coeficientes de la función e^x son los números $1/n!$, dar fórmulas explícitas de las funciones generatrices de las sucesiones $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ dadas por*

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n!}, & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 0, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} \frac{1}{n!}, & \text{si } n \text{ es múltiplo de 4,} \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Sugerencia. Observar que e^x tiene como coeficientes $1/n!$. Para quedarse sólo con los de índice múltiplo de 4, combinar los desarrollos del coseno y del coseno hiperbólico, que sólo tienen términos de orden par.

Solución. (*a*) $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$ (*b*) $\frac{\cosh(x)+\cos(x)}{2}$

10.2.8 *Supongamos que*

$$f(x) \longleftrightarrow (a_n)_{n=0}^{\infty}, \quad g(x) \longleftrightarrow (a_{2n})_{n=0}^{\infty}, \quad h(x) \longleftrightarrow (a_{2n-1})_{n=1}^{\infty} .$$

Comprobar que

$$h(x^2) = x\,\frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad y \quad g(x^2) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} .$$

Partiendo de que la sucesión de números de Fibonacci (F_n) tiene, como función generatriz, a $x/(1 - x - x^2)$, compruébese que

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_{2n-1}\, x^n = \frac{x(1-x)}{1-3x+x^2} \quad y \quad \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n}\, x^n = \frac{x}{1-3x+x^2}$$

10.4. Resolución de ecuaciones de recurrencia

Llega la hora de aplicar todas las técnicas que hemos aprendido hasta aquí a un problema concreto, el de la resolución de ecuaciones de recurrencia. En el capítulo 6 ya vimos algunos métodos, de otra índole, y ahora vamos a tratarlas desde el punto de vista de las funciones generatrices. El programa que seguiremos será el que pergeñábamos al final de la subsección 10.1.3:

- Primero, asociamos a la sucesión de números en cuestión una función generatriz, digamos $f(x)$.
- El segundo paso consistirá en encontrar una expresión manejable para $f(x)$. Para esto, utilizaremos la información de que disponemos, a saber, la ecuación de recurrencia y las condiciones iniciales, que nos permitirán obtener una ecuación (algebraica, diferencial, etc.) para $f(x)$. Una vez resuelta, tendremos una fórmula para $f(x)$.
- Pero lo que nos interesa es la sucesión de números. Así que desarrollaremos la función en serie de potencias, para obtener una expresión cerrada de los coeficientes.

Obsérvese que todo este proceso es, en principio, puramente formal. No hay evaluaciones de la función en punto alguno, así que podríamos obviar toda mención a la convergencia de las series de potencias que vayan apareciendo.

Parte de este proceso ya lo hicimos, para la sucesión de números de Fibonacci, en la subsección 10.1.3. Así que volvamos a tratar este caso, como ejemplo de una ecuación de recurrencia lineal, homogénea y con coeficientes constantes.

Ejemplo 10.4.1 *Consideremos la sucesión de números de Fibonacci (F_n) dada por $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$ y $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para cada $n \geq 2$.*

Empezamos asociando a los F_n su función generatriz,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n\, x^n\,.$$

El segundo paso consiste en transformar las infinitas condiciones que encierra la ecuación de recurrencia en una ecuación para $f(x)$.

Simplemente, transferimos la información de la ecuación de recurrencia y las condiciones iniciales a la función generatriz. Sus dos primeros coeficientes están fijados y los siguientes, del tercero en adelante, los reescribimos siguiendo la ecuación. Conseguimos así sustituir la serie de potencias por la suma de otras dos, que luego identificaremos:

$$\begin{aligned} f(x) &= F_0 + F_1 x + \underbrace{F_2\, x^2}_{F_1x^2 + F_0x^2} + \underbrace{F_3\, x^3}_{F_2x^3 + F_1x^3} + \underbrace{F_4\, x^4}_{F_3x^4 + F_2x^4} + \cdots = \\ &= F_0 + F_1 x + \big(F_1\, x^2 + F_2\, x^3 + F_3\, x^4 + \cdots\big) + \big(F_0\, x^2 + F_1\, x^3 + F_2\, x^4 + \cdots\big) \end{aligned}$$

Pero, con ayuda de las reglas de desplazamiento de coeficientes, es fácil identificar estas dos nuevas series de potencias. Lo que queda, como el lector deberá comprobar, es que

$$f(x) = F_0 + F_1\,x + x\,[f(x) - F_0] + x^2\,f(x) = x + f(x)\,\big(x + x^2\big)\,,$$

(en el último paso ya hemos utilizado los valores iniciales).

El lector que se encuentre cómodo con la notación de los sumatorios puede hacer todo este proceso manipulando las series directamente:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n\,x^n = F_0 + F_1\,x + \sum_{n=2}^{\infty} F_n\,x^n = F_0 + F_1\,x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2})\,x^n \\
&= F_0 + F_1\,x + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1}\,x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2}\,x^n \\
&= F_0 + F_1\,x + x\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1}\,x^{n-1} + x^2\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2}\,x^{n-2} \\
&= F_0 + F_1\,x + x\sum_{n=1}^{\infty} F_n\,x^n + x^2\sum_{n=0}^{\infty} F_n\,x^n = F_0 + F_1\,x + x\,[f(x) - F_0] + x^2\,f(x)
\end{aligned}$$

Ahora que tenemos una ecuación (algebraica) para $f(x)$, la resolvemos. Aquí, simplemente, se trata de "despejar" la $f(x)$:

$$f(x) = x + f(x)\,\big(x + x^2\big) \implies f(x)\,\big(1 - x - x^2\big) = x \implies f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

A esta expresión ya habíamos llegado en su momento, y habíamos reflexionado sobre su validez desde el punto de vista analítico.

Pero sigamos. Lo que nos interesan son los coeficientes de $f(x)$, esto es, los números de Fibonacci F_n. Están ahí, encerrados en las tripas de la función $x/(1 - x - x^2)$. Sólo hay que sacarlos a la luz, desarrollando la función en serie de potencias. Ahora sabemos hacerlo.

Por ejemplo, podríamos intentar, como se sugirió en su momento, utilizar que $f(x)$ tiene un aspecto muy semejante a la serie geométrica, para así obtener que

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{x}{1 - (x + x^2)} = x\sum_{k=0}^{\infty} (x + x^2)^k.$$

Si ahora utilizamos el teorema del binomio, podremos desarrollar el paréntesis interior:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{1 - x - x^2} &= x\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l} x^{k-l}(x^2)^l\right) = x\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l} x^{k+l}\right) \\
&= x\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{l \le k \\ l + k = n}}\binom{k}{l}\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{n}\binom{n-l}{l}\right) x^{n+1}
\end{aligned}$$

Un poco duro, para empezar. Hemos agrupado los términos que van con la potencia x^n (de la misma forma que hicimos al definir el producto de dos funciones generatrices) y luego hemos reescrito adecuadamente la suma interior. En la sección 10.5 nos entrenaremos con manejos como éste.

Pero el caso es que hemos llegado a una fórmula para el coeficiente que acompaña a x^{n+1} (recuérdese que tenemos un factor x extra) que es, no puede ser otro, el número F_{n+1}:

$$F_{n+1} = \sum_{l=0}^{n} \binom{n-l}{l},$$

una expresión que ya hemos visto en varias ocasiones.

Pero no nos asustemos, nos hemos metido en el lío nosotros mismos, al tratar de ir por una vía más rápida, que luego resultó no serlo tanto. Además, uno esperaba obtener la fórmula de Binet, y no tiene trazas de ser el camino.

Más lento, pero también más seguro, es aplicar el método de fracciones simples. La ecuación $1 - x - x^2 = 0$ tiene dos raíces, que son

$$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad \beta = \frac{-\sqrt{5}-1}{2},$$

de forma que

$$1 - x - x^2 = -(x-\alpha)(x-\beta)$$

(cuidado con los signos). Y podremos escribir

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{-x}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\beta)}.$$

Determinamos A y B y obtenemos

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{\sqrt{5}-5}{10}\,\frac{1}{x-\alpha} - \frac{\sqrt{5}+5}{10}\,\frac{1}{x-\beta} = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\,\frac{1}{\alpha}\,\frac{1}{1-\frac{x}{\alpha}} + \frac{\sqrt{5}+5}{10}\,\frac{1}{\beta}\,\frac{1}{1-\frac{x}{\beta}}$$

$$= \frac{5-\sqrt{5}}{10}\,\frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^n + \frac{\sqrt{5}+5}{10}\,\frac{1}{\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\beta}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{5-\sqrt{5}}{10}\,\frac{1}{\alpha^{n+1}} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\,\frac{1}{\beta^{n+1}}\right] x^n\,.$$

De esta expresión, y utilizando los valores de α y β, leemos directamente el valor de los coeficientes:

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

la fórmula de Binet que ya conocíamos (ver el ejemplo 6.2.1). ♣

Este ejemplo ha sido especialmente sencillo por varias razones: primero, hemos podido identificar todas las series que han ido apareciendo en términos de la $f(x)$ original. En segundo lugar, como la ecuación era lineal, la ecuación obtenida para $f(x)$ era algebraica, y su resolución sencilla (despejábamos $f(x)$). La última observación es que la función obtenida era un cociente de polinomios, que sabemos desarrollar sin dificultad.

Por supuesto, en situaciones más generales, cualquiera de los pasos seguidos puede deparar dificultades mucho mayores de las que aquí nos hemos encontrado.

Pasemos a un ejemplo de ecuación de recurrencia lineal y con coeficientes constantes, pero con un término no homogéneo.

EJEMPLO 10.4.2 *Queremos hallar la sucesión de números* (a_n) *que verifica que* $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ *y* $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n$ *si* $n \geq 2$.

Construimos la función f que genera los (a_n) y traducimos la información que tenemos sobre estos números en una ecuación sobre f:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1\,x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1} + a_{n-2} + n)\,x^n \\ &= x + x\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}\,x^{n-1} + x^2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}\,x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n\,x^n \\ &= x + x\,f(x) + x^2\,f(x) + \left(\frac{1}{(1-x)^2} - x\right). \end{aligned}$$

Hemos utilizado aquí que conocemos bien la función asociada a la sucesión cuyo coeficiente n-ésimo es, precisamente, n. Ya tenemos la ecuación para f,

$$f(x) = x\,f(x) + x^2\,f(x) + \frac{1}{(1-x)^2},$$

de la que obtenemos que

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2\,(1-x-x^2)}.$$

Los coeficientes de esta función son los a_n del enunciado, y se pueden obtener desarrollándola en serie de potencias, utilizando fracciones simples, ejercicio que dejamos al lector. ♣

El comentario pertinente es que el método será útil cuando sepamos sumar (obtener una expresión analítica) la o las series de potencias que incluyan a la parte no homogénea. Sin embargo, el que la ecuación siga siendo lineal de coeficientes constantes nos asegura que el tipo de ecuación que obtendremos para f seguirá siendo algebraica.

Si consideramos otro tipo de ecuaciones, las complicaciones aumentan, en general. Por ejemplo, veamos una **ecuación lineal no homogénea con coeficientes no constantes**.

EJEMPLO 10.4.3 *Encontrar la sucesión de números* (a_n) *dada por* $a_0 = 1$ *y*

$$(n+1)\,a_{n+1} = 3\,a_n + \frac{2^n}{n!}, \qquad \textit{para cada } n \geq 0.$$

Como siempre, empezamos introduciendo la función generatriz $f(x)$ asociada a la sucesión:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \,.$$

Tal como viene escrita la recurrencia, conviene no "despejar" el término de mayor índice (en este caso, a_{n+1}), sino trabajar directamente con ella. Como la recurrencia es válida para cada $n \geq 0$, se cumplirá que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, x^n = 3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}\, x^n \,.$$

Si identificamos las series que aparecen (la propia f, su derivada y la función e^{2x}), obtenemos la ecuación que debe verificar la función generatriz:

$$f'(x) = 3\, f(x) + e^{2x} \,.$$

Ésta es una ecuación diferencial para f, cuya solución general viene dada[18] por

$$f(x) = C\, e^{3x} - e^{2x} \,,$$

donde C es una constante. El que $a_0 = 1$ exige que $f(0) = 1$; y con esta información extra podemos concluir que

$$f(x) = 2\, e^{3x} - e^{2x} \,.$$

Desarrollar esta función en serie de potencias, y con ello, obtener los números a_n, es sencillo:

$$f(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}\, x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}\, x^n \,,$$

de donde obtenemos

$$a_n = \frac{1}{n!} \left(2 \times 3^n - 2^n \right) \,,$$

la expresión de los (a_n) que andábamos buscando. ♣

Como ya hemos visto en ocasiones, las ecuaciones de recurrencia pueden involucrar más de un parámetro: ¿qué funciones generatrices habremos de introducir para tratar estos casos? Vayamos al ejemplo de los números $C(n,k)$, que cuentan el número de subconjuntos de tamaño k que podemos extraer del $\{1,\ldots,n\}$. En principio, n y k son, simplemente, dos índices mayores o iguales que 0. Ya sabemos que

$$C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k) \,,$$

[18] Se puede emplear, por ejemplo, un truco de factor integrante. Obsérvese que

$$\big(f(x)e^{-3x}\big)' = f'(x)\, e^{-3x} - 3f(x)e^{-3x} = e^{-3x}\big(f'(x) - 3f(x)\big) = e^{-3x}\, e^{2x} = e^{-x} \,,$$

Integrando esta expresión, llegamos a la solución general del texto.

al menos para $n \geq 1$ y $0 < k < n$ (para este rango de parámetros funcionan sin problemas los argumentos combinatorios que veíamos allí). Además, si $k = n$, sabemos que $C(n,n) = 1$ y si $k > n$, $C(n,k) = 0$. Es fácil comprobar que, entonces, la recurrencia es válida para cada par de índices $n, k \geq 1$.

Si $n \geq 1$, para $k = 0$, se tiene también que $C(n,0) = 1$. Sólo resta analizar el caso en que $n = 0$: si $k \geq 1$, el número correspondiente, $C(0,k) = 0$; pero conveníamos entonces (y es lo razonable dada la definición de los $C(n,k)$), en que $C(0,0) = 1$.

Con toda esta información (que obtenemos con argumentos combinatorios), podíamos construir el triángulo de Tartaglia y obtener una expresión para los $C(n,k)$, la de los coeficientes binómicos. Pero ahora queremos obtener esta expresión utilizando funciones generatrices; y tenemos varias opciones para hacerlo.

Una primera consiste en considerar, para cada n fijo, la función generatriz

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C(n,k)\, x^k \,.$$

Conviene tratar primero el caso $n = 0$:

$$f_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C(0,k)\, x^k = C(0,0) = 1 \,.$$

Para $n \geq 1$ podemos escribir

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} C(n,k)\, x^k = C(n,0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(C(n-1,k-1) + C(n-1,k) \Big)\, x^k \\ &= 1 + x \sum_{k=1}^{\infty} C(n-1,k-1)\, x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} C(n-1,k)\, x^k \\ &= 1 + x \sum_{j=0}^{\infty} C(n-1,j)\, x^j + \sum_{k=0}^{\infty} C(n-1,k)\, x^k - C(n-1,0) \,, \end{aligned}$$

de donde obtenemos una ecuación de recurrencia para las funciones f_n: para cada $n \geq 1$,

$$f_n(x) = (1+x)\, f_{n-1}(x) \,.$$

Si ahora iteramos esta relación hasta llegar al valor inicial, $f_0(x)$, obtenemos que

$$f_n(x) = (1+x)^n \,.$$

Y utilizando la fórmula del binomio, obtenemos la expresión habitual de los $C(n,k)$.

Pero otra posibilidad es considerar la función generatriz, para cada k fijo,

$$g_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C(n,k)\, x^n \,.$$

De nuevo, el caso $k = 0$ es especial:

$$g_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C(n,0)\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\,.$$

Para $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} g_k(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} C(n,k)\, x^n = C(0,k) + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(C(n-1,k-1) + C(n-1,k) \Big)\, x^n \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} C(n-1,k-1)\, x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{\infty} C(n-1,k)\, x^{n-1} \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} C(n,k-1)\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} C(n,k)\, x^n , \end{aligned}$$

de donde

$$g_k(x) = x\, g_{k-1}(x) + x\, g_k(x)\,, \quad \text{esto es,} \quad g_k(x)(1-x) = x g_{k-1}(x)$$

para cada $k \geq 1$. Y esta relación se resuelve iterando:

$$g_k(x) = g_{k-1}(x)\, \frac{x}{1-x} = g_{k-2}(x) \left(\frac{x}{1-x} \right)^2 = \cdots = g_0(x) \left(\frac{x}{1-x} \right)^k = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}\,.$$

De manera que

$$C(n,k) = \mathrm{Coef}_n \left[\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \right] = \mathrm{Coef}_{n-k} \left[\frac{1}{(1-x)^{k+1}} \right] = \binom{k + (n-k)}{k} = \binom{n}{k}.$$

Son dos formas de obtener el mismo resultado; pero, ¡atención!,

$$\begin{aligned} f_n(x) = (1+x)^n \quad &\longleftrightarrow \quad \left(\binom{n}{k} \right)_{k=0}^{\infty}, \\ g_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \quad &\longleftrightarrow \quad \left(\binom{n}{k} \right)_{n=0}^{\infty}. \end{aligned}$$

Para cada n fijo, la función f_n es la función generatriz de los números $\binom{n}{k}$ donde el índice de la sucesión es el de abajo; mientras que, para cada k fijo, g_k genera la sucesión de números $\binom{n}{k}$ indexada por el de arriba: en el primer caso recorremos el triángulo de Tartaglia por filas (de izquierda a derecha), y en el segundo, por diagonales (de arriba a abajo). Nótese que, en particular, la primera sucesión tiene un número finito de términos no nulos, mientras que la segunda no.

Todavía hay una tercera forma de analizar el problema: consiste en considerar, dado que hay dos parámetros involucrados, una función generatriz en dos variables, digamos x e y:

$$F(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C(n,k)\, x^n\, y^k\,.$$

Para obtener una expresión manejable de esta función, utilizamos de nuevo la información sobre los $C(n,k)$, separando los casos en que los índices valgan 0:

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \sum_{k=0}^{\infty} C(0,k)\,y^k + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} C(n,k)\,x^n\,y^k \\
&= C(0,0) + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{C(n,0)}_{=1}\,x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} C(n,k)\,x^n\,y^k \\
&= \frac{1}{1-x} + \sum_{n,k=1}^{\infty} C(n-1,k-1)\,x^n\,y^k + \sum_{n,k=1}^{\infty} C(n-1,k)\,x^n\,y^k \\
&= \frac{1}{1-x} + x\,y \sum_{n,k=0}^{\infty} C(n,k)\,x^n\,y^k + x \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} C(n,k)\,x^n\,y^k \\
&= \frac{1}{1-x} + x\,y\,F(x,y) + x\left(F(x,y) - \sum_{n=0}^{\infty} C(n,0)\,x^n\right),
\end{aligned}$$

de donde

$$F(x,y) = \frac{1}{1-x-xy}\,.$$

Para desarrollarla en serie, aprovechamos que es una serie geométrica (y luego utilizamos el teorema del binomio):

$$\frac{1}{1-x-xy} = \sum_{n=0}^{\infty}(x+xy)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n\,(1+y)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k} y^k = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k} x^n\,y^k\,.$$

Ya sólo queda comparar con la definición de los $C(n,k)$ para obtener su valor. Este uso de funciones generatrices en dos variables será útil a veces. Nótese que, para que el desarrollo sea válido, necesitaremos que $|x(1+y)|<1$.

Veamos por último cómo se manejan, con funciones generatrices, **sistemas de ecuaciones de recurrencia**. Seguiremos el mismo tipo de ideas que siempre: introduciremos una función generatriz por cada sucesión de números involucrada en el sistema. Luego intentaremos traducir el sistema de recurrencias en un sistema de ecuaciones entre esas funciones generatrices. Al resolverlo obtendremos las expresiones de las funciones, y desarrollaremos en serie después.

Ejemplo 10.4.4 *Queremos encontrar las sucesiones de números (a_n) y (b_n) que verifican que, para cada $n \geq 1$,*

$$\left\{\begin{aligned} a_n &= 3\,a_{n-1} + b_{n-1}\,, \\ b_n &= 2\,a_{n-1} + b_{n-1}\,, \end{aligned}\right.$$

junto con las condiciones iniciales $a_0 = 1$, $b_0 = 1$.

Ya vimos en la subsección 6.2.3 cómo resolver estos sistemas mediante lo que llamábamos la matriz de transición. Introduzcamos ahora un par de funciones generatrices asociadas a las sucesiones del problema,

$$\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\,, \qquad \beta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n\,.$$

La primera ecuación, escrita en términos de estas dos funciones, es

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (3a_{n-1} + b_{n-1})\, x^n = 1 + 3x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}\, x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1}\, x^{n-1} \\ &= 1 + 3x \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k + x \sum_{k=0}^{\infty} b_k\, x^k = 1 + x\,\alpha(x) + x\,\beta(x)\,. \end{aligned}$$

Procediendo de manera análoga con la segunda ecuación, llegamos a que las funciones generatrices verifican el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha(x)(1-3x) &= 1 + x\beta(x)\,, \\ \beta(x)(1-x) &= 2x\,\alpha(x)\,. \end{aligned} \right.$$

Resolviendo este sistema obtenemos que

$$\alpha(x) = \frac{1-x}{x^2-4x+1} \qquad \text{y} \qquad \beta(x) = \frac{2x}{x^2-4x+1}\,.$$

Ya sólo queda desarrollar en serie de potencias ambas funciones para obtener la solución del problema:

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3})^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6}(2-\sqrt{3})^n \right) x^n \\ \beta(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2+\sqrt{3})^n - \frac{\sqrt{3}}{3}(2-\sqrt{3})^n \right) x^n \end{aligned}$$

Los coeficientes de $\alpha(x)$ y de $\beta(x)$ son, respectivamente, los a_n y b_n que satisfacen el sistema de ecuaciones. ♣

10.5. Otras aplicaciones

La utilidad de las funciones generatrices no se limita a la resolución de ecuaciones de recurrencia. Se prestan también al cálculo de sumas (ya hemos visto algún ejemplo de ello), al de medias, desviaciones estándar (en general, momentos de una sucesión de números; estos cálculos los veremos en detalle, y con el lenguaje probabilístico correspondiente, en la sección 10.6); e incluso permiten entender de otra manera el principio de inclusón/exclusión (y versiones más generales de él). Veámoslo.

10.5.1. Cálculo de sumas

Ya hemos visto cómo evaluar, mediante funciones generatrices, las sumas

$$\sum_{k=0}^{n} k, \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2;$$

y los métodos utilizados nos permitirían calcular también la suma de los primeros cubos, potencias cuartas, etc. Pero lo habíamos hecho aprovechando la forma especial de estas sumas y el conocimiento de algunas propiedades de las funciones generatrices.

Veamos un procedimiento más general: tratamos de obtener el valor de unos números a_n definidos a través de una suma

$$a_n = \sum_{k} b_{kn}\,.$$

Los b_{kn} son expresiones que dependen del índice de sumación k y que podrían depender también de n (incluso los límites de sumación podrían depender de n). El procedimiento general consta de varios pasos:

1. Construimos la función que genera los a_n: $f(x) = \sum_{n} a_n\, x^n\,;$
2. que reescribimos como: $f(x) = \sum_{n} \left(\sum_{k} b_{kn} \right) x^n.$
3. El siguiente paso consiste en intercambiar el orden de las sumas (probablemente habrá que tener cuidado con los límites de sumación):
$$f(x) = \sum_{k} \sum_{n} b_{kn}\, x^n.$$
4. Intentamos evaluar la suma interior y obtener una cierta función, que probablemente dependerá de k; la llamamos $g_k(x)$:
$$f(x) = \sum_{k} g_k(x).$$
5. Y ahora intentamos evaluar la suma de funciones y obtener así una expresión para $f(x)$.
6. El último paso es, por supuesto, desarrollar en serie la función $f(x)$ para obtener los a_n, sus coeficientes.

Ejemplo 10.5.1 *Calculemos de nuevo la conocida suma* $a_n = \sum_{k=0}^{n} k$*.*

Llamemos $f(x)$ a la función asociada,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} k \right) x^n.$$

Ahora querríamos cambiar el orden de sumación. Aquí estamos sumando primero en k, donde $0 \leq k \leq n$ y luego en n, con $0 \leq n \leq \infty$. Y queremos hacerlo en orden inverso: sumaremos primero en n (y, por tanto, el índice n deberá cumplir que $k \leq n \leq \infty$) y luego en k, con $0 \leq k \leq \infty$. Obtenemos por el camino una serie de potencias que sabemos sumar:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k \sum_{n=k}^{\infty} x^n = \sum_{k=0}^{\infty} k\, x^k \sum_{n=k}^{\infty} x^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} k\, x^k \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} k\, x^k .$$

De nuevo esta serie de potencias es conocida, es la que obtenemos al aplicar $x\, d/dx$ a la serie básica $1/(1-x)$; así que

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} k\, x^k = \frac{1}{1-x}\, x \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^3} .$$

Una vez obtenida una expresión explícita de $f(x)$, la desarrollamos en serie de potencias (es una de las que sabemos hacer):

$$\frac{x}{(1-x)^3} = x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3-1}{3-1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} x^{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+1}{2} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+1}{2} x^k.$$

De donde deducimos que $a_k = \binom{k+1}{2} = \dfrac{k(k+1)}{2}$, como ya sabíamos. ♣

Ejemplo 10.5.2 *Vayamos ahora con la suma de los primeros n cuadrados.*

Si llamamos $a_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$, consideramos la función generatriz $f(x)$ asociada y seguimos los pasos habituales:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} k^2\, x^n = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \sum_{n=k}^{\infty} x^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2\, x^k \sum_{n=k}^{\infty} x^{n-k} = \frac{1}{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} k^2\, x^k = \frac{1}{1-x}\, \frac{x+x^2}{(1-x)^3} . \end{aligned}$$

Ahora sólo resta desarrollar f en serie de potencias:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+x^2) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{3+n}{3} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{3+n}{3} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{3+n}{3} x^{n+2} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \binom{2+j}{3} x^j + \sum_{j=2}^{\infty} \binom{1+j}{3} x^j = 0 + x + \sum_{j=2}^{\infty} \left(\binom{2+j}{3} + \binom{1+j}{3} \right) x^j . \end{aligned}$$

Tras unas cuantas simplificaciones, llegamos a que

$$a_n = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} ,$$

nuestro bien conocido resultado. ♣

Ejemplo 10.5.3 *Calculemos las siguientes sumas (algo más complicadas):*

$$a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{2k} 2^{n-k}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Observemos que la suma llega, en realidad, hasta $k = n$, pero la presencia de los coeficientes binómicos nos permite extenderla hasta infinito (y, de paso, nos facilita las cosas a la hora de intercambiar órdenes de sumación):

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{2k} 2^{n-k} \right) x^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{2k} 2^n\, x^n = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n+k}{2k} (2x)^n. \end{aligned}$$

Queremos estimar la suma en n; si el coeficiente binómico tuviera $2k$ arriba, casi lo tendríamos, porque conocemos el siguiente desarrollo (recordemos el ejemplo 10.1.4):

$$\frac{1}{(1-2\,x)^{2\,k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2\,k}{2\,k} (2x)^n\,.$$

Será cuestión de hacer que aparezca ese $2k$ arriba, y a ver qué pasa. Y pasa algo bueno:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{2k+n-k}{2k} (2x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\, (2x)^k \sum_{n=k}^{\infty} \binom{2k+n-k}{2k} (2x)^{n-k} \overset{n-k=j}{=} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\, (2x)^k \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+2k}{2k} (2x)^j = \sum_{k=0}^{\infty} x^k\, \frac{1}{(1-2x)^{2k+1}} \\ &= \frac{1}{(1-2x)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{(1-2x)^2} \right)^k = \frac{1}{(1-2x)}\, \frac{1}{1-\frac{x}{(1-2x)^2}} = \frac{1-2x}{(1-4x)(1-x)}. \end{aligned}$$

Ya tenemos la expresión de f (la hemos escrito separando las raíces del polinomio del numerador). Sólo resta desarrollarla en serie, para lo que utilizamos fracciones simples:

$$f(x) = \frac{1-2x}{(1-4x)(1-x)} = \frac{2/3}{1-4x} + \frac{1/3}{1-x} = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (4x)^n + \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\, 4^n + \frac{1}{3} \right) x^n.$$

Identificando los coeficientes de f como los a_n, terminamos:

$$a_n = \frac{2}{3}\, 4^n + \frac{1}{3} = \frac{2^{2n+1}+1}{3}.$$

♣

10.5.2. Prueba de identidades

La idea de este uso de las funciones generatrices es también sencilla: tenemos unos ciertos números a_n y otros b_n, y queremos probar que, en realidad, son los mismos. Lo que haremos es construir las funciones generatrices asociadas a cada una de las sucesiones: si probamos que son la misma función, sus coeficientes han de coincidir. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 10.5.4 *Los números de Fibonacci satisfacen la siguiente relación:*

$$F_0 + F_1 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1 \qquad \textit{para cada } n \geq 0.$$

Esta identidad aparecía ya en el ejercicio 6.3.3 y, desde luego, se puede probar por inducción y utilizando la ecuación de recurrencia que satisfacen los números de Fibonacci, como allí proponíamos.

Pero aquí lo haremos utilizando funciones generatrices. Recordemos que $x/(1-x-x^2)$ es la función generatriz de los $\{F_n\}$. Y ahora nos preguntamos por la función generatriz de los números $b_n = F_0 + F_1 + \cdots + F_n$, la suma de los n primeros términos de la sucesión de Fibonacci. Es sencillo obtenerla, basta multiplicar la de los números de Fibonacci por la serie básica $1/(1-x)$:

$$F_0 + F_1 + \cdots + F_n = \mathrm{Coef}_n\left[\frac{1}{1-x}\,\frac{x}{1-x-x^2}\right].$$

¿Cómo podemos escribir el miembro de la derecha, $F_{n+2} - 1$, en términos de funciones generatrices? Con la ayuda de la Regla 3, podemos describir F_{n+2} como el coeficiente $n-$ésimo de una cierta función, al menos si $n \geq 2$:

$$F_{n+2} = \mathrm{Coef}_{n+2}\left[\frac{x}{1-x-x^2}\right] = \mathrm{Coef}_n\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{1-x-x^2} - (F_0 + F_1 x)\right)\right] = \mathrm{Coef}_n\left[\frac{1+x}{1-x-x^2}\right]$$

En cuanto al 1, podemos interpretarlo como el coeficiente $n-$ésimo de la serie básica. Así llegamos a que

$$F_{n+2} - 1 = \mathrm{Coef}_n\left[\frac{1+x}{1-x-x^2} - \frac{1}{1-x}\right] = \mathrm{Coef}_n\left[\frac{x}{(1-x-x^2)\,(1-x)}\right].$$

Quizás necesitamos comprobar por separado los casos $n = 0$ y $n = 1$; comprobaríamos así que ambos miembros son el coeficiente n-ésimo de la misma función. Por tanto, son el mismo número. ♣

Ejemplo 10.5.5 *Otra identidad para los números de Fibonacci.*

La identidad a la que nos referimos es la siguiente:

$$F_{n+1} = \sum_{k\geq 0}\binom{n-k}{k} = \sum_{k\geq 0}\binom{k}{n-k} \quad \text{para cada } n \geq 0.$$

La identidad de la izquierda ya la hemos visto en varias ocasiones; y obtuvimos una prueba combinatoria en la subsección 6.3.6. Por cierto, ambas sumas tiene un aspecto parecido, aunque tiene intercambiados los índices de los coeficientes binómicos involucrados. Lo que vamos a probar es que, en ambas sumas, estamos sumando los mismos coeficientes binómicos, aunque en un orden distinto.

Por un lado,

$$F_{n+1} = \text{Coef}_{n+1}\left[\frac{x}{1-x-x^2}\right] = \text{Coef}_n\left[\frac{1}{1-x-x^2}\right].$$

Las sumas las abordamos a la manera de la subsección 10.5.1. Escribamos primero las dos siguientes funciones generatrices, que aparecerán durante los cálculos:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty}\binom{j}{k}x^j &= x^k\sum_{j=k}^{\infty}\binom{j}{k}x^{j-k} = x^k\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+k}{k}x^m = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}\,,\\
\sum_{j=0}^{\infty}\binom{k}{j}x^j &= (1+x)^k\,.
\end{aligned}$$

Nótese la diferencia entre que el índice de sumación j esté arriba o abajo en el coeficiente binómico.

Vamos con la primera suma:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n-k}{k}x^n = \sum_{k=0}^{\infty}x^k\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n-k}{k}x^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty}x^k\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m}{k}x^m\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}x^k\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \frac{1}{1-x}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{1-x}\right)^k = \frac{1}{1-x}\,\frac{1}{1-x^2/(1-x)} = \frac{1}{1-x-x^2}\,.
\end{aligned}$$

Y para la segunda suma,

$$\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k}{n-k}x^n = \sum_{k=0}^{\infty}x^k\sum_{n=k}^{\infty}\binom{k}{n-k}x^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty}x^k\sum_{m=0}^{\infty}\binom{k}{m}x^m\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}x^k\,(1+x)^k = \sum_{k=0}^{\infty}[x\,(1+x)]^k = \frac{1}{1-x\,(1-x)} = \frac{1}{1-x-x^2}\,.
\end{aligned}$$

Así que las tres cantidades son, después de todo, la misma. ♣

EJERCICIOS.

10.5.1 *Sea a_n el número de listas con símbolos $\{0,1,2,3\}$ que tienen un número impar de ceros. Probar que $a_{n+1} = 2a_n + 4^n$ para cada $n \geq 1$. Utilizando funciones generatrices deducir que $a_n = \frac{1}{2}(4^n - 2^n)$.*

Sugerencia. Definir b_n como el número de n-listas con $\{0,1,2,3\}$ con un número par (o cero) de ceros. Clasificar las listas que cuenta a_n según el símbolo que lleven en la última posición y utilizar que todas las listas posibles son de un tipo (de las que cuenta a_n) o del otro (de las de b_n).

10.5.2 *Consideremos la sucesión de números $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ que satisface la recurrencia:*

$$a_n = a_{n-2} + \binom{100}{n}, \qquad n \geq 2,$$

junto con las condiciones iniciales $a_0 = 1$ y $a_1 = 100$.

(a) Calcular la función generatriz de esta sucesión.

(b) Calcular a_{200}.

Sugerencia. Para el segundo apartado, calcular una expresión para un a_n general; y luego evaluar en $n = 200$.

Solución. (*a*) $f(x) = \frac{(1+x)^{99}}{1-x}$ (*b*) $a_{200} = \sum_{j=0}^{99} \binom{99}{j} = 2^{99}$.

10.5.3 *Sea $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x dx, \ n \geq 0$.*

(a) Obtener que $I_n = e - nI_{n-1}, n \geq 1$ y que $I_0 = e - 1$.

(b) Considerar J_n definido por $J_n = (-1)^{n+1} \frac{I_n}{n!\, e}$ y verificar que $J_n = J_{n-1} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n!}, n \geq 0$.

(c) Obtener de (b) una fórmula para J_n y deducir la correspondiente fórmula para I_n.

Sugerencia. Para obtener la recurrencia, integrar por partes.

Solución. $J_n = \frac{1}{e} - \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$, $\quad I_n = n!\,(-1)^{n+1} + e\, n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{j+n}}{j!}$

10.5.4 *Para cada $k \geq 0$, llamemos $b(n,k)$ al número de subconjuntos de $\{1,2,\ldots,n\}$ de tamaño k que no contienen enteros consecutivos. Probar que*

$$b(n,k) = b(n-2,k-1) + b(n-1,k).$$

Sea $F_k(x)$ la función generatriz de los $b(n,k)$ para cada k fijo. Hallar una recursión para $F_k(x)$ y deducir:

$$b(n,k) = \binom{n-k+1}{k}.$$

Sugerencia. Para la recurrencia de los $b(n,k)$, distinguir, por ejemplo, entre los subconjuntos que contienen a n y los que no. Para la recurrencia de las $F_k(x)$ hay que tener cuidado con los índices pequeños, $k=0,1$. El resultado es

$$\begin{aligned} F_0(x) &= \frac{1}{1-x} \\ F_1(x) &= \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x}F_0(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \\ F_k(x) &= \frac{x^2}{1-x}F_{k-1}(x), \qquad \text{si } k \geq 2. \end{aligned}$$

Es fácil entonces obtener que

$$F_k(x) = \frac{x^{2k-1}}{(1-x)^{k+1}},\ k \geq 1 \quad F_0(x) = \frac{1}{1-x},$$

Y desarrollar las $F_k(x)$ es ya sencillo.

10.5.5 *Sea* $\mathcal{U}_r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} S(n,r)x^n$.

(a) *Probar que* $\mathcal{U}_r(x) = x\mathcal{U}_{r-1}(x) + rx\mathcal{U}_r(x)$.

(b) *Resolver la recurrencia y, utilizando fracciones simples, verificar que*

$$\mathcal{U}_r(x) = x^r \prod_{j=1}^{r} \frac{1}{1-jx} = x^r \sum_{j=1}^{r} \frac{\gamma_j}{1-jx},$$

donde los coeficientes γ_j *son*

$$\gamma_j = (-1)^{r-j} \frac{j^{r-1}}{(j-1)!\,(r-j)!}\,.$$

(d) *Deducir de lo anterior la fórmula de* $S(n,r)$.

Sugerencia. Para el apartado (a), utilizar la recurrencia que satisfacen los números de Stirling.

Solución. $S(n,r) = \sum_{j=1}^{r}(-1)^{r-j}\frac{j^n}{j!\,(r-j)!}$.

10.5.6 *Sea* $\mathcal{S}_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} S(n,r)x^r$. *Probar que* $e^x\,\mathcal{S}_n(x) = \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\frac{r^n}{r!}x^r$.

Sugerencia. Usar el ejercicio anterior y considerar $e^{-x}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{r^n}{r!}x^r$

10.5.7 *Sea* $b(n)$ *el* n*-ésimo número de Bell, esto es, el número de particiones en bloques no vacíos del conjunto* $\{1,2,\ldots,n\}$. *Deducir de cualquiera de los dos ejercicios anteriores que*

$$b(n) = \frac{1}{e}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j^{n-1}}{(j-1)!},\ n \geq 1\,.$$

Sugerencia. Observar que b_n coincide con $S_n(1)$ (ver ejercicio anterior).

10.5.8 *Con la notación del ejercicio anterior, y conviniendo que $b(0) = 1$, demostrar que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b(n)}{n!} x^n = \exp\left(e^x - 1\right).$$

Sugerencia. Utilizar la expresión para los números de Bell del ejercicio anterior e intercambiar el orden de las sumas.

10.5.9 *Fijemos un número natural m y definamos*

$$a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k}\binom{n+k}{m} \qquad y \qquad b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k}\binom{n}{k} 2^k.$$

Demostrar que $a_n = b_n$ para todo $n \geq 1$.

Sugerencia. Probar que ambas sucesiones tienen la misma función generatriz, $f(x) = \frac{(1+x)^m}{(1-x)^{m+1}}$.

10.5.10 *Dadas dos sucesiones $\{a_r\}_{r=0}^{\infty}$ y $\{b_s\}_{s=0}^{\infty}$, demostrar que si para cada $r \geq 0$,*

$$a_r = \sum_{s=0}^{\infty} \binom{s}{r} b_s, \qquad \text{entonces, para cada } n \geq 0, \qquad b_n = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m}{n} (-1)^{m-n} a_m.$$

Sugerencia. Escribir la función generatriz de los a_r y conseguir relacionarla con la de los b_n; invertir luego esa relación.

10.5.11 *Consideremos la colección de todas las aplicaciones de un conjunto X de n elementos en un conjunto Y de n elementos. Demostrar que el número medio de elementos en la imagen de una tal aplicación es*

$$n - \frac{n(n-1)^n}{n^n}$$

y que, por consiguiente, para n grande ese número medio es aproximadamente $n\left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

Sugerencia. Escribir el problema en términos de los $\{\beta_t\}$ que se vieron en teoría.

10.5.12 *Resolver la recurrencia $a_k = a_{k-1} + \sum_{j=1}^{k-1} a_j + 1$, para cada $k \geq 2$ (la condición inicial es $a_1 = 1$).*

Sugerencia. Observar que al intentar traducir la información de la recurrencia en la función generatriz asociada, obtenemos una suma infinita de funciones, que afortunadamente sabemos estimar.

Solución. $a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$

10.5.13 *Resolver la siguiente relación de recurrencia (condición inicial $A_0 = 1$):*

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} k A_{n-k} \qquad , n \geq 1.$$

Solución. $A_n = \frac{\sqrt{5}+5}{10}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}-5}{10}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

10.5.14 *Para cada $n \geq 0$, sea α_n el número de listas de longitud n (con repetición permitida) que se pueden formar con los símbolos $\{a, b, c, d\}$ de manera que haya un cantidad par de a's y una cantidad impar de b's (y ninguna restricción sobre el número de c's o de d's).*

(a) *Comprobar que* $a_n = \displaystyle\sum_{\substack{m_1+m_2+m_3+m_4=n \\ m_1 \text{ par, } m_2 \text{ impar}}} \frac{n!}{(m_1!)(m_2!)(m_3!)(m_4!)}$.

(b) *Deducir que* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n = \frac{e^{4x}-1}{4}$.

(c) *Concluir que* $a_n = 4^{n-1}$ *para cada* $n \geq 1$.

Sugerencia.