CAPITULO 5:

SISTEMA DIÉDRICO: DISTANCIAS Y ÁNGULOS

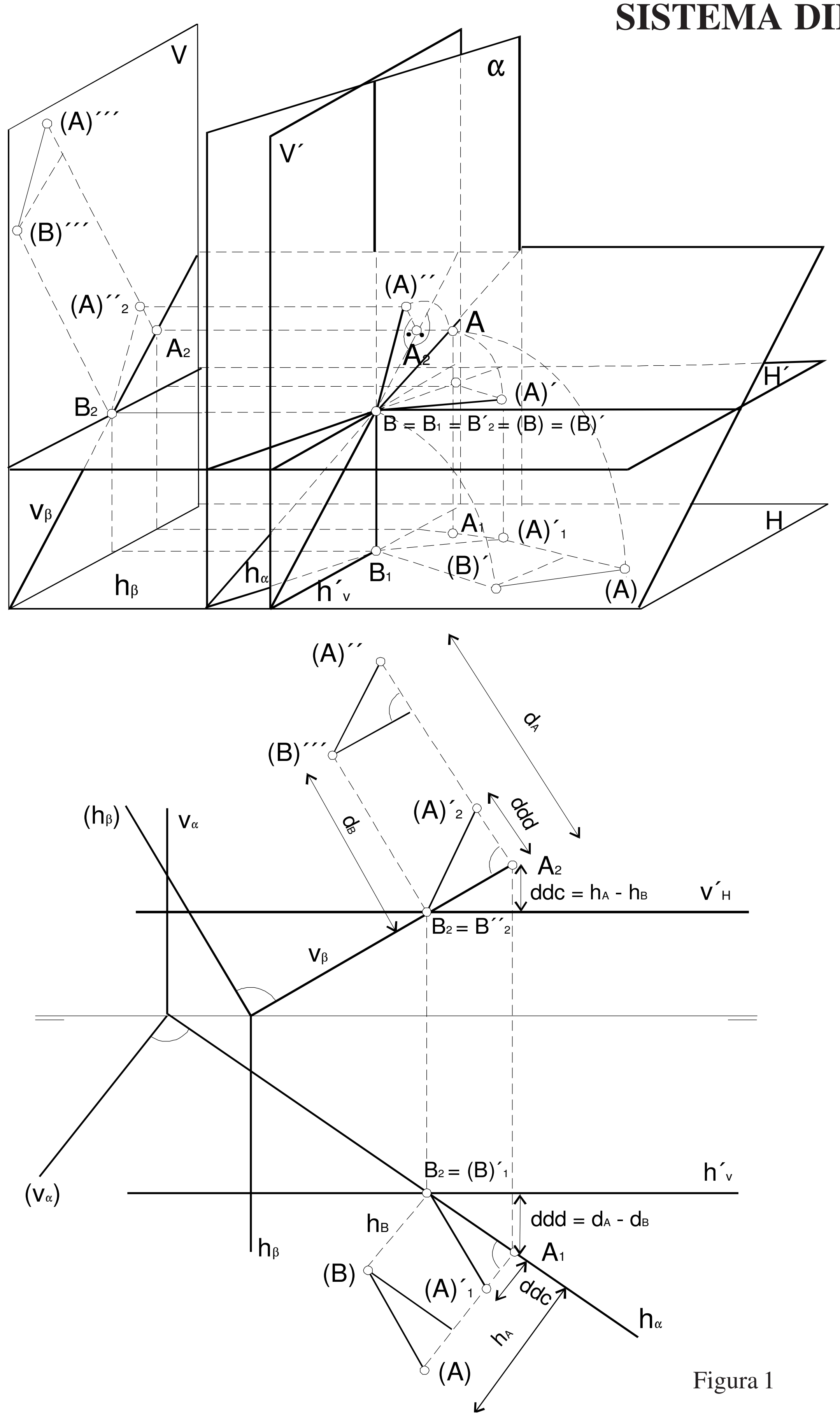


Figura 1

Distancias entre dos puntos.

Distancia entre dos puntos es la longitud del segmento que los une. En la figura 1 se muestran los múltiples procedimientos con los que podemos medir la distancia entre dos puntos A y B. En todos los casos se trata de llevar la verdadera magnitud del segmento AB bien al plano vertical bien al horizontal. Podemos así abatir sobre V un plano α de canto que contenga al segmento AB. Podemos hacer también este mismo abatimiento sobre V’ paralelo a V y que pase por uno de los puntos (B en la figura). Por otro lado podemos abatir sobre el plano horizontal H -o sobre otro paralelo H’ que pase por B- un plano α de perfil y que contenga al segmento AB.

La representación diédrica de los procesos descritos se muestra en la parte inferior de la misma figura. Nótese que para realizar, por ejemplo, el abatimiento de α sobre H’ basta trazar una recta perpendicular al segmento A_1B_1 que pase por A_1 y tomar desde A_1 la diferencia *ddc* de cotas de A y B. Esto produce el punto $(A)_1'$ y la distancia entre A y B es la misma que queda abatida entre B_1 y dicho punto $(A)_1'$.

Distancia entre entidades.

En general, la *distancia entre dos entidades* es la distancia menor entre los puntos de una y los puntos de la otra. En particular estudiaremos a continuación diferentes casos.

Distancia de un punto A a una recta r es la menor de las distancias del punto A a los puntos de la recta. El punto B de la recta más próximo al punto A puede encontrarse trazando un plano á perpendicular a la recta y que pase por A como se indica en la figura 2. El punto B es la intersección de *r* con á y la distancia de A a la recta es la que hay entre A y B.

Otra forma de encontrar dicha distancia de A a *r* consiste en encontrar el plano α definido por *r* y el punto A. En dicho plano trazamos la recta perpenicular a la recta y que pase por A y queda así determinado el punto B de intersección y por tanto la distancia que buscamos.

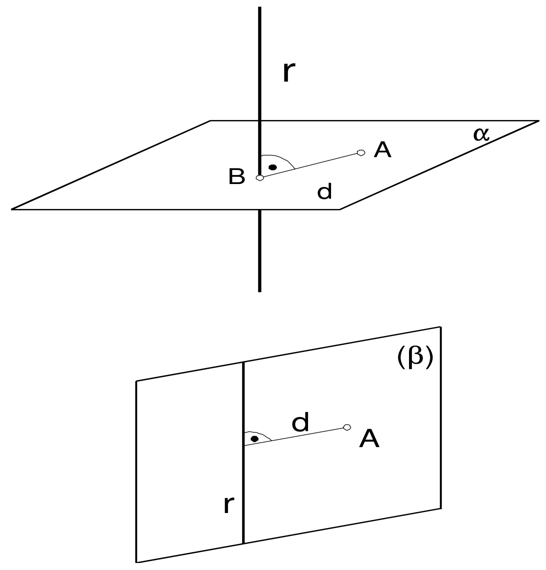


Figura 2

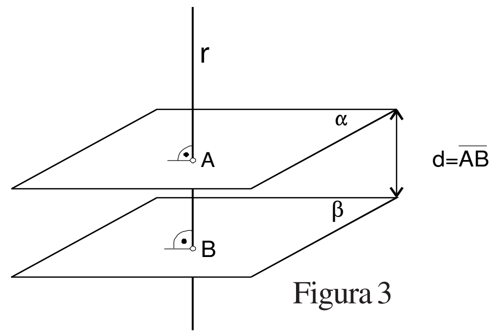


Figura 3

Distancia entre dos planos paralelos α y β es la distancia menor entre un punto cualquiera de un plano y los puntos del otro. Podemos determinarla trazando una recta *r* perpendicular a ambos planos. La distancia será la existente entre las trazas de *r* con los planos como se indica en la figura 3.

Distancia entre dos rectas paralelas r y s es la distancia menor de un punto cualquiera de una consiste en construir un plano perpendicular a ambas rectas. La distancia entre ellas será la distancia entre las trazas de las rectas con dicho plano. El segundo consiste en trazar una recta perpendicular a ambas rectas contenida en el plano que las contiene. La distancia entre las rectas será la longitud del segmento entre sus intersecciones.

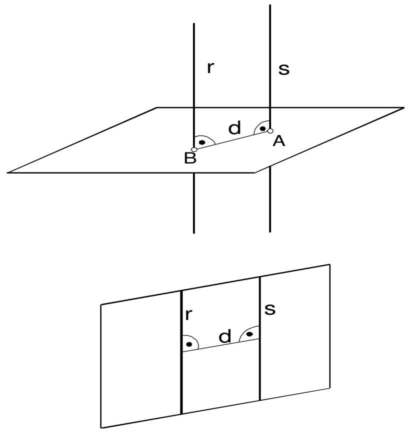


Figura 4

figura 1.3.4.

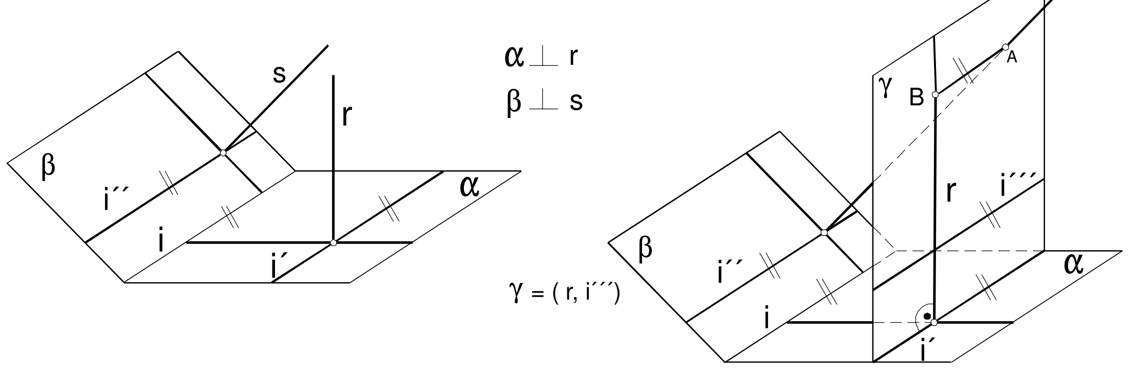
Distancia entre dos rectas r y s que se cruzan es la distancia menor entre los puntos de *r* y los de *s*. Para determinar esta distancia es necesario encontrar la recta perpendicular simultáneamente a ambas rectas, cuyo segmento comprendido entre sus intersecciones con *r* y *s* da la distancia entre las rectas. En la figura 5 se muestran tres procedimientos de encontrar dicha perpendicular común a *r* y *s* que describimos a continuación.

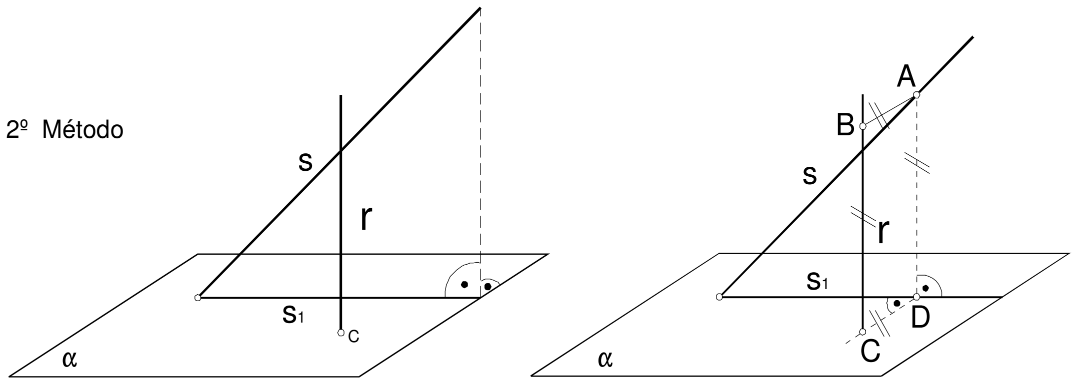
En el primer método se trazan dos planos α y β perpendiculares a *r* y *s* y se encuentra su recta intersección *i*. Se encuentra entonces el plano α definido por la recta *r* y la recta *i'''* paralela a *i* y que pasa por un punto de *r*. Se puede determinar entonces la traza de *s* con γ, punto que llamamos A. La perpendicular común buscada es la recta paralela a *i* que pasa por A, la cual estará incluída en el plano γ y corta a *r* en un punto B. La distancia entre AB es la distancia entre las rectas *r* y *s*.

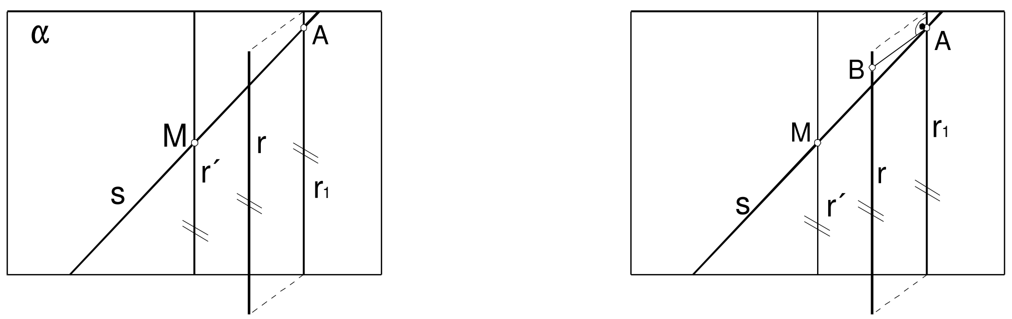
El segundo método consiste en trazar un plano α perpendicular a la recta *r* en un punto C y hallar la proyección ortogonal s_1 de la recta *s* sobre α. En dicho plano determinamos la perpendicular a s_1 que pasa por C y que cortará a s_1 en un punto D. Si por D trazamos una paralela a *r* esta corta a *s* en el punto A por el cual pasa la perpendicular común que será paralela a CD.

El tercer método consiste en trazar una recta *r'* paralela a *r* y que corte a *s* en un punto arbitrario M. Estas dos rectas *s* y *r'* determinan un plano α sobre el cual encontramos la proyección ortogonal r_1 de la recta *r*. Esta proyección r_1 corta a la recta *s* en un punto A por el que pasa la perpendicular común que buscamos y que será perpendicular al plano α.

Figura 5. Perpendicular común a dos rectas que se cruzan







Ángulos

Ángulo plano formado por dos rectas es el cociente entre un arco de circunferencia con centro en la intersección de las rectas y comprendido entre ellas y el radio de dicho arco y es una magnitud adimensional. Se mide en grados (°), dividiendo la circunferencia en 360º; en grados centesimales, dividiendo la circunferencia en 400 grados centesimales; o en radianes, siendo la circunferencia 2π radianes. Decimos que dos ángulos son *suplementarios* si suman 180º. Si dos rectas forman un ángulo, también forman el suplementario, puesto que basta tomar el arco de circunferencia en sentido contrario. Decimos que dos ángulos son *complementarios* si suman 90º.

Llamamos *ángulo de dos rectas r y s'* al ángulo plano que forman ambas rectas si estas se cortan. Si *r* y *s* se cruzan decimos que el ángulo que forman es el mismo que *r* y otra recta *s* paralela a *s'* que corte a *r*. Esto se ilustra en la primera de las figuras 6.

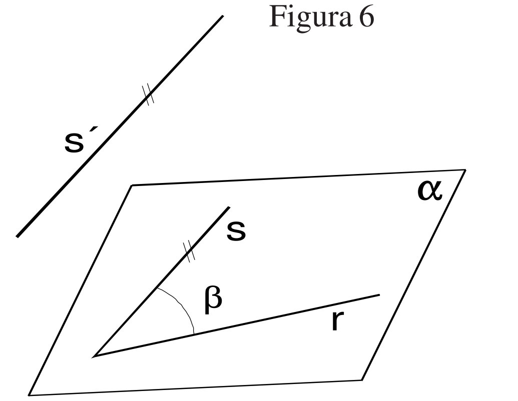
El *ángulo de una recta r con un plano α* es el que forman *r* y r_1, proyección de *r* sobre el plano α.

Ángulo de dos planos α y β es el que forman las trazas *r* y *s* de dichos planos con otro γ perpendicular a ambos. Este ángulo es el suplementario del que forman las rectas *m* y *n* perpendiculares a los planos como se puede observar en la última de las figuras 6.

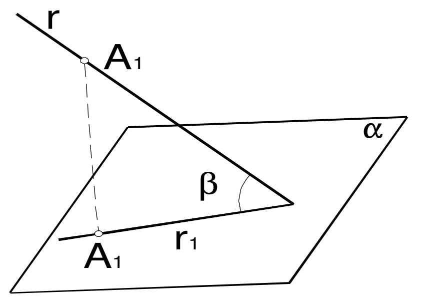
La determinación de ángulos puede hacerse mediante tres procedimientos: cambios de plano, giros y abatimientos. El primero consiste en cambiar de planos de proyección de manera que los elementos entre los cuales queremos medir el ángulo queden en posiciones especiales de forma que el plano en el que queda definido el ángulo sea paralelo a uno de los planos de proyección.

El segundo pretende conseguir lo mismo aplicando una serie de giros simultáneamente a ambos elementos para situarlos en estas posiciones especiales. Dado que los giros se aplican simultáneamente a los dos elementos, el ángulo entre ellos no varía.
El tercer método consiste simplemente en abatir el plano en que está contenido el ángulo para poderlo medir en su verdadera magnitud.

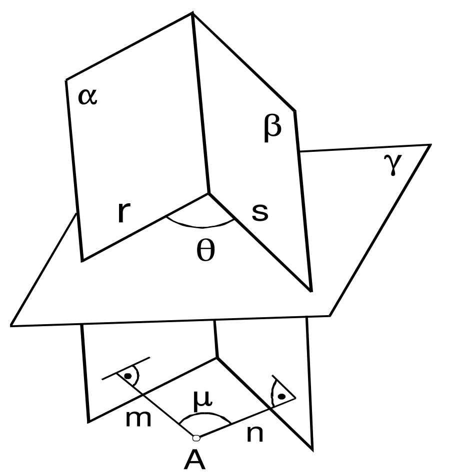
Figura 6



Ángulo de dos rectas



Ángulo de recta y plano



μ + θ = π

Ángulo de dos planos

En la primera figura 7 se muestra un ejemplo del empleo de abatimientos para encontrar los ángulos α y β que forma una recta *r* con los planos horizontal y vertical. Para ello se abate sobre H el plano μ -proyectante sobre el horizontal que contiene al ángulo α . El plano γ -proyectante sobre V y que contiene al ángulo β- se abate sobre el vertical.

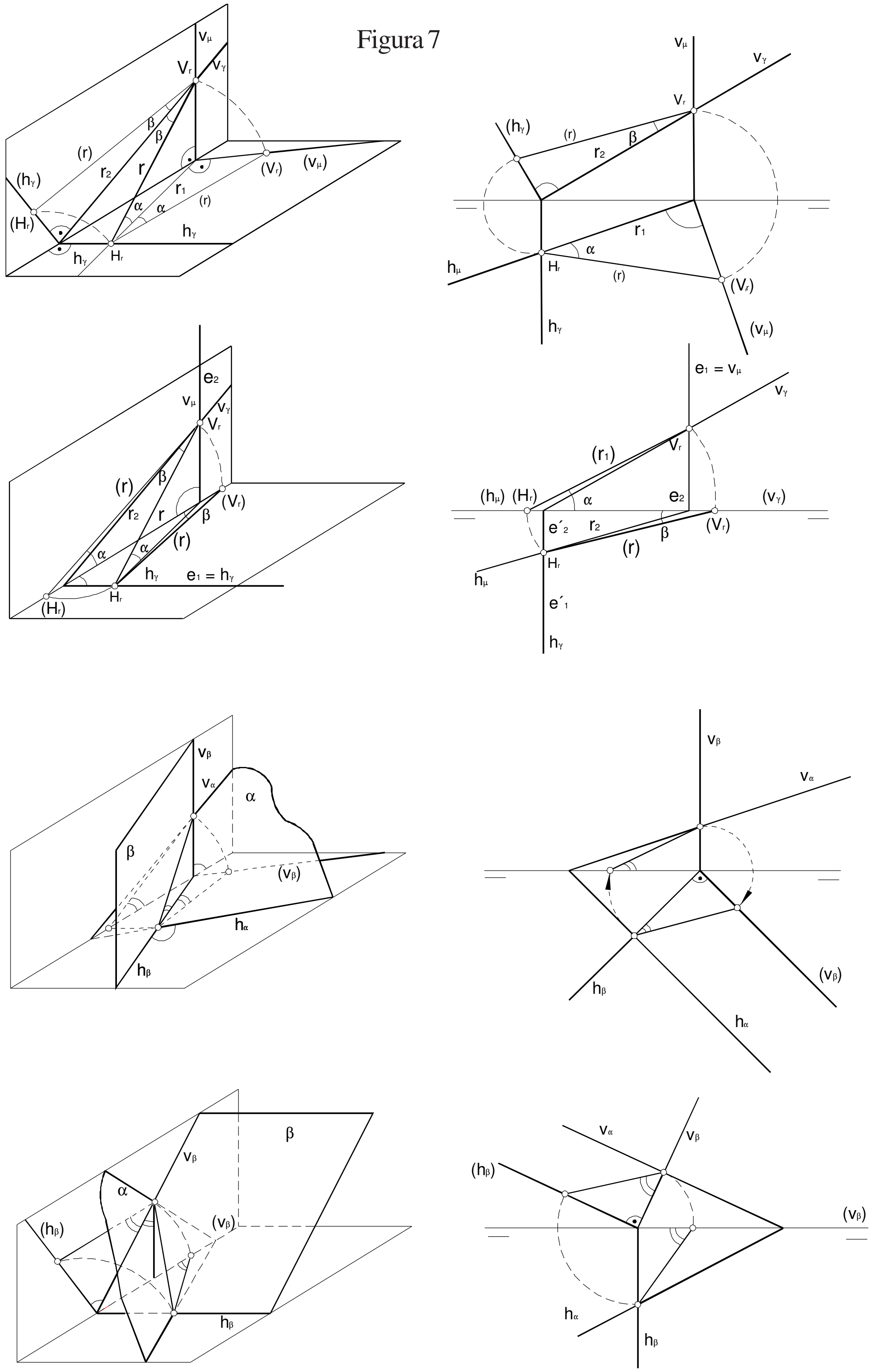


Figura 7

En la segunda figura 7 se emplean giros para encontrar los mismos ángulos. Para encontrar el ángulo α de la recta con el plano H se emplea un giro en torno de un eje vertical que deja el plano horizontal invariante y que lleve a la recta *r* al plano vertical. El ángulo buscado α será entonces el que forme la proyección vertical r_2' de la recta girada. Nótese que la operación es similar a un abatimiento del plano μ sobre el vertical.

En la misma segunda figura de 7 se emplea un giro en torno de un eje de punta para llevar *r* al plano horizontal, midiendo entonces el ángulo α entre la línea de tierra y la proyección horizontal del girado. Este giro es equivalente a un abatimiento del plano γ sobre el horizontal.

El ángulo que forma un plano α con el plano horizontal coincide con el que forma su recta de máxima pendiente con el horizontal. En la tercera figura 7 se muestra el proceso de abatimiento del plano que contiene dicho ángulo, tanto sobre el plano vertical como sobre el horizontal.

De igual forma, el ángulo que forma un plano con el vertical es el ángulo que forma su recta de máxima inclinación con el vertical. En la última figura 7 se muestran los abatimientos del plano que contiene el ángulo tanto sobre el horizontal como sobre el vertical.

Construcción de ángulos.

En ocasiones es necesario construir elementos geométricos que formen ángulos determinados con otros elementos ya dados. Para la resolución de este tipo de problemas es muy útil la construcción de conos regulares puesto que las rectas generatrices de un cono forman todas el mismo ángulo con su base. Además, cualquier recta que forme ese mismo ángulo el plano de la base es paralela a alguna generatriz del cono.

Por otro lado, cualquier plano α que forme un determinado ángulo con otro plano β será tangente a cualquier cono regular con vértice en el plano α, base en el β y cuyas generatrices formen el mismo ángulo con β. Además, la recta de tangencia será recta de máxima pendiente del plano α. Esto se muestra en la figura 8.

La construcción de rectas *r* y planos α que formen un determinado ángulo θ con el plano horizontal y que pasen por un determinado punto V se muestra en la figura 9. Consiste en la construcción de un cono regular con base en el plano horizontal y con vértice en V tal que sus generatrices que formen un ángulo θ con el plano horizontal. Para determinar una sola de las rectas o uno solo de los planos será necesario exigir alguna otra condición como puede ser definir un punto del plano horizontal por el que queramos que pase el plano o dar la dirección de la proyección horizontal de la recta *r*.

Figura 8

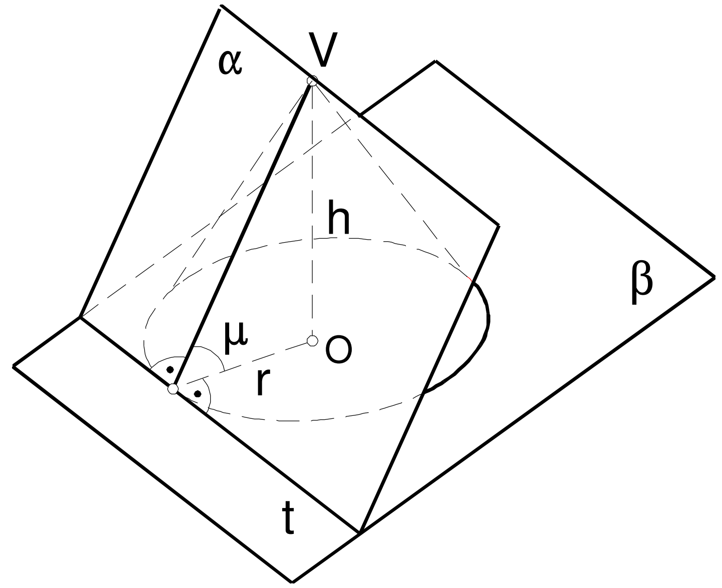
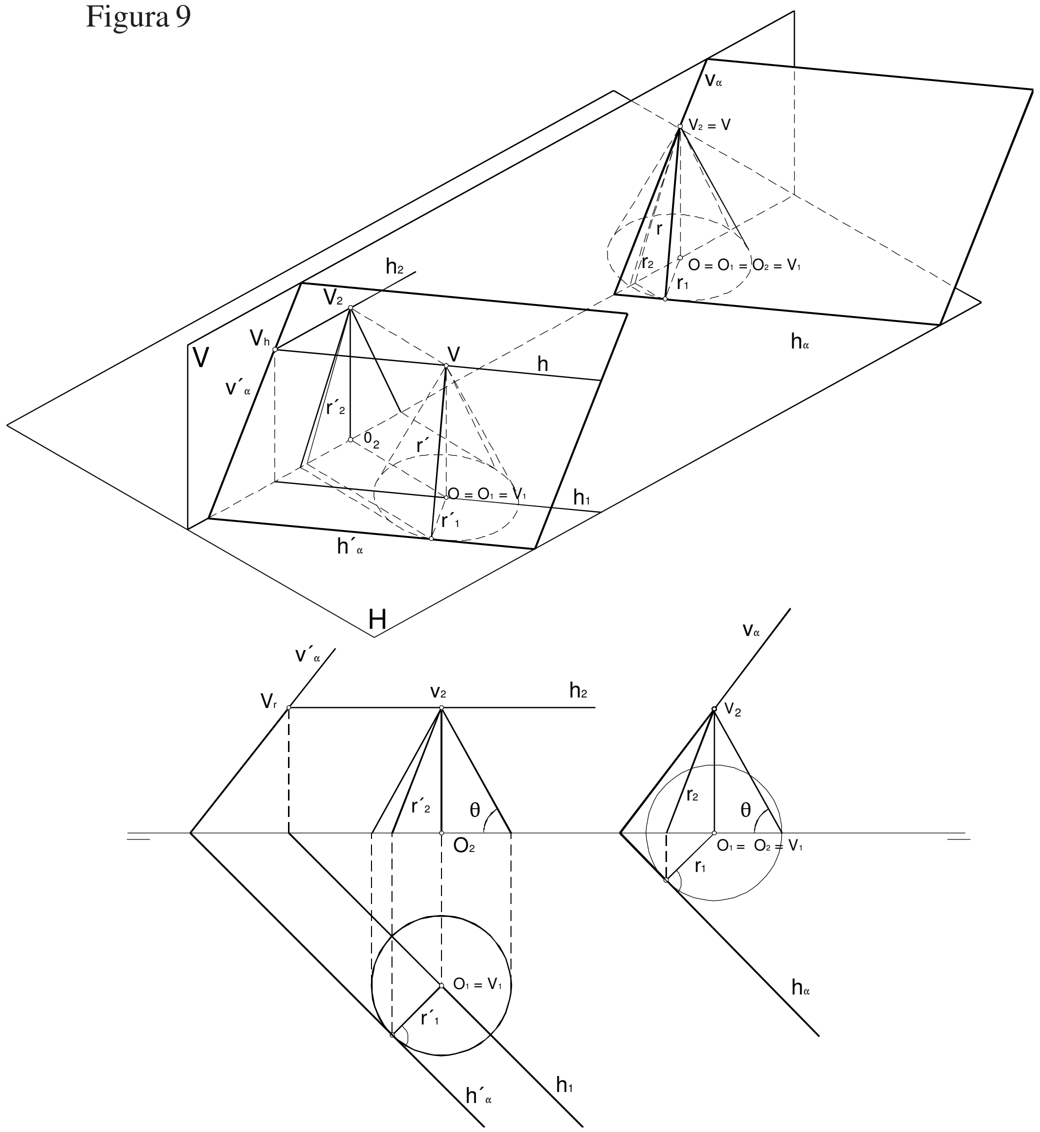


Figura 9



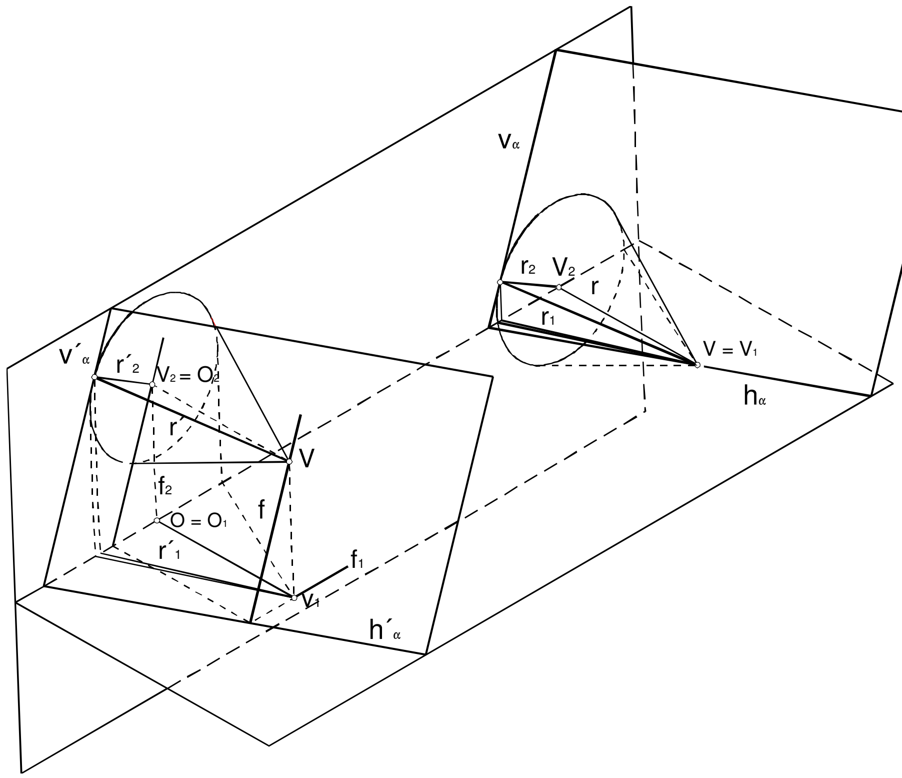
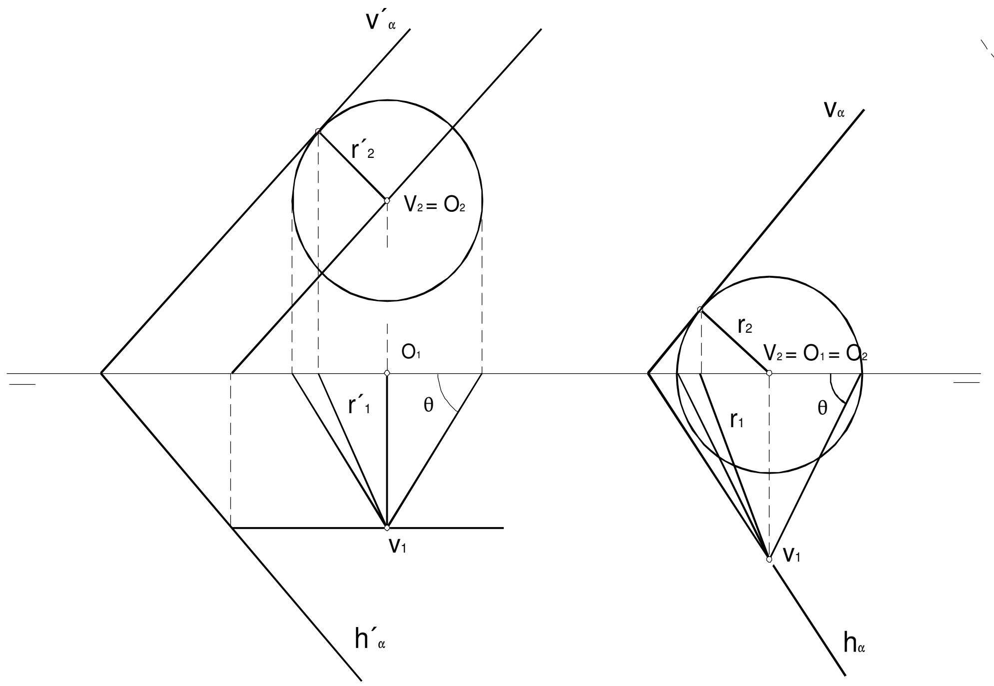
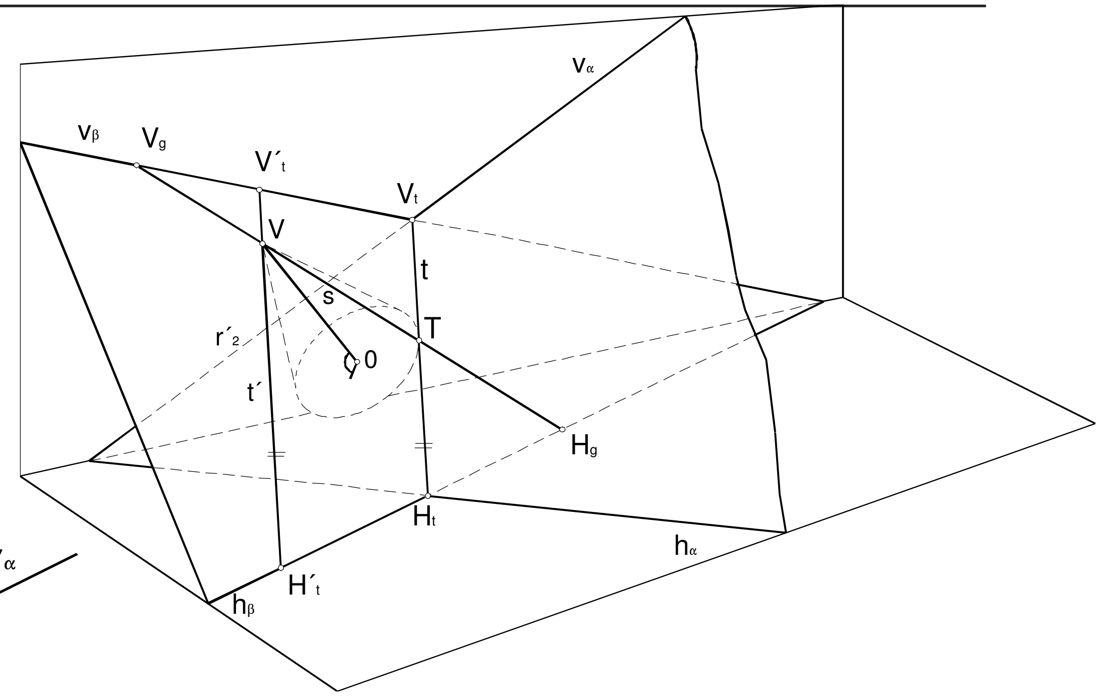


Figura 10



De forma similar se muestra en la figura 10 la construcción de rectas y planos que forman un ángulo θ con el plano vertical de proyección.

Figura 11



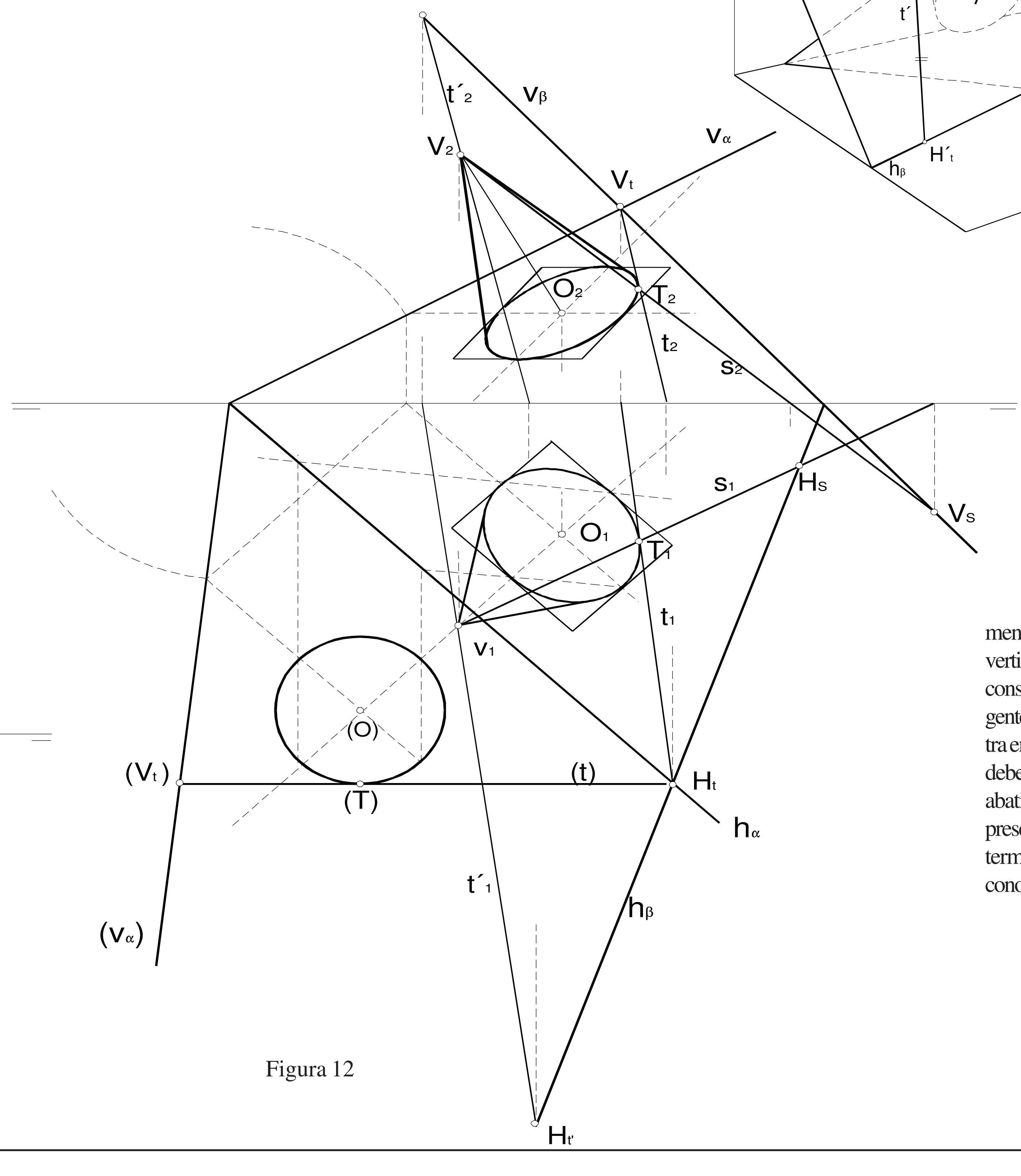


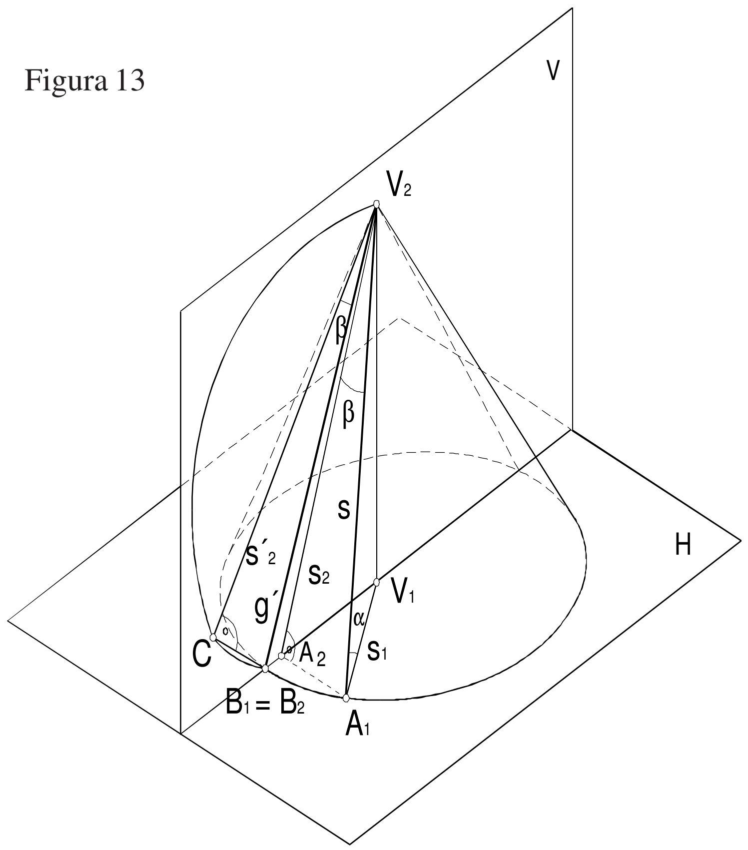
Figura 12

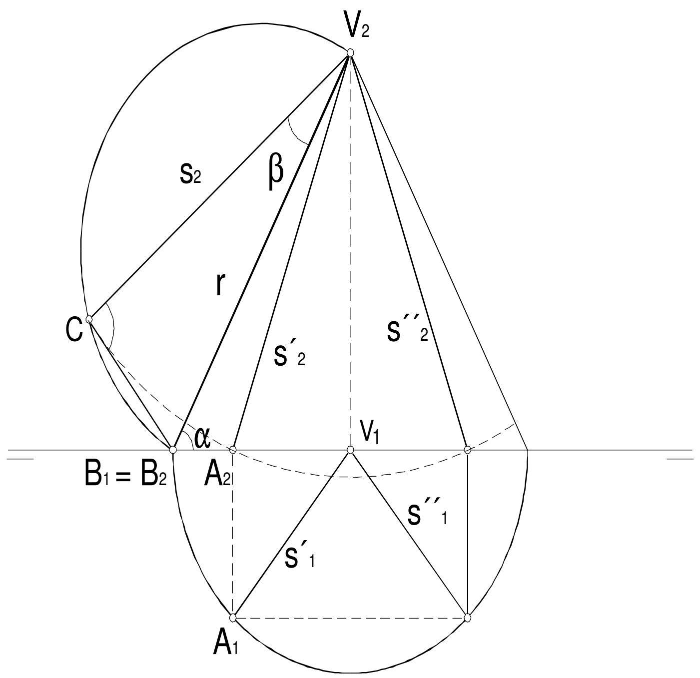
Si las rectas o los planos queremos que formen un ángulo dado no con los planos horizontal o vertical sino con otro plano cualquiera á, entonces la construcción pasará por determinar un plano α tangente a un cono regular con base en β. Esto se muestra en las figuras 11 y 12. Una condición adicional deberá determinar el punto de tangencia en la base abatido sobre el horizontal (T) que, a partir de la representación diédrica de su desabatido, permite determinar el plano β y la recta en que es tangente al cono.

Recta que forma ángulos α con el plano horizontal y β con el vertical.

Para encontrar una recta que forme ángulos α con el horizontal y β con el vertical existen dos métodos. El primero se ilustra en la figura 13. Como se puede observar en la parte superior de dicha figura la recta que buscamos será una generatriz de un cono de rectas que formen ángulo α con el plano horizontal con el vértice en el propio plano vertical. El ángulo β lo formarán la propia recta *s* que buscamos y su proyección vertical s_2. Si abatiésemos el plano que forman sobre el plano en el que está definido el ángulo á tendríamos que *s* y (s_2) forman dicho ángulo β y además (s_2) es perpendicular al segmento $A_1(A_2)$ siendo A la traza horizontal de la recta buscada. Si girásemos en torno del eje del cono esta construcción hasta llevar el plano sobre el que hemos abatido hasta el plano vertical tendríamos el triángulo rectángulo VCB que se puede observar en la figura 13.

Figura 13





Por consiguiente, el proceso para hallar la recta *s* consistirá en trazar una recta *r* que forme un ángulo α con la línea de tierra y que pase por V_2. Cortará a la línea de tierra en el punto B. Esta será la hipotenusa del triángulo rectángulo VCB por lo que, para determinar el punto C, bastará con dibujar una circunferencia de diámetro V_2B con centro en su punto medio y buscar su intersección con una recta que forme un ángulo β con *r*. A continuación, haciendo centro en V_2 tomamos la distancia a C y buscamos los puntos de la línea de tierra que se encuentren a esa misma distancia de V_2. Estos dos puntos serán las proyecciones verticales A_2 de las trazas verticales de las dos rectas solución del problema. Las proyecciones horizontales A_1 se encontrarán en la base del cono y por tanto en una circunferencia con centro en V_1 y radio V_1B. Las proyecciones de las rectas generatrices *s' y s''* se trazan teniendo en cuenta que pasan por V y por A.

El segundo método de encontrar una recta *r* que forme un ángulo α con el plano horizontal H y un ángulo β con el vertical consiste en subtender dos conos regulares con vértice común en un punto V exterior a los planos horizontal y vertical, con bases en estos planos y tales que sus generatrices formen con ellos los ángulos solicitados. La recta buscada será la intersección de ambos conos como se muestra en las figuras 14 y 15 Para hallar esta intersección se emplea una esfera auxiliar *e* con centro en el vértice del cono y de radio arbitrario. En la figura 15 se traza el contorno aparente de la esfera únicamente en el tercer plano de proyección. Esta esfera corta a los dos conos en dos circunferencias C y C' que son fácilmente hallados en el tercer plano de proyección como consecuencia los puntos A y B de intersección de ambos conos y la esfera. Por estos puntos y por el vértice de los conos pasarán las dos rectas solución del problema.

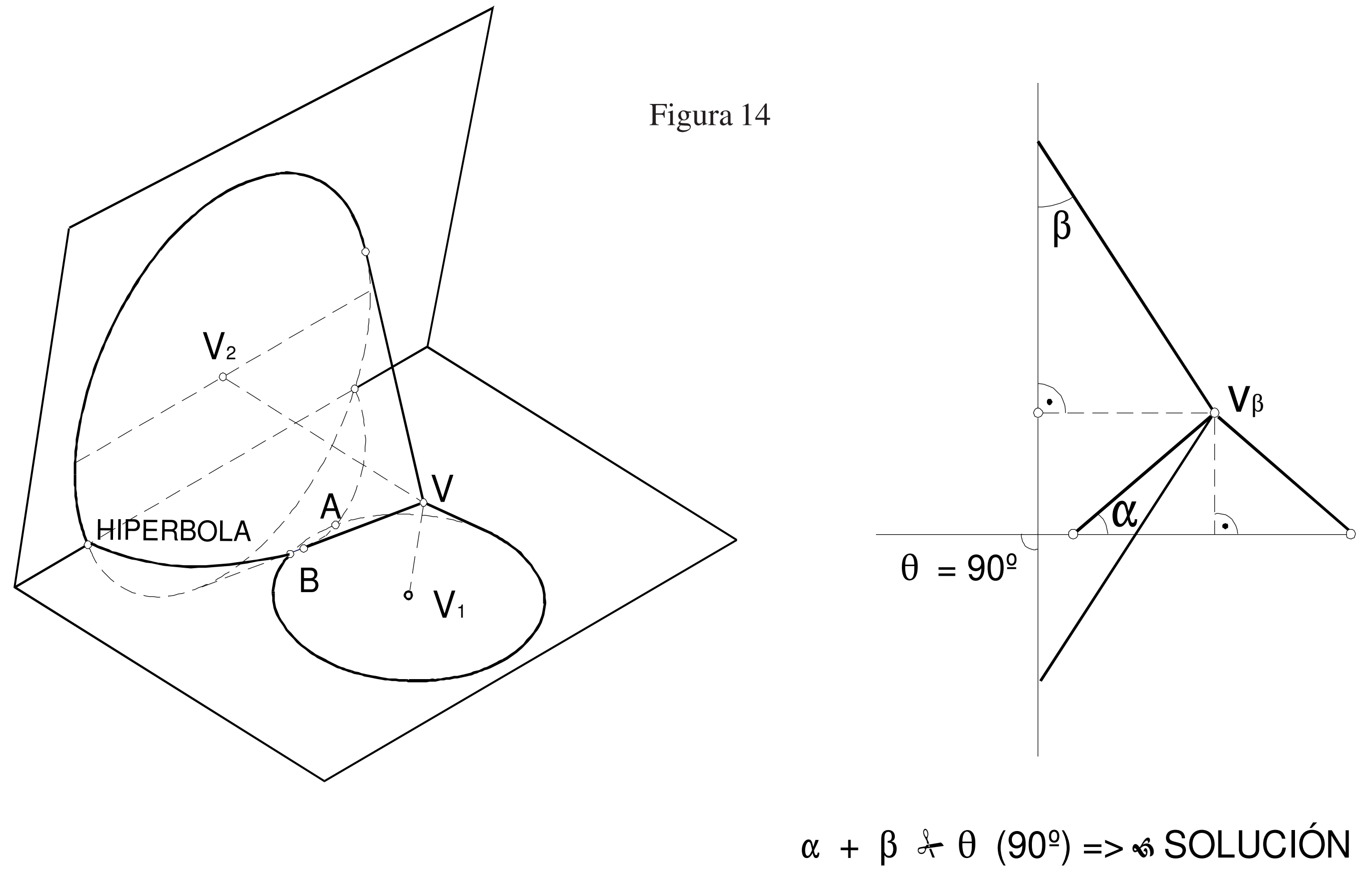


Figura 14

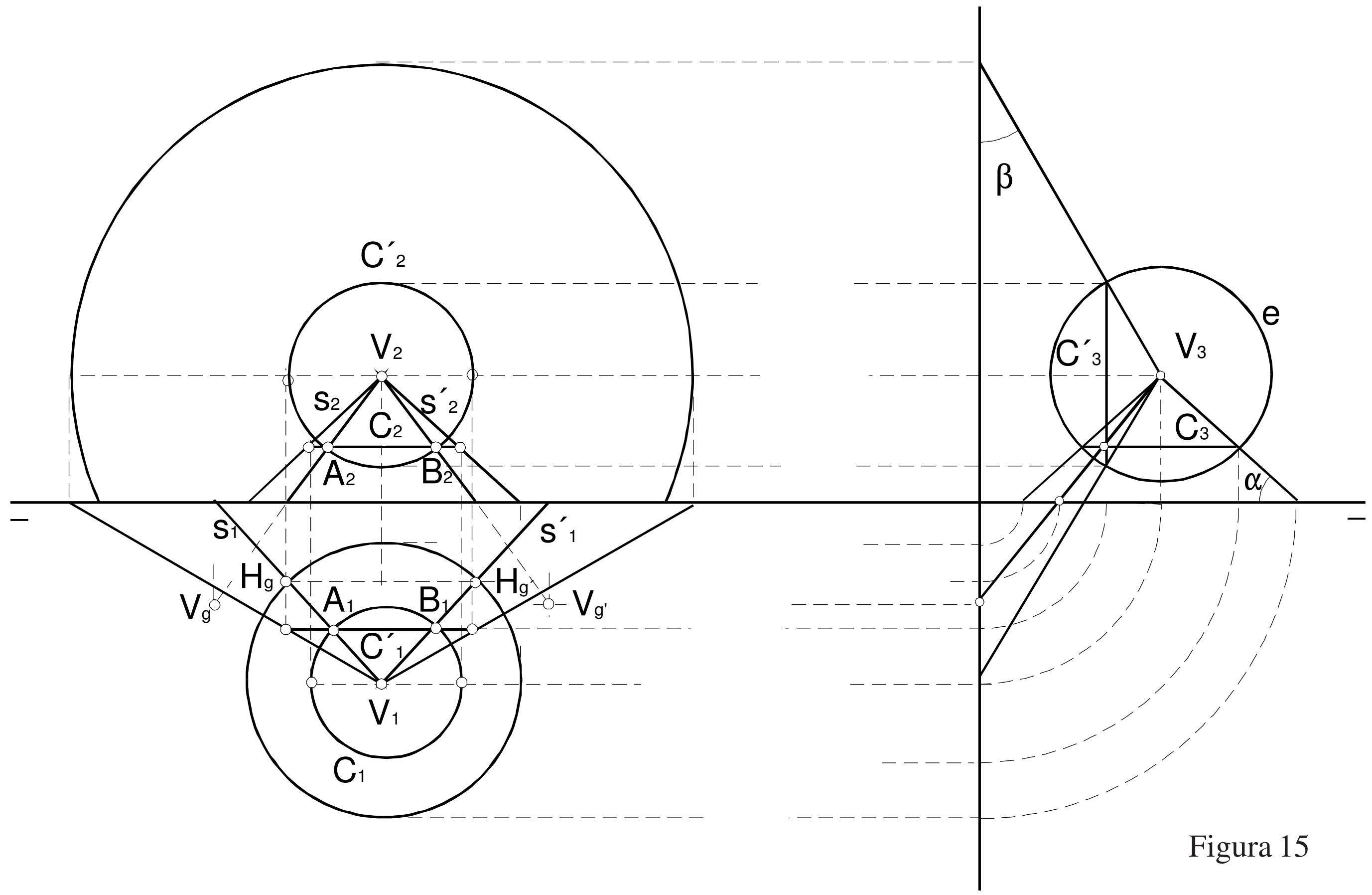


Figura 15

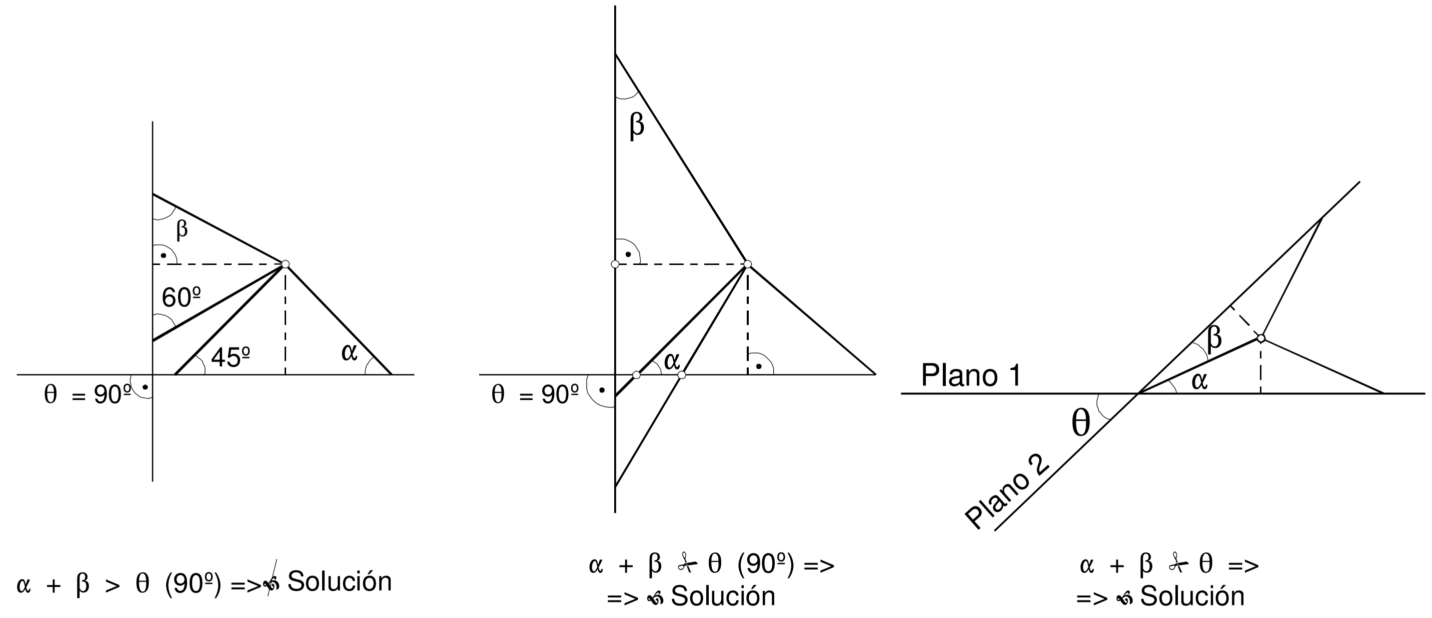
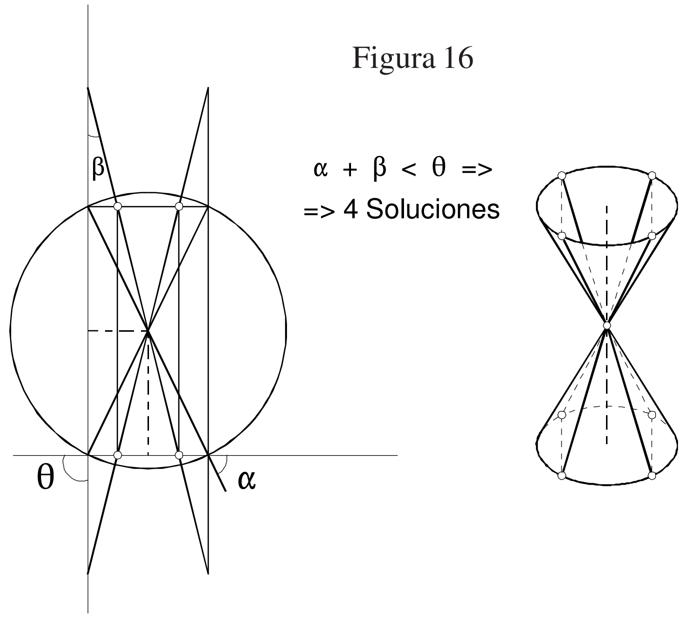
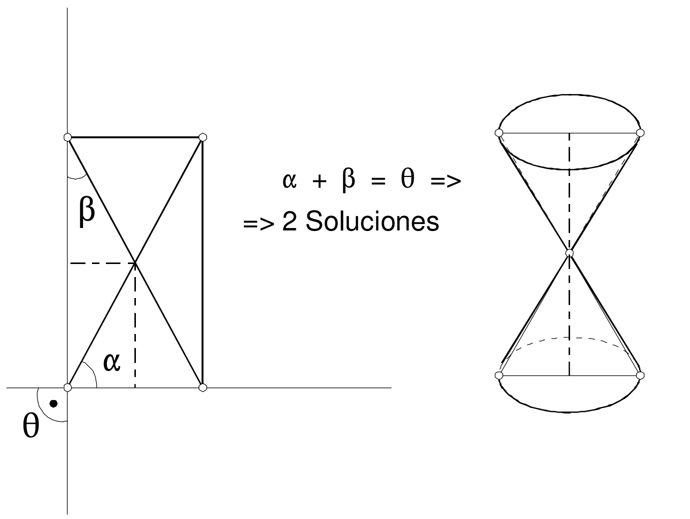


Figura 16





En los dos métodos hemos hablado de dos soluciones del problema, pero en realidad habrá soluciones si $\alpha+\beta$ es menor o igual que 90º y no habrá ninguna solución en caso contrario. Para entenderlo basta observar la parte derecha de la figura 14 y la figura 16, en las cuales se muestra en el tercer plano de proyección los dos conos trazados desde V. Si los planos con los cuales deben formar los ángulos buscados no son el horizontal y el vertical sino dos cualesquiera que formen un ángulo θ habría que poner dicho ángulo en lugar de los 90º.

El número de soluciones si $\alpha+\beta<90º$ es, en general, cuatro. Para comprobarlo basta pensar en realizar el segundo método con el vértice de los conos en el segundo cuadrante o realizar el primer método teniendo en cuenta la semicircunferencia de centro en V_1 que no hemos dibujado anteriormente. Se puede comprobar que en el caso en que $\alpha+\beta=90º$ en general sólo tiene dos soluciones. En ambas situaciones pueden darse casos especiales de solución única como en la primera figura 17 en la que $\alpha=\beta=0º$.

En las figuras 17 se muestran ejemplos de rectas y planos que forman determinados ángulos con los planos horizontal y vertical de proyección. Se indican los ángulos α y β que forma la recta r y los ángulos ϕ y θ que forma el plano π con los planos horizontal y vertical de proyección.

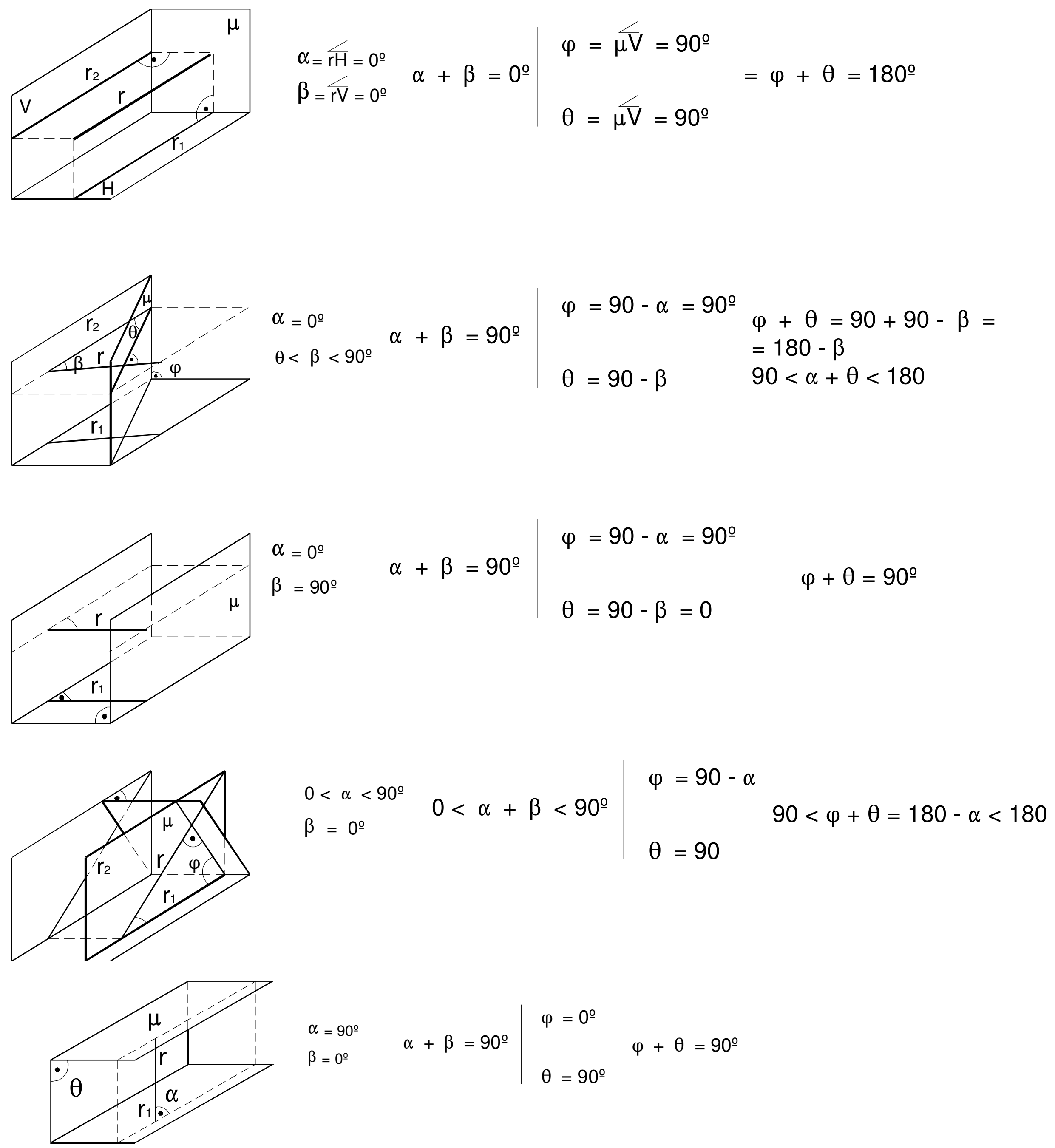
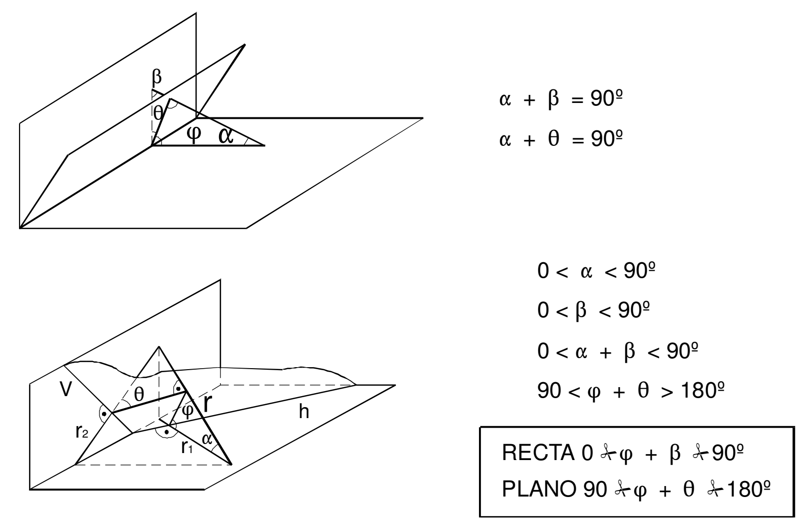
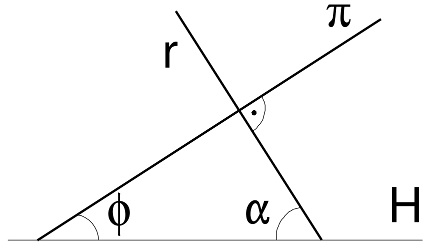


Figura 17



Plano que forma ángulos ϕ con el plano horizontal y ψ con el vertical.

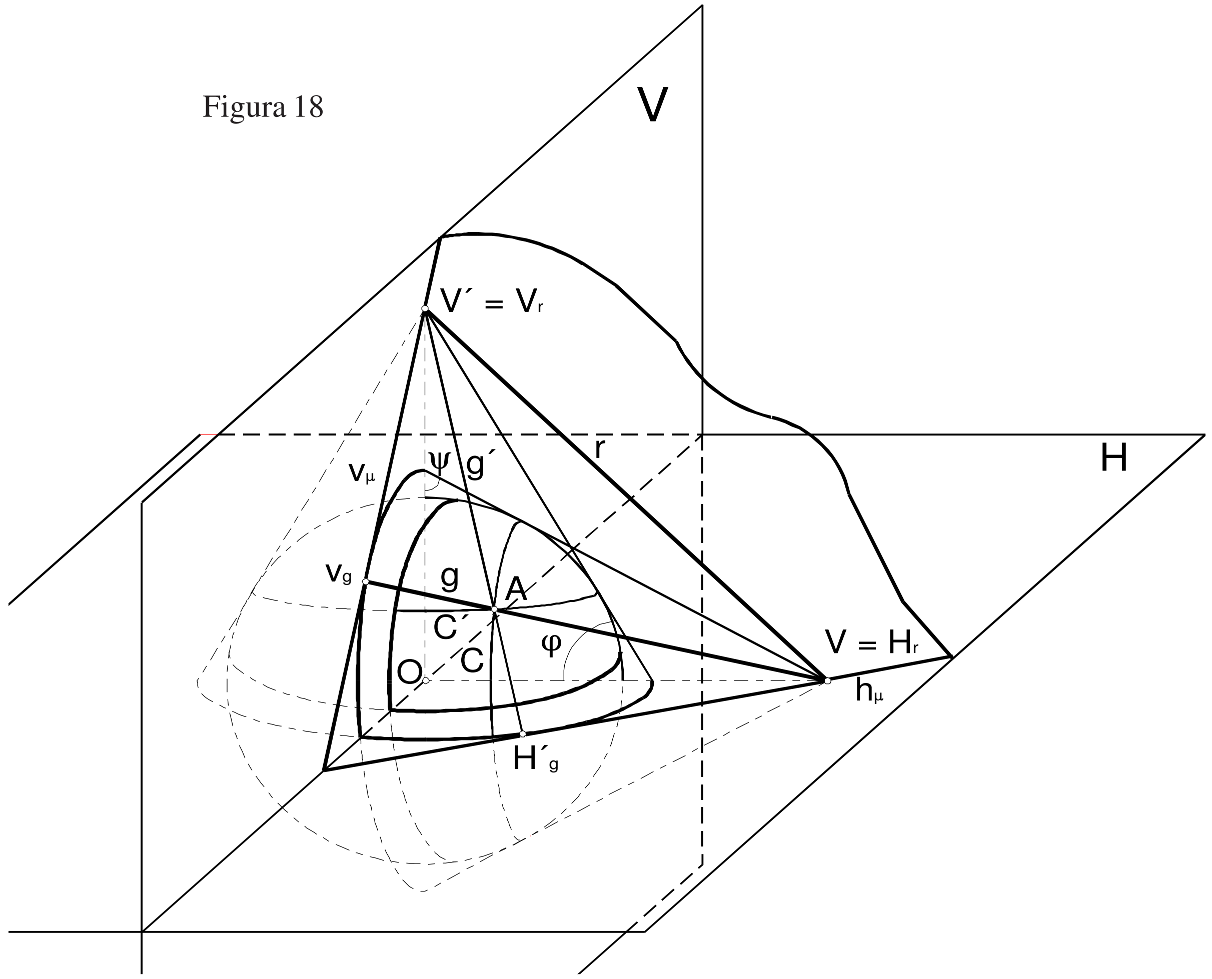
Podemos encontrar un plano que forme ángulos ϕ con el plano horizontal y ψ con el vertical hallando primero la recta *r* perpendicular al plano. Esta recta formará ángulos complementarios de ϕ y ψ con los planos de proyección y podremos hallarla mediante los procedimientos del apartado anterior. Por los mismos argumentos del apartado anterior podemos deducir que existirán soluciones cuando la suma $\phi+\psi$ tome valores entre 90 y 180º.



Otro procedimiento se basa en el trazado de una esfera tangente a dos conos regulares con bases horizontal y vertical y cuyas generatrices formen los ángulos buscados con dichos planos como se muestra en la figura 18. El proceso en diédrico para el caso en que los ángulos buscados son 45º con el horizontal y 60º con el vertical se indica en la figura 19. Consiste en trazar una circunferencia de radio arbitrario con centro en un punto O sobre la línea de tierra y trazar dos rectas tangentes que formen 45 y 60º con la línea de tierra. Estas rectas cortan a la perpendicular a la línea de tierra que pasa por O en los puntos V_1 y V_2', proyecciones horizontal y vertical de los vértices de los conos. Entonces, con centro en O, trazamos una circunferencia de radio la distancia de O al punto en que corta la recta anterior que forma 45º con la línea de tierra. Esta circunferencia será la base horizontal del cono de 45º y por tanto la traza horizontal del plano que buscamos debe ser tangente a ella. Basta pues trazar las tangentes a dicha circunferencia que pasen por V_1 para obtener las trazas horizontales de planos solución del problema. Conocida la traza horizontal, encontramos el vértice del plano donde corte a la línea de tierra y la traza vertical queda determinada por dicho vértice del plano y el punto V_2'.

En la figura 19 izquierda se observa cómo obtenemos dos planos por haber dos tangentes a una circuferencia que pasen por un punto. Los otros dos los obtenemos según el proceso de la figura 19 derecha en que el vértice V lo situamos en el semiplano horizontal posterior en vez de en el anterior.

Figura 18



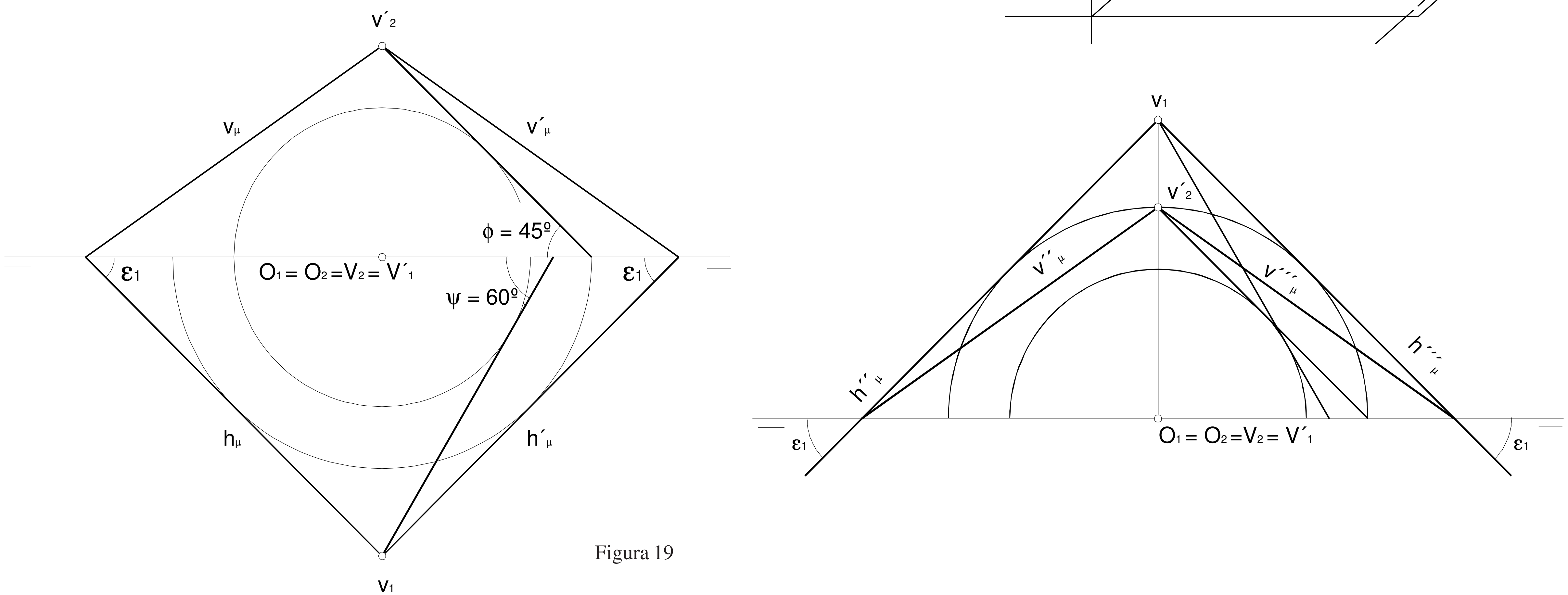
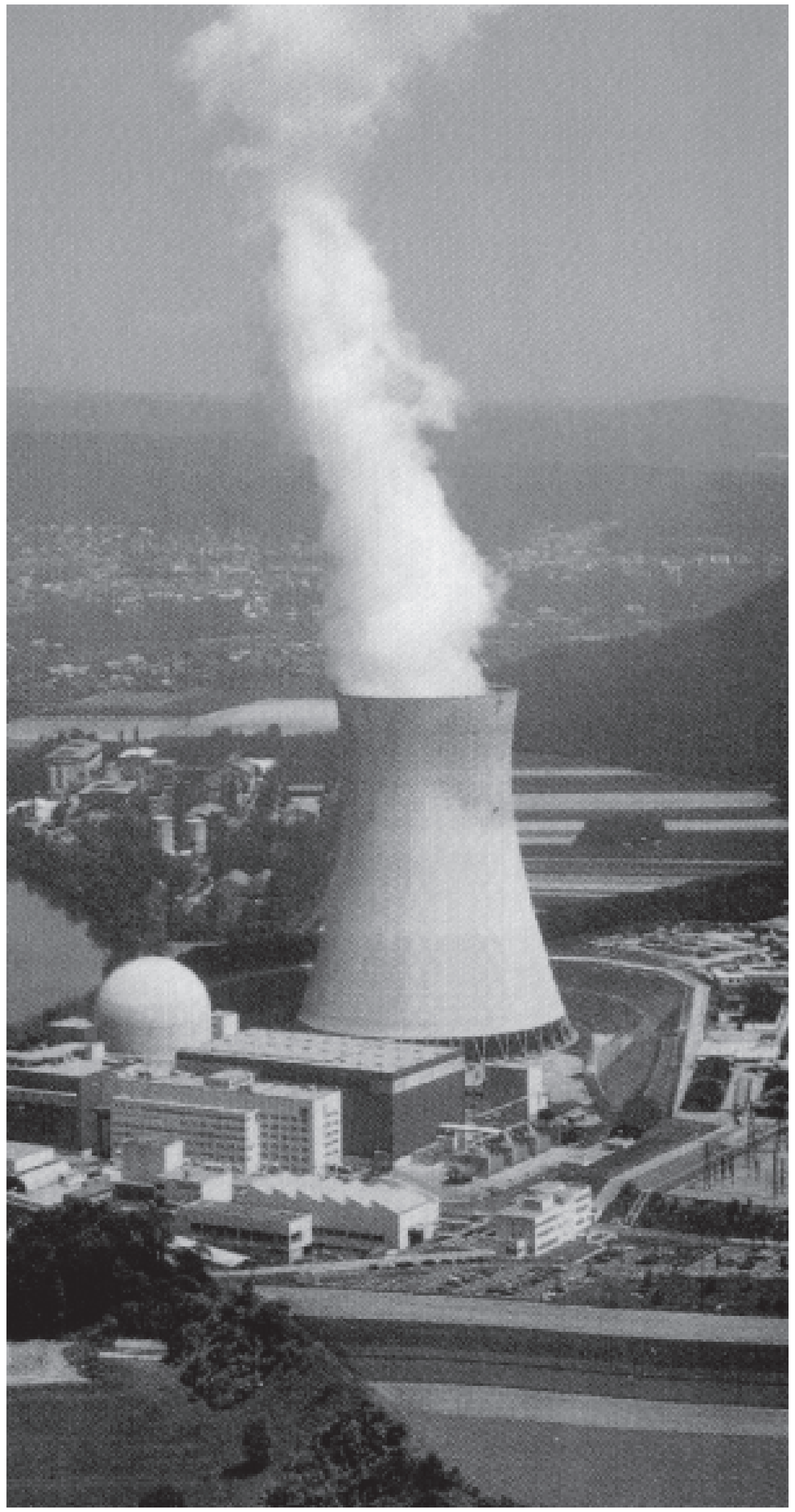
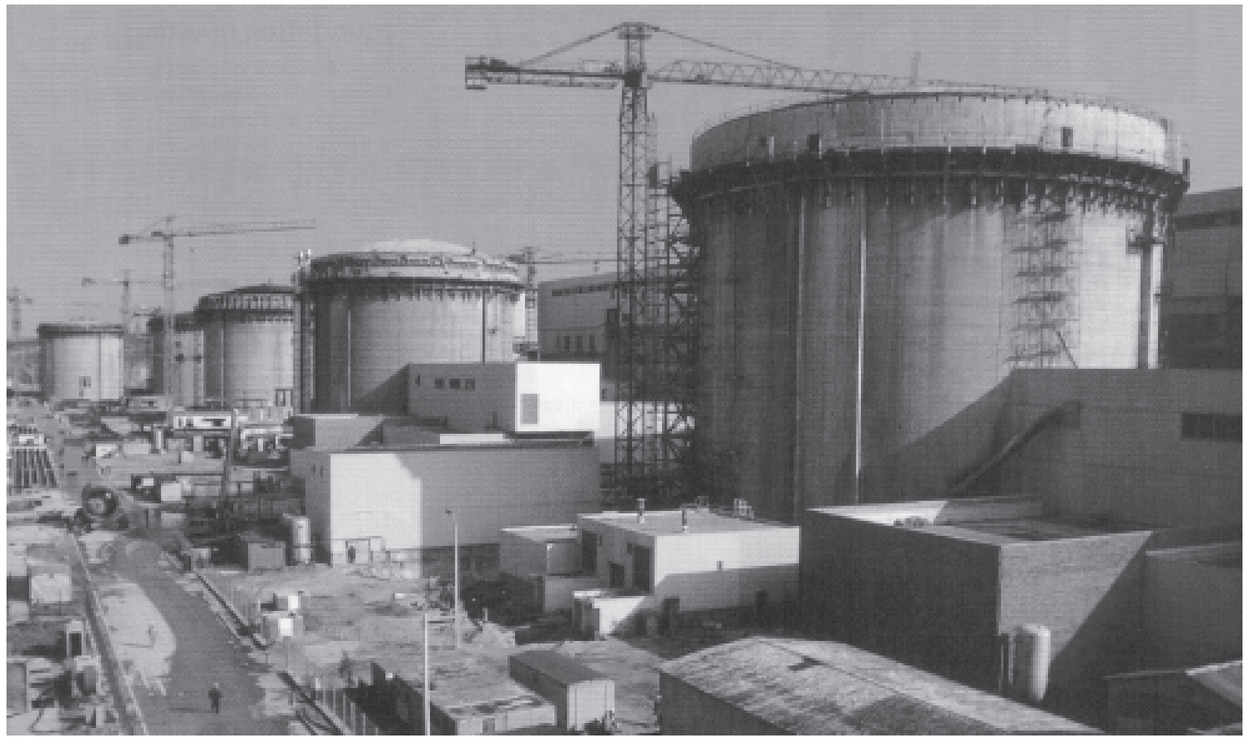


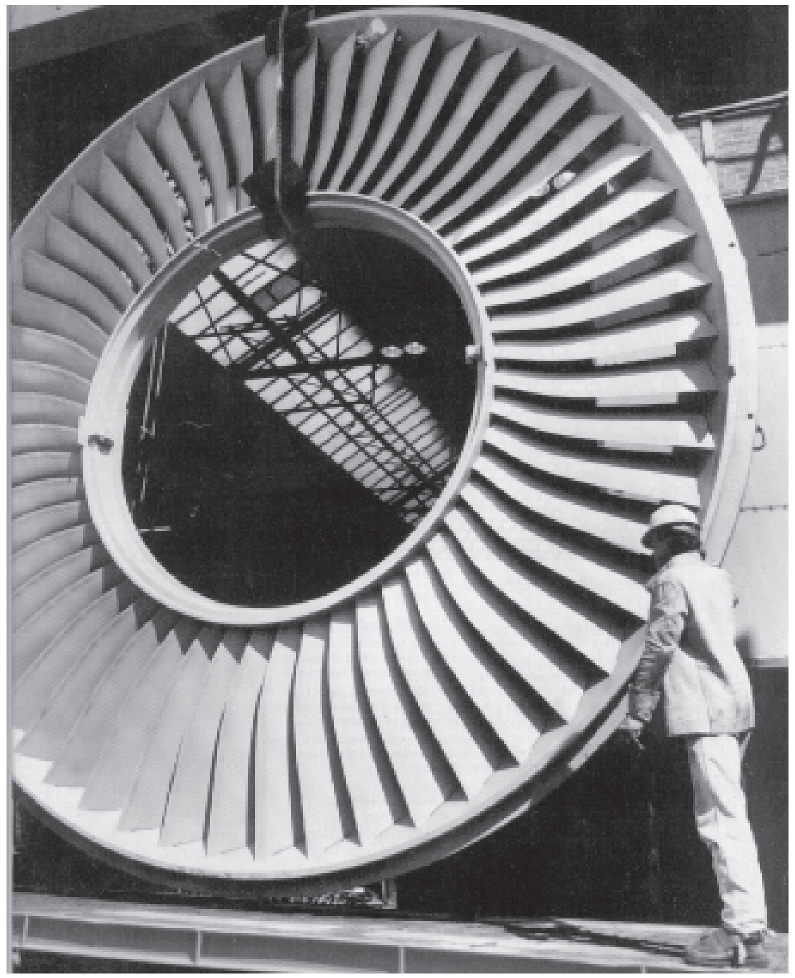
Figura 19



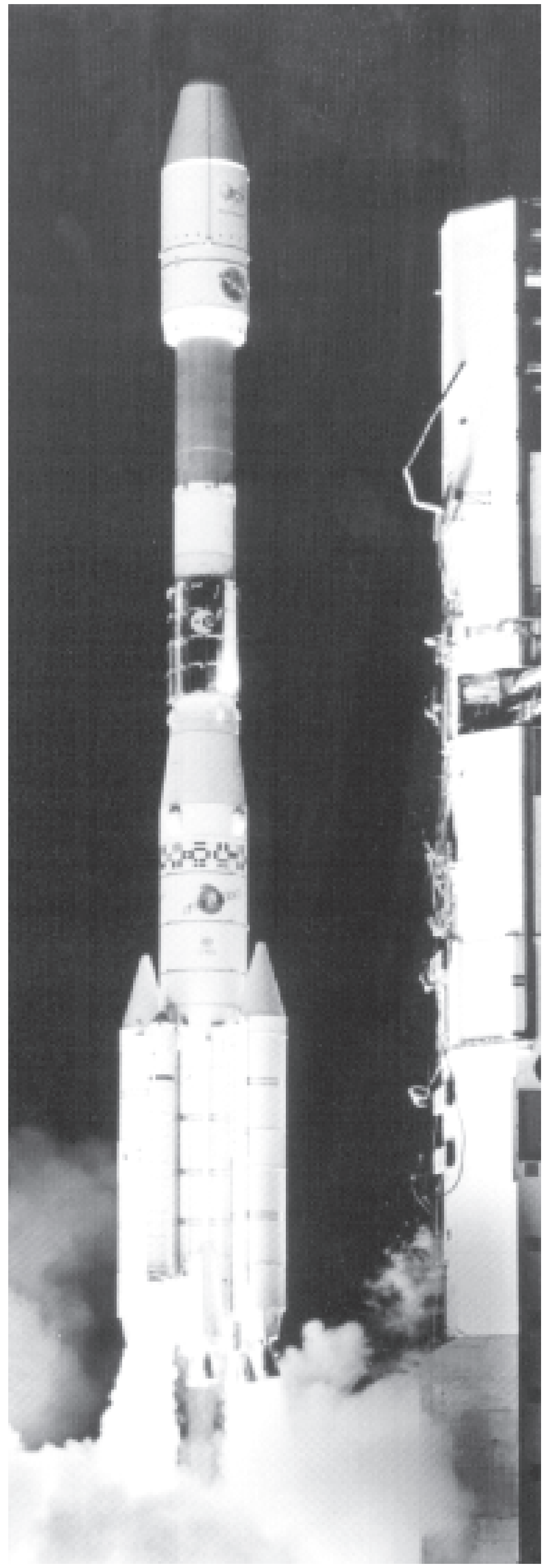
Vista de central nuclear con cúpula semiesférica y torre de refrigeración con forma de hiperboloide de revolución.



Reactores nucleares con cúpulas cilíndricas



Etapa de una turbina de vapor con simetría helicoidal en sus álabes.



Cohete Arianne propulsando una cápsula espacial. Predominan en el conjunto las formas cilíndricas y cónicas.