CAPITULO 3:

SISTEMA DIÉDRICO: FUNDAMENTOS

Fundamentos del sistema diédrico.

El sistema de representación diédrico emplea dos planos principales de proyección perpendiculares entre sí que se denominan *plano horizontal* o H y plano vertical o V. Ambos planos se cortan en la recta que se denomina *línea de tierra* (L.T.). La línea de tierra divide al plano horizontal en los semiplanos anterior H^+ y posterior H^- mientras que el plano vertical queda dividido en semiplano superior V^+ y semiplano inferior V^-. El espacio queda dividido en cuatro cuadrantes comprendidos entre los semiplanos y que se denominan con números romanos según se indica en la figura 1

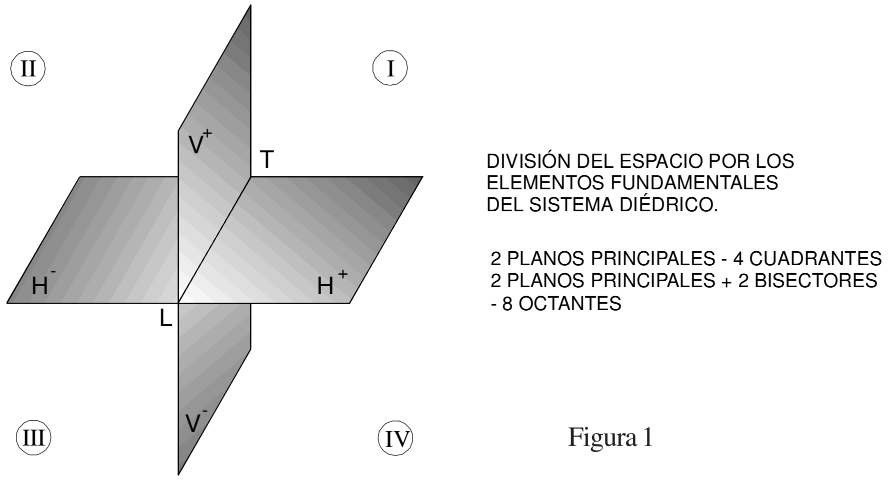
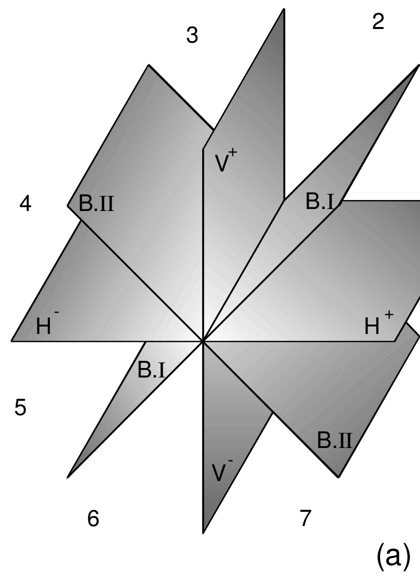


Figura 1

Los planos que pasando por la línea de tierra forman 45º con H y V se denominan «*planos bisectores*». Hay dos de estos planos: el *primer bisector* B1 que divide en dos partes iguales tanto al primero como al tercer cuadrante y el *segundo bisector* B2 que divide los cuadrantes segundo y cuarto según se muestra en la figura 2. Los planos bisectores B1 y B2 junto con los principales H y V dividen el espacio en ocho octantes, indicados con números arábigos en la figura 2.



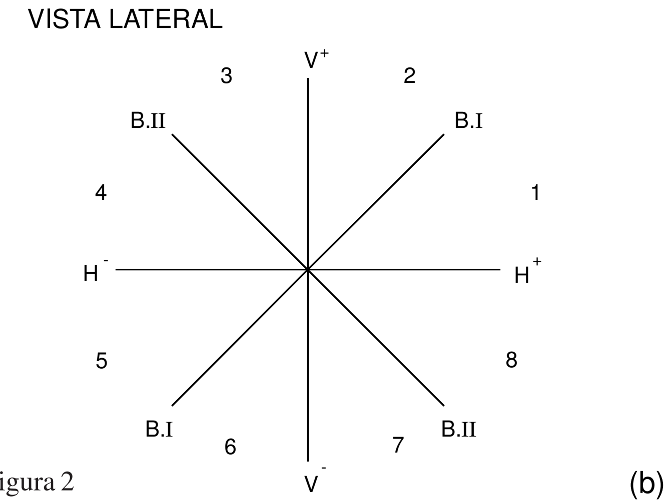


Figura 2

En el sistema diédrico la representación bidimensional de un punto A del espacio tridimensional se hace mediante el procedimiento ilustrado en la figura 3 y que se detalla a continuación: en primer lugar se hallan las proyecciones ortogonales A_1 y A_2 sobre los planos horizontal y vertical respectivamente y se hace girar el plano horizontal en torno de la línea de tierra hasta que el semiplano horizontal anterior H^+ venga a yacer sobre el semiplano vertical inferior V^-. El resultado es un par de puntos A_1 y A_2 que quedan situados sobre un único plano que será el del papel empleado en nuestro trabajo. Obsérvese que ambas proyecciones de un mismo punto quedan en la representación diédrica situados en la misma vertical. Dicho de otra manera, la recta que une A_1 y A_2 en la representación final es perpendicular a la línea de tierra. La línea de tierra se representa con un pequeño trazo paralelo en cada extremo como puede verse en la última fase de la figura 3. Todo el proceso de representación en sistema diédrico es reversible, de forma que a partir de la representación diédrica de un punto podemos restituir dicho punto sin pérdida de información a su posición espacial A.

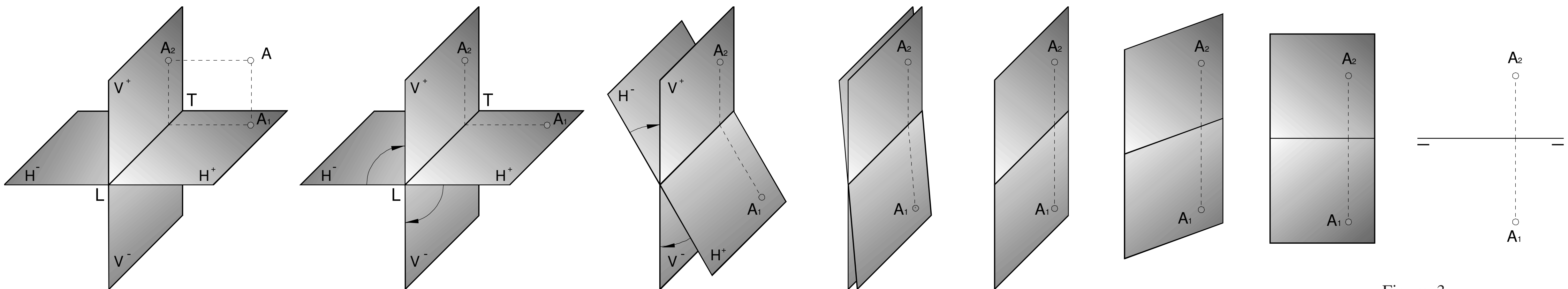


Figura .3.

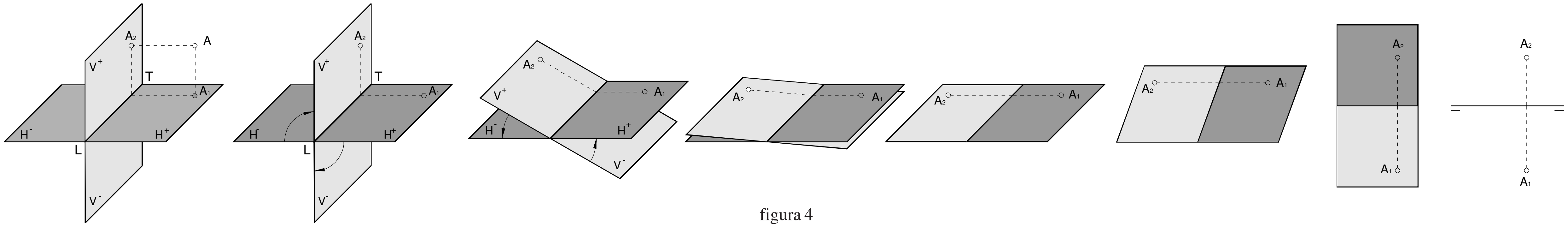


figura 4

A veces, el procedimiento para pasar del espacio tridimensional al bidimensional diédrico, es preferible entenderlo como si se hiciera girar el plano central entorno de la línea de tierra hasta que el semiplano vertical positivo coincida con el horizontal negativo como se muestra en la figura 4.

En ciertos casos, según veremos más adelante, es necesario recurrir a una tercera proyección, la cual se realiza sobre un plano ortogonal a H y a V que se denomina «tercer plano de proyección» o W según se indica en la figura 5. En este caso la representación diédrica de un punto A consiste en la proyección ortogonal sobre H, V y W, el giro de 90º de W en sentido antihorario visto desde arriba y el giro de H como en el caso anterior. En la parte derecha de la figura 5 se muestran las proyecciones A_1, A_2 y A_3 sobre los planos H, V y W de un punto en el primer cuadrante una vez realizado el proceso indicado para el sistema diédrico. Nótese cómo, conocidas dos proyecciones del punto se puede deducir la tercera: A_1 y A_2 están en la misma vertical, A_2 y A_3 están en la misma horizontal y la distancia de la línea de tierra a A_1 es igual que la distancia de A_3 a la traza v_W del plano vertical con el tercero de proyección.

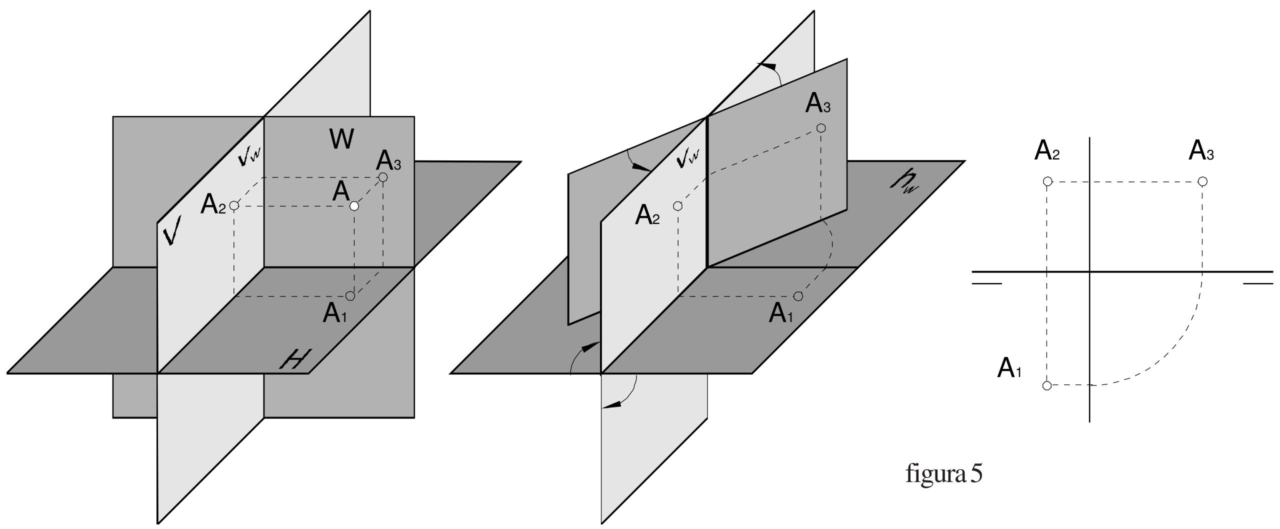


figura 5

A la distancia de A_1 a la línea de tierra se le denomina distancia o alejamiento, siendo positivo cuando esta proyección queda por debajo de la línea de tierra y negativa en caso contrario. A la distancia de A_2 a la línea de tierra se le llama cota, siendo positiva si A_2 queda por encima de la línea de tierra. Se llama, por último, segundo alejamiento, a la distancia de A_3 a la traza v_W de los planos vertical y tercero de proyección, siendo positiva si A_3 queda a la derecha de v_W.

Posiciones del punto

El punto A estudiado hasta ahora, estando en el primer cuadrante, tiene su proyección horizontal A_1 por debajo de la línea de cota y su proyección vertical por encima. Un punto en el segundo cuadrante, por el contrario, tendrá sus dos proyecciones por encima de la línea de tierra; mientras que uno en el tercero tendrá A_1 por encima y A_2 por debajo. Finalmente, un punto en el cuarto cuadrante tendrá sus dos proyecciones por debajo de la línea de tierra.

En la figura 6 se muestran las diferentes posiciones de puntos situados en cada octante y en los planos principales y bisectores. Así, por ejemplo, el punto B se encuentra en el primer bisector y en el primer cuadrante. Por tanto sus proyecciones B_1 y B_2 se encuentran por debajo y por encima respectivamente y a la misma distancia de la línea de tierra. Las proyecciones del punto J, situado en el mismo primer bisector pero en el tercer cuadrante, son también equidistantes de la línea de tierra pero justamente al contrario: J_1 por encima de la línea de tierra y J_2 por debajo.

Los puntos F y N en el segundo bisector tienen sus dos proyecciones coincidentes, estando por encima

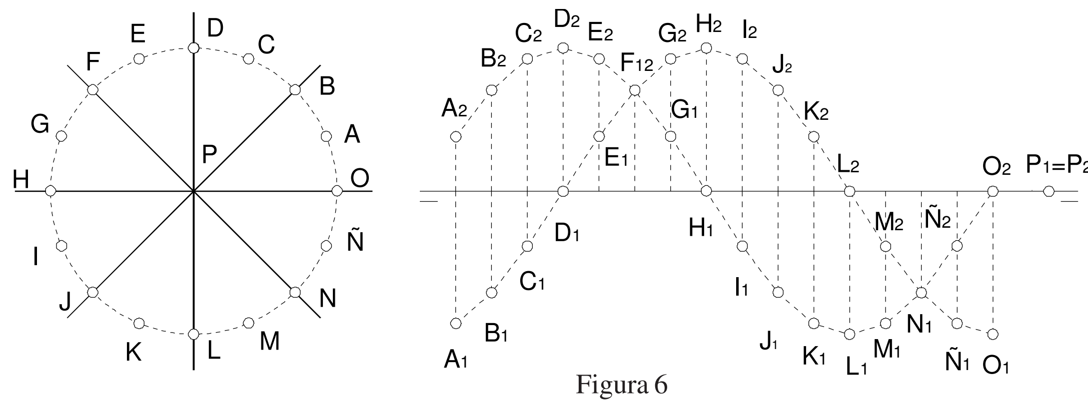


Figura 6

de la línea de tierra las de F por encontrarse en el segundo cuadrante y por debajo las de N por encontrarse en el cuarto cuadrante. Para estos puntos en el segundo bisector podríamos decir que sus cotas y alejamientos son opuestas: con el mismo valor absoluto pero signos opuestos.

Por otro lado, podremos determinar el octante en que se encuentra un punto comparando los valores de cota y alejamiento. Por ejemplo, estudiemos el caso del punto M en el séptimo octante. Su cota es negativa y su alejamiento positivo, siendo este último menor que el valor absoluto de la cota.

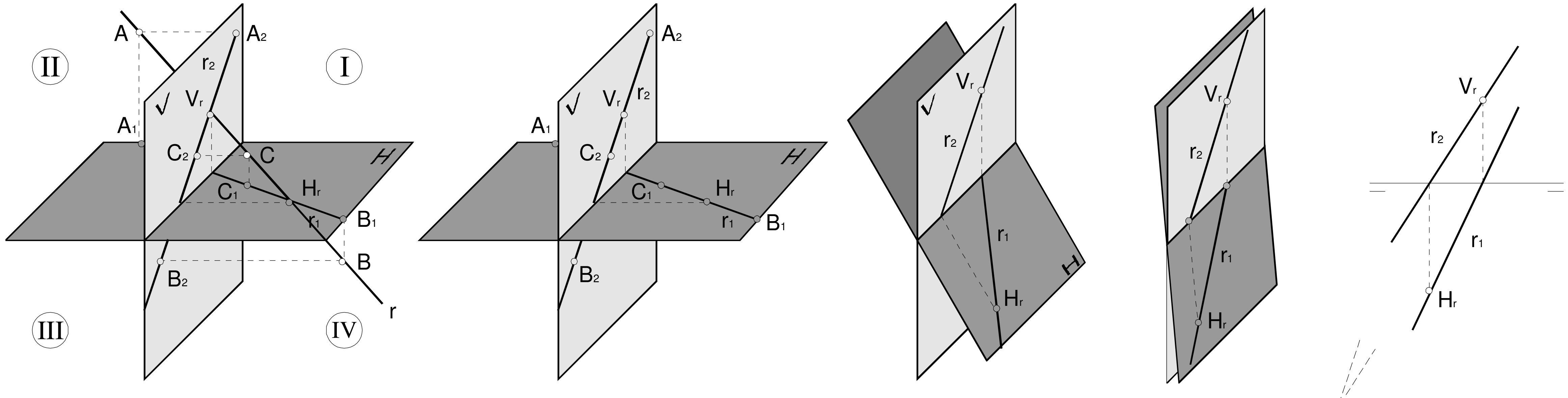


Figura 7.

La recta

Una recta r se representa en el sistema diédrico mediante sus proyecciones r_1 y r_2 sobre los planos H y V conforme se representa en la figura7. Por tanto, las proyecciones de la recta son también rectas. Basta conocer las proyecciones de dos puntos de la recta, como los A y B de la figura, para conocer las proyecciones de la recta. Un par de puntos especialmente destacados son H_r y V_r , trazas de la recta con los planos horizontal y vertical o simplemente «*trazas de la recta*». La proyección horizontal r_1 corta a la línea de tierra justamente en el punto proyección de la traza V_r. La proyección vertical r_2 corta a la línea de tierra en la proyección de la traza H_r.

Las trazas son pues los puntos que separan segmentos o semirrectas en diferentes cuadrantes. Dado que una recta tiene como máximo dos trazas, a lo sumo puede estar en tres cuadrantes. Si sólo tuviera una traza, por ser paralelo al plano de proyección o por intersecar la línea de tierra, entonces se encontraría exclusivamente en dos cuadrantes. También puede darse el caso de no tener ninguna traza por ser paralela a la línea de tierra, en cuyo caso se encontraría en un único cuadrante.

Suele trazarse con línea continua las proyecciones del segmento de la recta que se encuentre en el primer cuadrante mientras que los demás se trazan con líneas de trazos como se muestra en la figura 8. En particular se muestra en dicha figura la posición del punto A intersección de la recta con el primer bisector. Queda determinado este punto trazando rectas que pasen por los puntos de corte de las proyecciones con la línea de tierra y que formen ángulos iguales con ellas. Las proyecciones de A son los puntos de corte de estas rectas con r_1 y r_2.

En la misma figura se muestra la posición del punto B intersección de r con B2 segundo plano bisector. Las proyecciones de este punto coinciden ambas en el punto de corte de las dos proyecciones r_1 y r_2 de la recta.

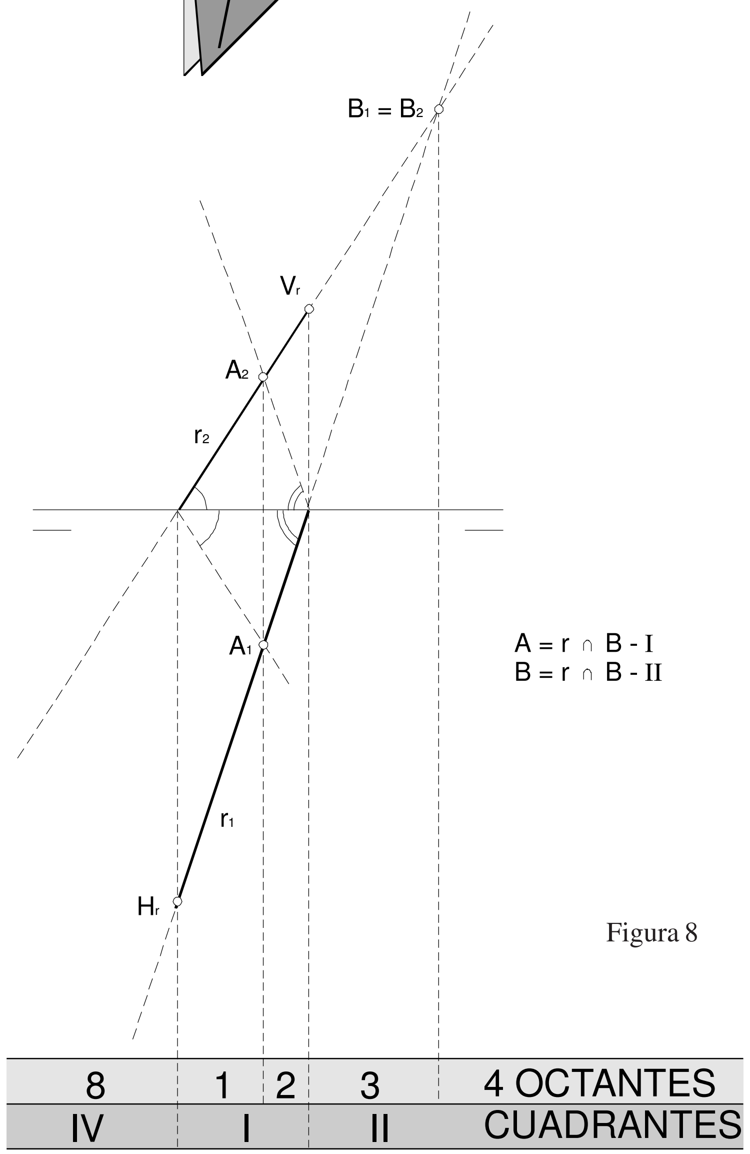


Figura 8

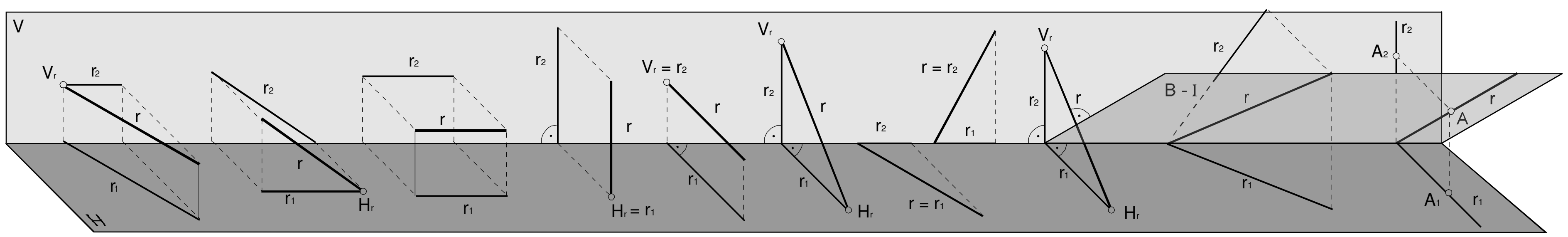
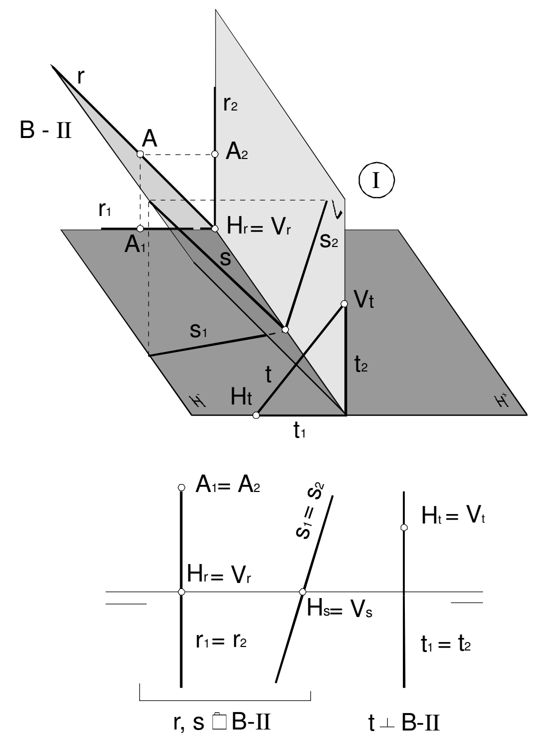


Figura 9



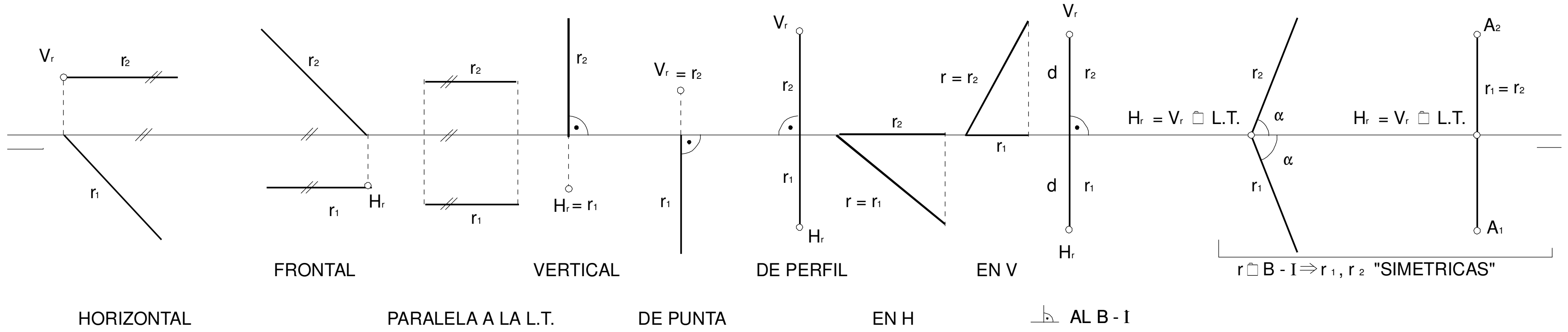


Figura 10

Posiciones de una recta.

La posición de una recta respecto de los elementos fundamentales del sistema diédrico puede lógicamente deducirse de sus proyecciones. Las posibilidades son evidentemente infinitas pero se pueden clasificar en grupos generales, algunas de las cuales tienen nombres especiales. En las figuras 9 y 10 se muestran las posiciones espaciales de algunas rectas y sus representaciones en diédrico con los nombres que comúnmente reciben. Por ejemplo, la primera que se muestra es una recta horizontal, esto es, paralela al plano horizontal y por tanto su proyección vertical será paralela a la línea de tierra.

Dos rectas pueden presentar varias posiciones relativas. Pueden cortarse en un punto, como sucede en la figura 11 a las rectas *a* y *r* o a las rectas *a* y *c*. Pueden ser paralelas, como sucede a las rectas *r* y *c*. Pueden, finalmente, cruzarse como las rectas *r* y *e* o las rectas *r* y *d* de dicha figura.

Las posiciones de una recta respecto de un plano π vienen resumidas en la figura 12. Una recta puede estar contenida en un plano como la primera de las rectas de la figura 12. Puede cortarlo oblícuamente como la segunda de las rectas. En la figura se indica el ángulo α que forma la recta con la proyección de dicha recta sobre el plano. En particular una recta puede cortar al plano perpendicularmente, como la tercera de las representadas en la figura. Por último una recta puede ser paralela al plano y no cortarle en ningún punto.

Las posiciones de dos planos se muestran en la figura 13. Así, dos planos pueden coincidir, pueden cortarse formando un ángulo α, que en particular puede ser un ángulo recto y ser los dos planos perpendiculares. La intersección de dos planos que se cortan es una línea recta. Por último, dos planos pueden ser paralelos, sin intersección propia.

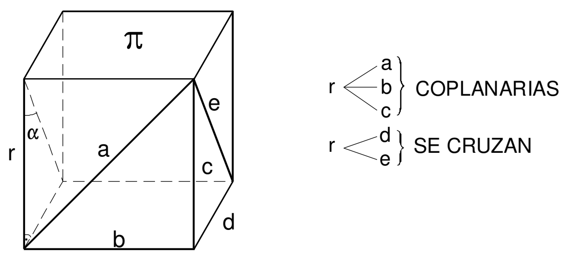


Figura 11

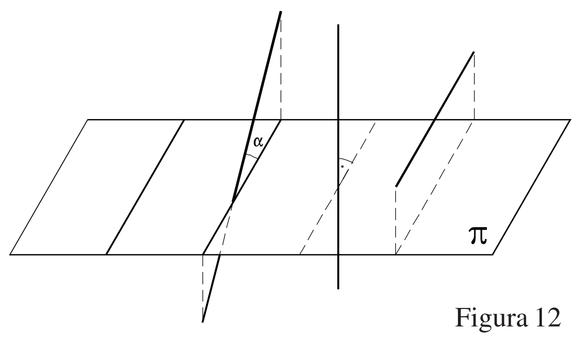


Figura 12

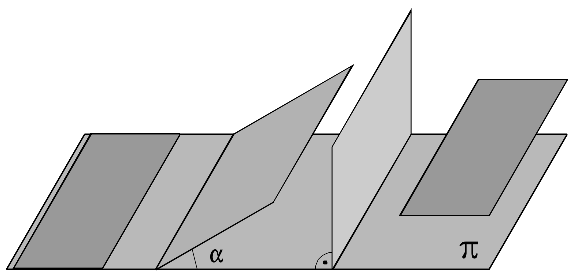
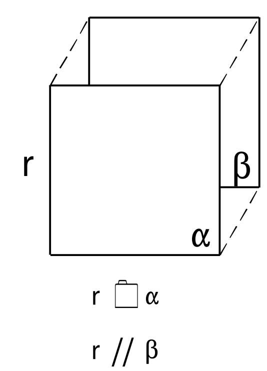
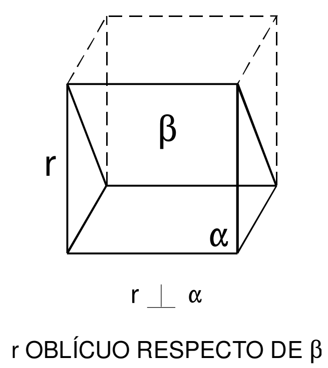


Figura 13 *Las caras, diagonales y aristas de un cubo, recogen las posiciones relativas entre planos y rectas*





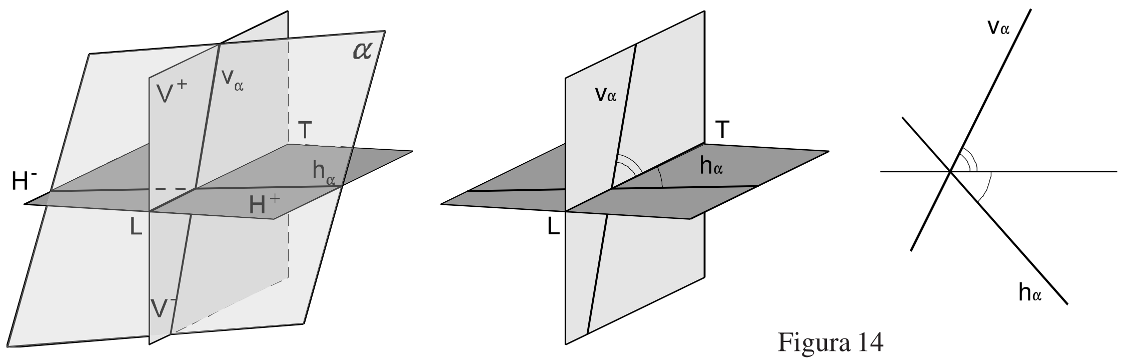
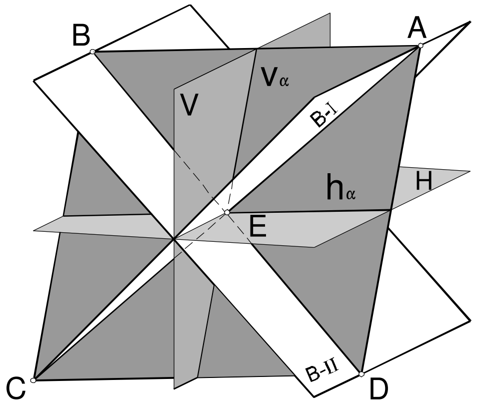


Figura 14

Representación de un plano.

La representación en el sistema diédrico de un plano α se realiza mediante sus trazas con los planos vertical y horizontal. Estas trazas son rectas que se cortan en la traza del plano con la línea de tierra. Este punto recibe el nombre de *«vértice del plano»*. En la figura 14 se representa un plano α genérico, sus trazas con los planos horizontal y vertical de proyección y el proceso de construcción de su representación diédrica. Finalmente, la representación diédrica consta de la traza horizontal h_α y la traza vertical v_α, que se cortan en el vértice del plano sobre la línea de tierra.



E, A, B, C, D ∈ α

E ∈ B - I
A ∈ B - I
C ∈ B - I

E ∈ B - II
B ∈ B - II
D ∈ B - II

EA = EC = $\alpha \cap$ B - I

EB = ED = $\alpha \cap$ B - II

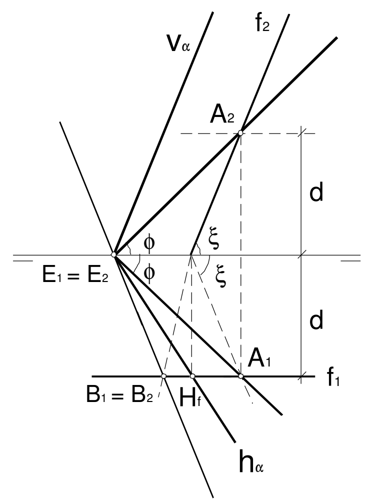
Figura 15

Nótese que no tendría sentido emplear una proyección del plano como representación suya, puesto que esta proyección, salvo en casos especiales, cubriría todo el plano de proyección y una hoja con una gran mancha de tinta evidentemente no aporta ninguna información.

Habría, en principio, otras posibles opciones para definir un plano. Por ejemplo, podríamos emplear las trazas con los planos bisectores B1 y B2 como se indica en la parte inferior de la figura 15.

Rectas notables en un plano.

Entre las rectas contenidas en un plano podemos destacar algunas familias con propiedades y nombres especiales. Así, una *recta horizontal del plano* es aquella contenida en el plano y paralela a H. Por un punto del plano pasa una única recta horizontal, salvo si el propio plano es horizontal, en cuyo caso todas las rectas contenidas en él son horizontales. La proyección vertical h_2 de una recta horizontal *h* será paralela a la línea de tierra.



$\alpha \cap$ B - I = EA
$\alpha \cap$ B - II = ED
TRAZAS DE UN PLANO α CON LOS BISECTORES

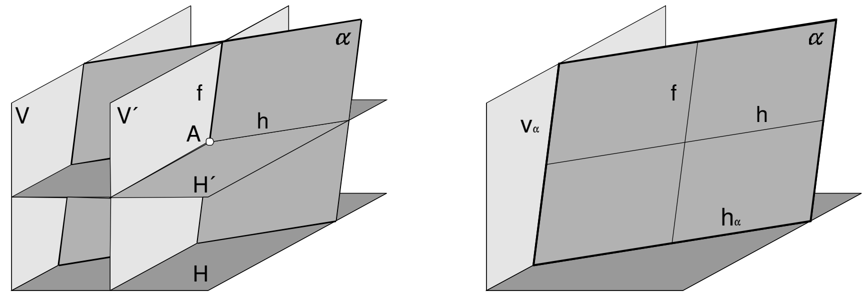
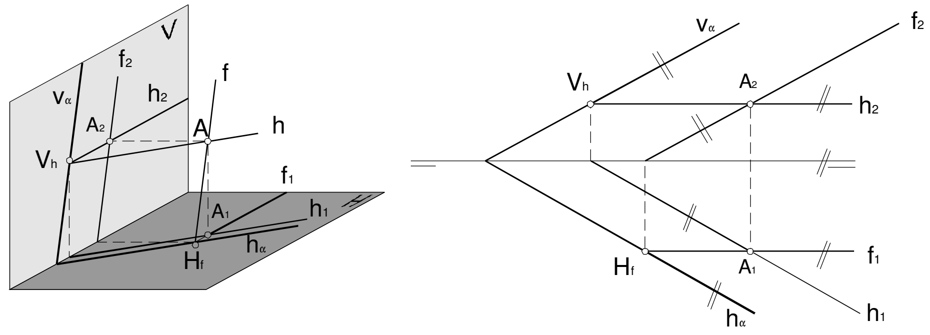


Figura 16



RECTAS HORIZONTALES Y FRONTALES

Una *recta frontal del plano* será aquella recta *f* contenida en el plano y paralela a V. Su proyección horizontal f_1 será paralela a la línea de tierra y por un punto del plano pasará solamente una recta frontal salvo en el caso de que el plano sea paralelo al vertical en que será un número infinito el de rectas verticales que pasen por cada punto. A las rectas horizontales y frontales, también se les llama rectas principales del plano, entre las que se encuentran las trazas del plano.

La recta horizontal *h* y frontal *f* del plano α que pasan por un punto A de dicho plano son también la intersección del plano α con el plano H' horizontal con cota la de A y con el plano V' vertical con alejamiento el de A. En la figura 16 se representan estas intersecciones *h* y *v* de un plano α con los planos H' y V' y sus proyecciones sobre H y V. Se muestra también su representación diédrica. Obsérvese que, por estar contenidas ambas rectas en el plano, la traza vertical V_h de una recta horizontal debe estar en la traza vertical del plano , mientras que la traza horizontal H_f de una recta frontal debe estar en la traza horizontal del plano. Dado un punto cualquiera A, la condición necesaria y suficiente para que este punto pertenezca al plano α es que exista una recta horizontal o frontal del plano que lo contenga.

De otra forma, podemos decir que dada la proyección, por ejemplo, horizontal A_1 de un punto del plano α podemos encontrar su proyección vertical A_2 mediante la construcción de la recta horizontal del plano que pasa por dicho punto. Para ello, como se indica en la figura 16, bastará trazar la proyección h_1 de dicha recta. Esta proyección h_1 debe pasar por A_1 y además ser paralela a la traza horizontal del plano h_α. La traza vertical de la recta *h* vendrá determinada por la intersección de h_1 con la línea de tierra, puesto que su proyección vertical V_h debe estar en la traza vertical del plano v. La cota de V_h es la misma que tendrán todos los puntos de la recta horizontal *h* y, en particular, el punto A. Con ello queda determinada la proyección vertical A_2 del punto. De forma similar se puede determinar el alejamiento de un punto del plano si conocemos su proyección vertical. Para ello se traza la recta frontal que pasa por dicho punto conforme queda también indicado en la figura 16.

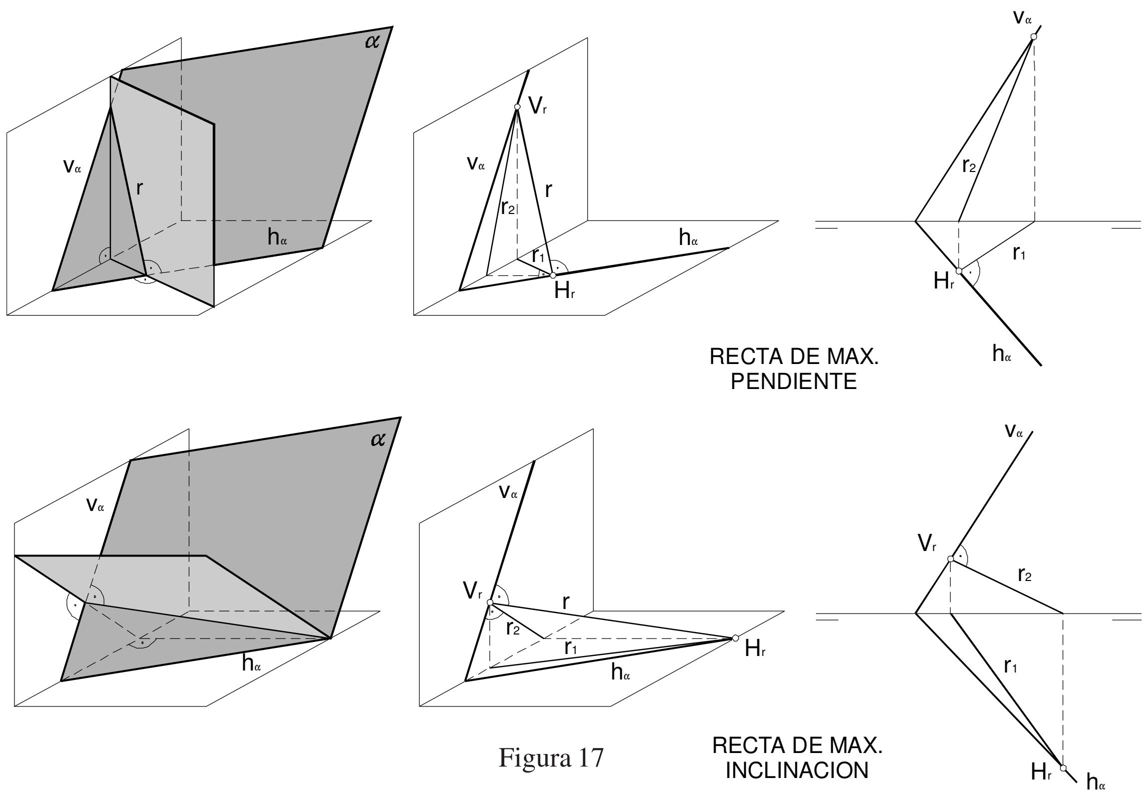


Figura 17

Otras familias de rectas notables en un plano son las *rectas de máxima pendiente* y las *rectas de máxima inclinación*. Llamamos *pendiente* de una recta al cociente entre la diferencia de cotas de dos puntos de la recta y la distancia entre sus proyecciones horizontales. Llamamos *inclinación* de una recta al cociente entre la diferencia de alejamientos de dos cualesquiera de sus puntos y la distancia entre sus proyecciones verticales.

Las rectas del plano con pendiente máxima tienen como característica que su proyección horizontal es perpendicular a la traza horizontal del plano, conforme se muestra en la figura 17. Las rectas de máxima inclinación, recíprocamente, tienen su proyección vertical perpendicular a la traza vertical del plano, lo cual se muestra también en la figura 17.

Posiciones especiales de planos.

Hay una serie de planos que reciben nombres especiales por su situación respecto de los elementos fundamentales. En la figura 18 se muestra una representación espacial y su representación diédrica.

Un plano *horizontal* es aquel paralelo al plano H horizontal de proyección. Su traza vertical será paralela a la línea de tierra y no tendrá traza horizontal. Recíprocamente un plano *frontal* es uno paralelo al plano V vertical de proyección. Sólo tiene traza horizontal y ésta es paralela a la línea de tierra.

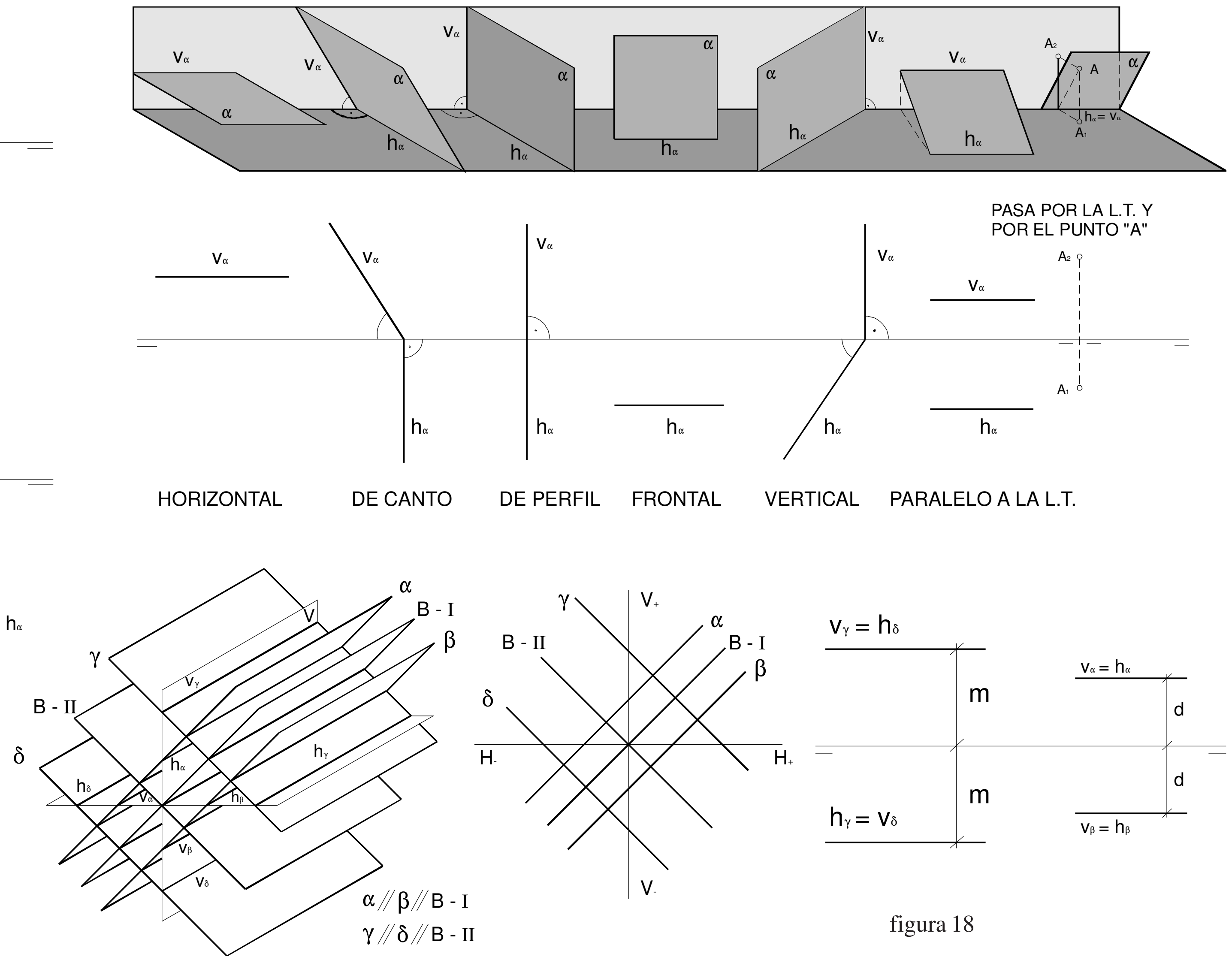


figura 18

Decimos que un plano está *de canto* si es perpendicular al plano V, es decir, su traza horizontal es perpendicular a la línea de tierra. Recíprocamente, un plano decimos que es *vertical* si es perpendicular al plano H, esto es, su traza vertical es normal a la línea de tierra. En particular, aquellos plano perpendiculares simultáneamente a H y V se dice que son *de perfil*. Sus trazas coinciden y son ortogonales a la línea de tierra.

Por otro lado, un plano paralelo a la línea de tierra tendrá sus trazas paralelas a dicha línea. Las trazas de un plano que contenga a la línea de tierra coinciden sobre dicha línea. Es el único caso en que un plano no queda definido por sus trazas. Para su definición, se utiliza otro punto situado en él, de modo que el plano viene dado por el punto y la línea de tierra. Para indicar este plano se dibujan dos trazos por debajo de la L.T. y a cada lado de la línea de referencia del punto A, tal y como se muestra en la figura 18. En esta figura muestran también, como ejemplos de este último tipo de planos los planos bisectores B1 y B2 junto con los planos α y β paralelos a B1 y α y β paralelos a B2.

Determinación de pertenencias.
Intersección de planos.

Los puntos y rectas contenidas en un plano pueden identificarse con facilidad en el sistema diédrico. En concreto una recta que esté contenida en un plano deberá tener sus trazas en las trazas del plano. En la figura 19 la recta *r* está contenida en el plano α y sus trazas H_r y V_r están contenidas en h_α y v_α respectivamente. Los puntos que están contenidos en el plano, como el punto A de la figura 19, los podemos identificar porque existe una recta en el plano que los contiene, como es el caso de la recta *r*. En particular son especialmente útiles las rectas horizontales y frontales para comprobar si un punto concreto pertenece a un plano.

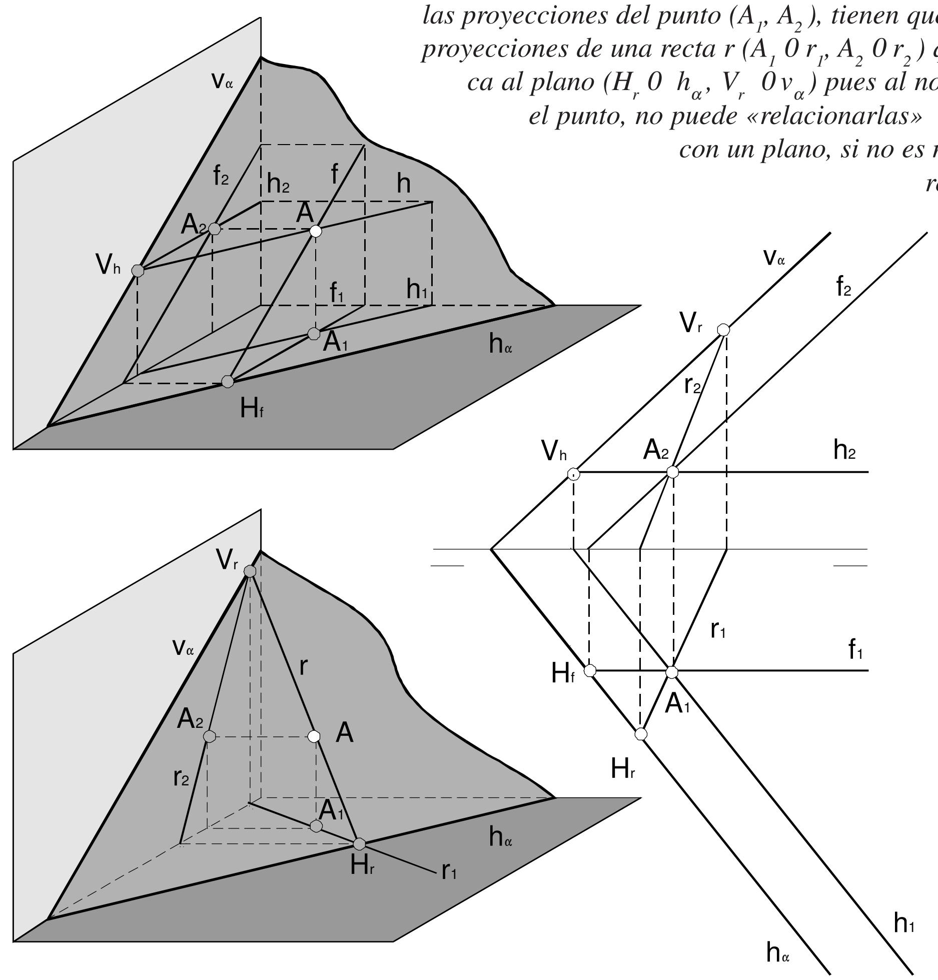


Figura 19. *Para que un punto esté situado en un plano α, las proyecciones del punto (A_1, A_2), tienen que estar en las proyecciones de una recta r (A_1 0 r_1, A_2 0 r_2) que pertenezca al plano (H_r 0 h_α, V_r 0 v_α) pues al no tener trazas el punto, no puede «relacionarlas» directamente con un plano, si no es mediante una recta auxiliar.*

En la misma figura se muestran las rectas horizontal y frontal que pasan por A. El procedimiento, pues, para comprobar si el punto A está contenido en una recta horizontal del plano será trazar por A_2 una paralela a la línea de tierra que será la presunta h_2. A partir del punto de intersección con la traza vertical del plano v_α trazamos la vertical hasta que corte la línea de tierra y desde ahí una recta paralela a la traza horizontal del plano h_α que será la presunta h_1. Si el punto efectivamente pertenece al plano A_1 debe pertenecer a h_1.

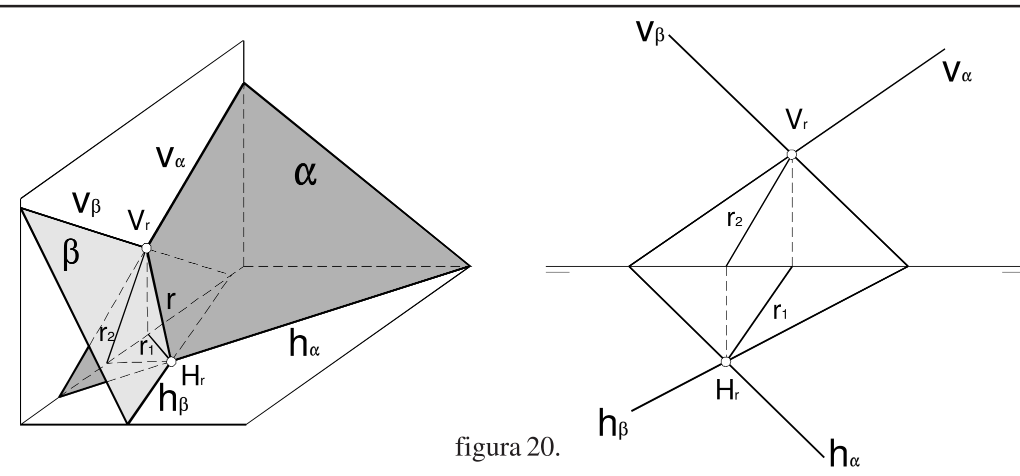


figura 20.

La recta intersección de dos planos es por consiguiente fácilmente determinable como se muestra en la figura 20. Ésta debe tener su traza vertical en la intersección de las trazas verticales de los planos y su traza horizontal en la intersección de las horizontales de los planos.

Si las intersecciones de las trazas de los planos α y β caen fuera del papel, puede emplearse otro procedimiento alternativo para encontrar la recta *r* intersección de ambos planos. En definitiva, se trata de encontrar puntos de la recta, diferentes de las trazas de la misma. Consiste pues, en encontrar la intersección de los planos α y β con dos planos auxiliares horizontales, por ejemplo H' y H'' conforme se muestra en la figura 21. Así, trazando paralelas a la línea de tierra encontramos las trazas verticales de las rectas *a', a'', b'* y *b''* intersección de α y β con H' y H''. Las proyecciones horizontales de estas rectas serán paralelas a las trazas h_α y h_β de los planos y además cortarán a la línea de tierra en las trazas verticales que antes hemos determinado. De esta forma encontramos A_1 y B_1 proyecciones horizontales de los puntos intersección de *r* con H' y H'' respectivamente. Con esto quedan perfectamente determinados A y B puesto que sus cotas eran las de los planos H' y H''. La recta *r* contendrá a ambos puntos por lo que pueden trazarse sus proyecciones sin más que unir las proyecciones de los puntos.

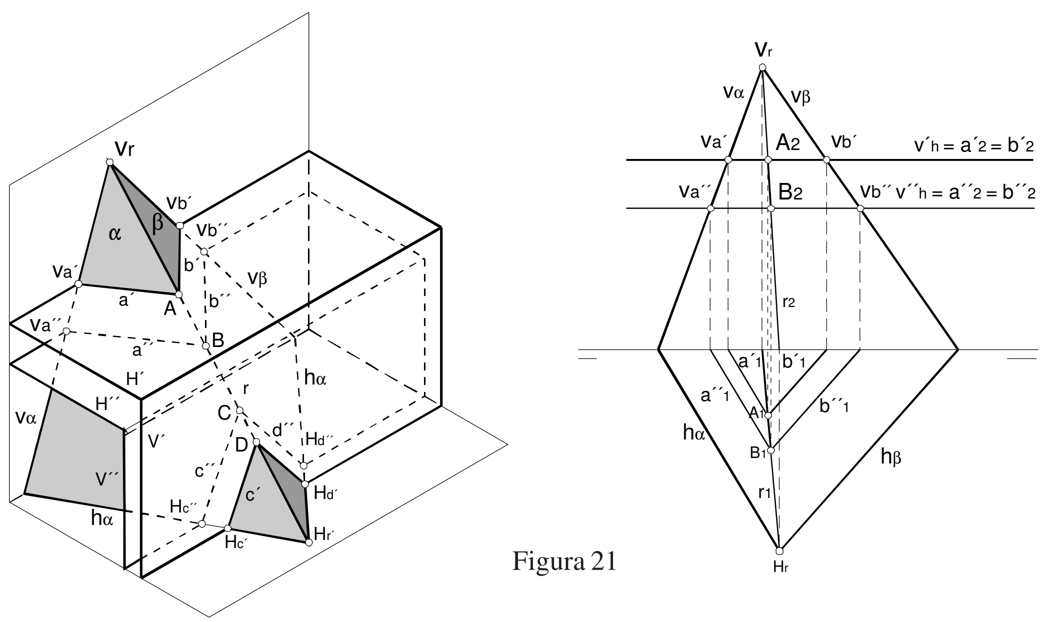


Figura 21

Una variedad de este último procedimiento es particularmente interesante en el caso de planos con vértice coincidente, como se muestra en la figura 22. Dibujamos la traza vertical $v_{H'}$ de un plano H' paralelo al horizontal. Esta traza cortará a las trazas verticales de α y β en V_α y V_β trazas verticales de las rectas *a* y *b* intersección de α y β con H'. En la vertical de estas trazas sobre la línea de tierra trazaremos las proyecciones horizontales a_1 y b_1 de las rectas y que deberán ser paralelas a las trazas horizontales h_α y h_β. El punto A donde se corten pertenece a las dos rectas y por tanto al plano H'. Dicho punto es pues la intersección del plano H' con la recta *r* intersección de α y β. Con ello queda definida la recta *r* puesto que otro punto por el que pasa es el propio vértice de los planos.

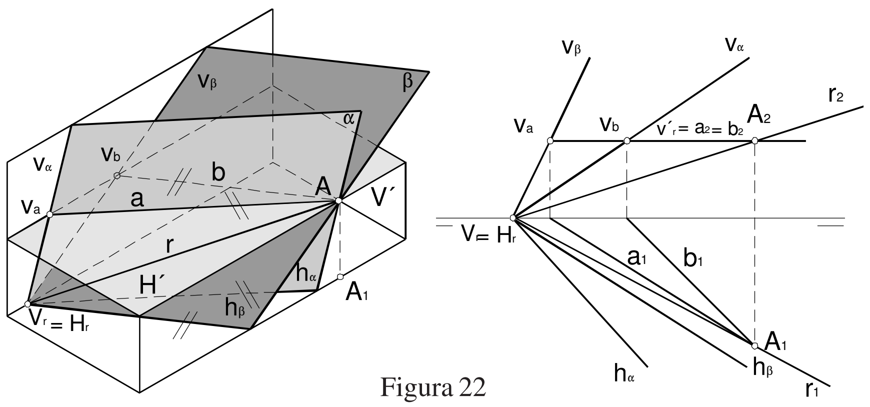


Figura 22

En el caso especial en que los planos son paralelos a la línea de tierra se debe recurrir a la traza con el tercer plano de proyección que hace las funciones de auxiliar, aunque se puede recurrir lógicamente a cualquier otro tipo de plano auxiliar como se indica espacialmente en la figura 23.

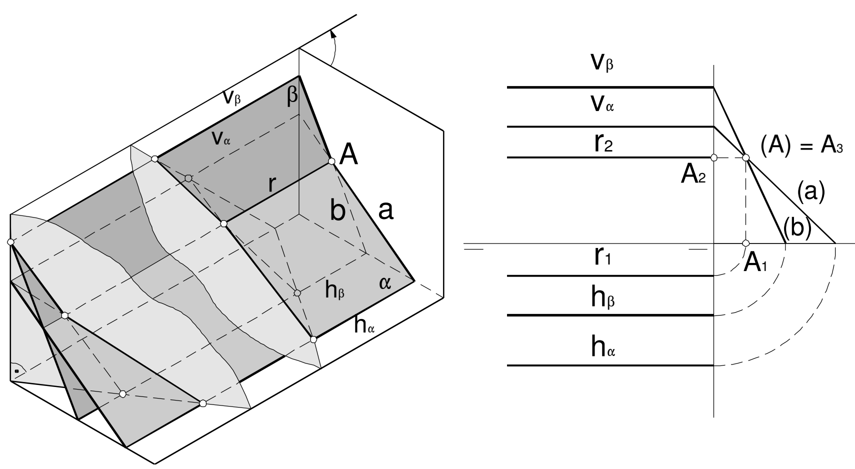


Figura 23

Planos notables de una recta.

Dada una recta es fácil encontrar los planos especiales que la contienen según se muestra en la figura 24. Hay que tener en cuenta la forma específica de las trazas de estos planos especiales y que las trazas de la recta deben estar contenidas en las del plano.

Así un plano vertical que contenga a la recta *r* tendrá como traza vertical la recta perpendicular a la línea de tierra que pase por la traza vertical de la recta V_r. La traza horizontal viene entonces determinada por el vértice del plano y por la traza horizontal de la recta H_r. Recíprocamente, el plano de canto que contiene la recta, tendrá como traza horizontal la perpendicular a la línea de tierra que pase por H_r y su traza vertical vendrá determinada por el vértice del plano y por la traza vertical de la recta.

El plano paralelo a la línea de tierra que contiene a la recta *r* tendrá por trazas las rectas paralelas a la línea de tierra que pasen por las trazas de la recta.

El plano perpendicular al primer bisector B1, cuyas trazas deben formar ángulos iguales con la línea de tierra se encuentra mediante la cuarta construcción indicada en la figura 24. La traza vertical del plano queda determinada por la traza vertical de la recta y un punto en la vertical de la traza horizontal con cota igual a su alejamiento d_1. La traza horizontal queda definida por la traza horizontal de la recta y un punto bajo la traza vertical a una distancia d_2 de la línea de tierra igual a la cota de dicha traza vertical.

El plano perpendicular al segundo bisector B2 se determina mediante la última construcción de la figura 24. En este caso deben coincidir las trazas horizontal y vertical del plano en una sola recta, la cual se puede determinar simplemente uniendo las trazas de la recta. En la misma figura se indica otra posible construcción basada en los mismos puntos del caso anterior que puede ser de utilidad si las trazas de la recta quedan en lugar inconveniente.

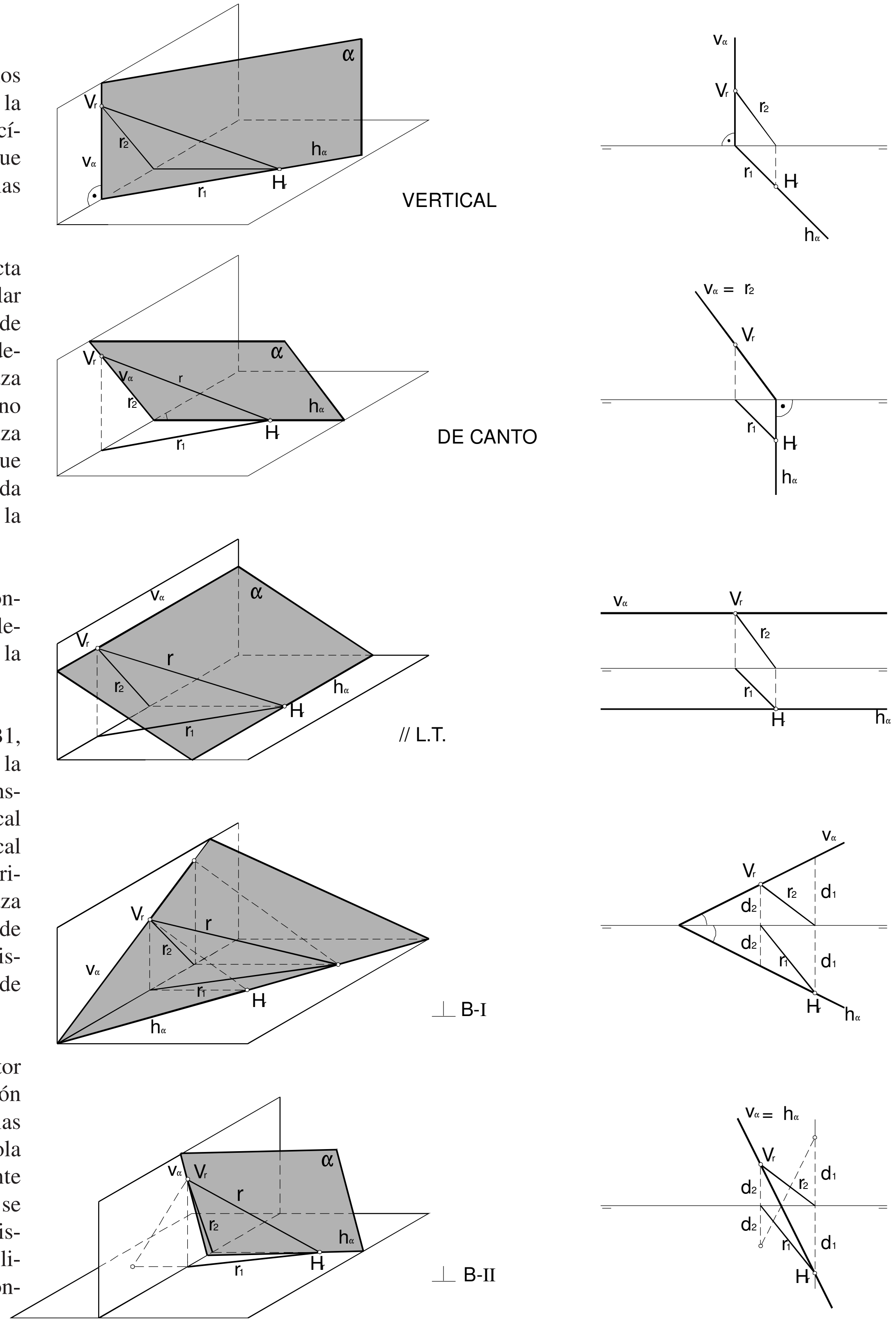


Figura 24

Determinación de un plano.

Un plano puede venir determinado por dos rectas paralelas, dos rectas que se cortan, un punto y una recta o por tres puntos no alineados. Todas estas posibilidades se representan en la figura 25.

La determinación en el sistema diédrico de las trazas del plano a partir de los elementos que lo determinan se hace conforme a las relaciones indicadas en las figuras 26 a 35.

Si el plano viene determinado por dos rectas, sus trazas horizontal y vertical vendrán determinadas uniendo las trazas verticales y horizontales de ambas rectas (figuras 26 a 29). Si las rectas son paralelas o se cortan entonces las dos trazas así construídas se cortarán en un punto sobre la línea de tierra que será el vértice del plano. Nótese que, si las rectas iniciales se cruzasen, no existiría ningún plano que contuviese a ambas y las rectas construídas según este proceso no se cortarían sobre la línea de tierra y no serían las trazas de ningún plano.

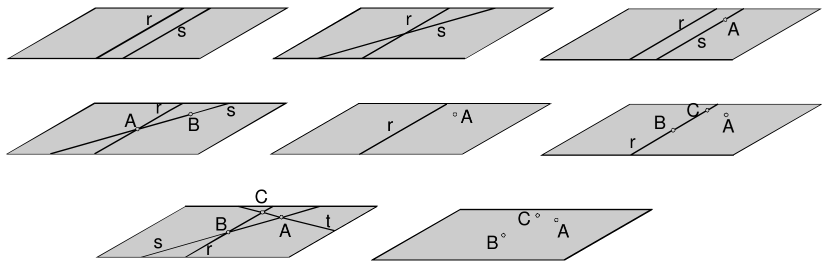


Figura 25

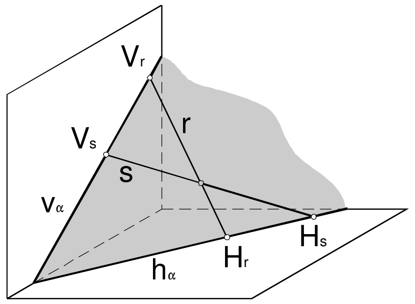


Figura 26

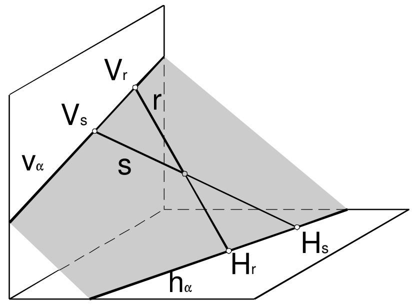


Figura 27

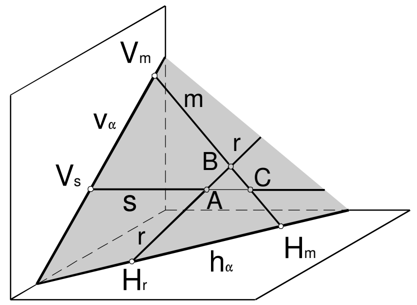


Figura 28

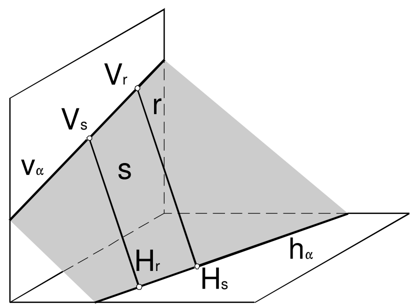


Figura 29

Cuando una de las trazas de las rectas cae fuera del papel, podemos emplear el vértice del plano para determinar la traza correspondiente del plano como se muestra en las figuras 30 y 31.

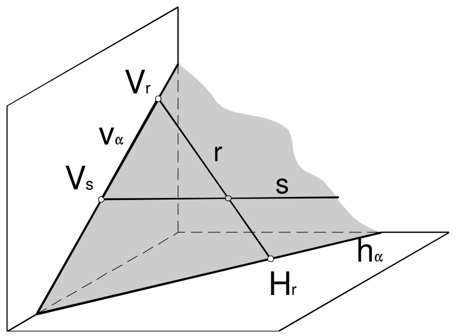


Figura 30

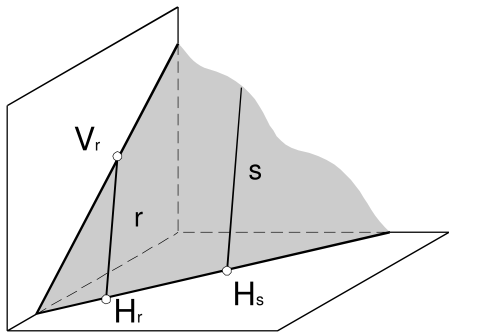


Figura 31

En el caso de rectas paralelas a uno de los planos principales faltan las trazas correspondientes pero se suple porque la traza correspondiente del plano debe ser paralela a las proyecciones de las rectas. Por ejemplo, en la figura 33 se muestran dos rectas *r* y *s* horizontales. En este caso la traza horizontal del plano que definen será paralela a las proyecciones horizontales r_1 y s_1 de las rectas.

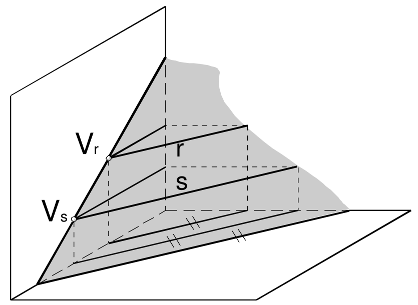


Figura 33

Otro procedimiento para determinar las trazas del plano cuando algunas trazas de las rectas quedan fuera del papel, consiste en seccionar por planos horizontales y verticales como se muestra en las figuras 34 y 35. En el ejemplo de la figura 35 se encuentra de esta manera una recta *m* paralela a la traza horizontal del plano sin necesidad de conocer la traza vertical V_r de la recta *r*.

Si las rectas que nos definen el plano son justamente una horizontal *h* y una frontal *f* se determinan las trazas del plano teniendo en cuenta que son paralelas a las proyecciones de las rectas. Por ejemplo, en la figura 32 la traza h_α será paralela a la proyección horizontal h_1 de la recta h, la cual deberá pasar además por la traza horizontal H_f de *f*.

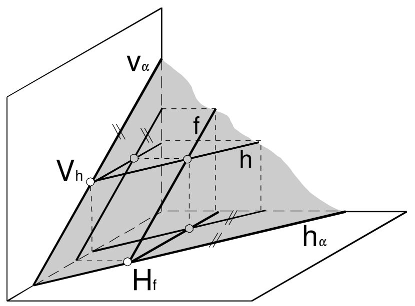


Figura 32

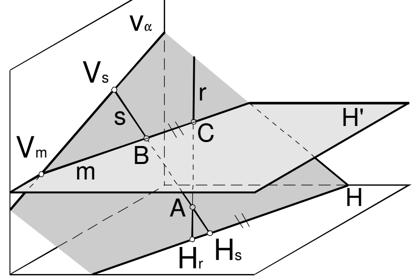


Figura 34

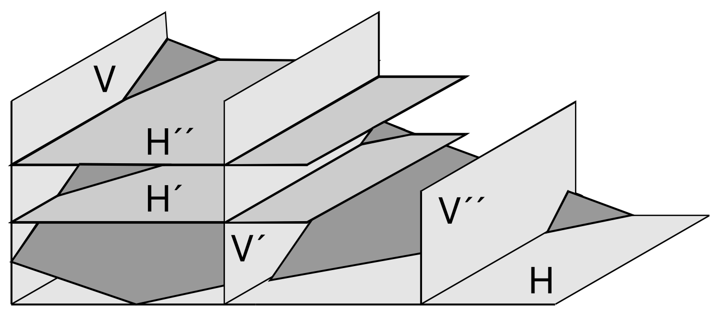


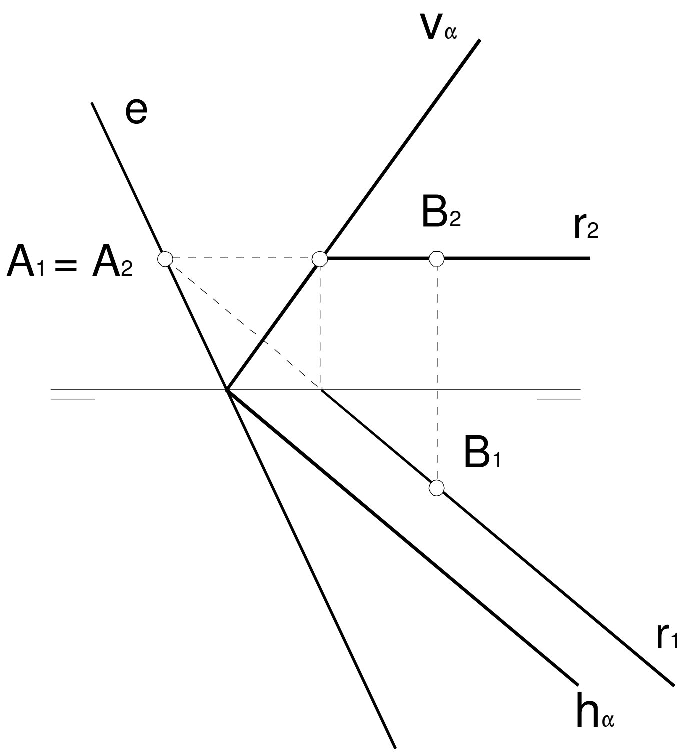
Figura 35

Posiciones relativas.
Paralelismo.

En la figura 36 se muestran diferentes casos de paralelismo: rectas paralelas, cuyas proyecciones serán paralelas y planos paralelos, cuyas trazas serán paralelas. No sólo las trazas de planos paralelos serán paralelas entre sí sino que además serán paralelas, las horizontales h_α a las proyecciones horizontales h_1 de las rectas horizontales y las verticales v_α a las proyecciones verticales f_2 de las rectas frontales.

Nótese que, en general, las rectas contenidas en dos planos paralelos, simplemente se cruzan. Para que además sean paralelas, deben ser paralelas sus proyecciones como se indica en la figura 36 (3).

En la figura 36 (4) se indica el caso especial de planos paralelos a la línea de tierra. Para comprobar si son además paralelos entre sí hay que recurrir al tercer plano de proyección. Si, teniendo sus trazas horizontal y vertical paralelas a la línea de tierra, las terceras trazas de ambos planos son paralelas, entonces los planos lo son. Otra forma alternativa es la construcción que está indicada en la misma figura que consiste en trazar rectas de perfil en los dos planos y unir sus trazas. Si las rectas así construidas uniendo trazas verticales y uniendo trazas horizontales se cortan en un mismo punto, entonces son paralelos.



***Relación de afinidad entre las proyecciones vertical y horizontal de una figura plana**:*

Las dos proyecciones de una figura contenida en un plano α guardan una relación de afinidad, con eje la recta e, intersección del plano α con el segundo Bisector; y dirección de afinidad perpendicular a la Línea de Tierra.

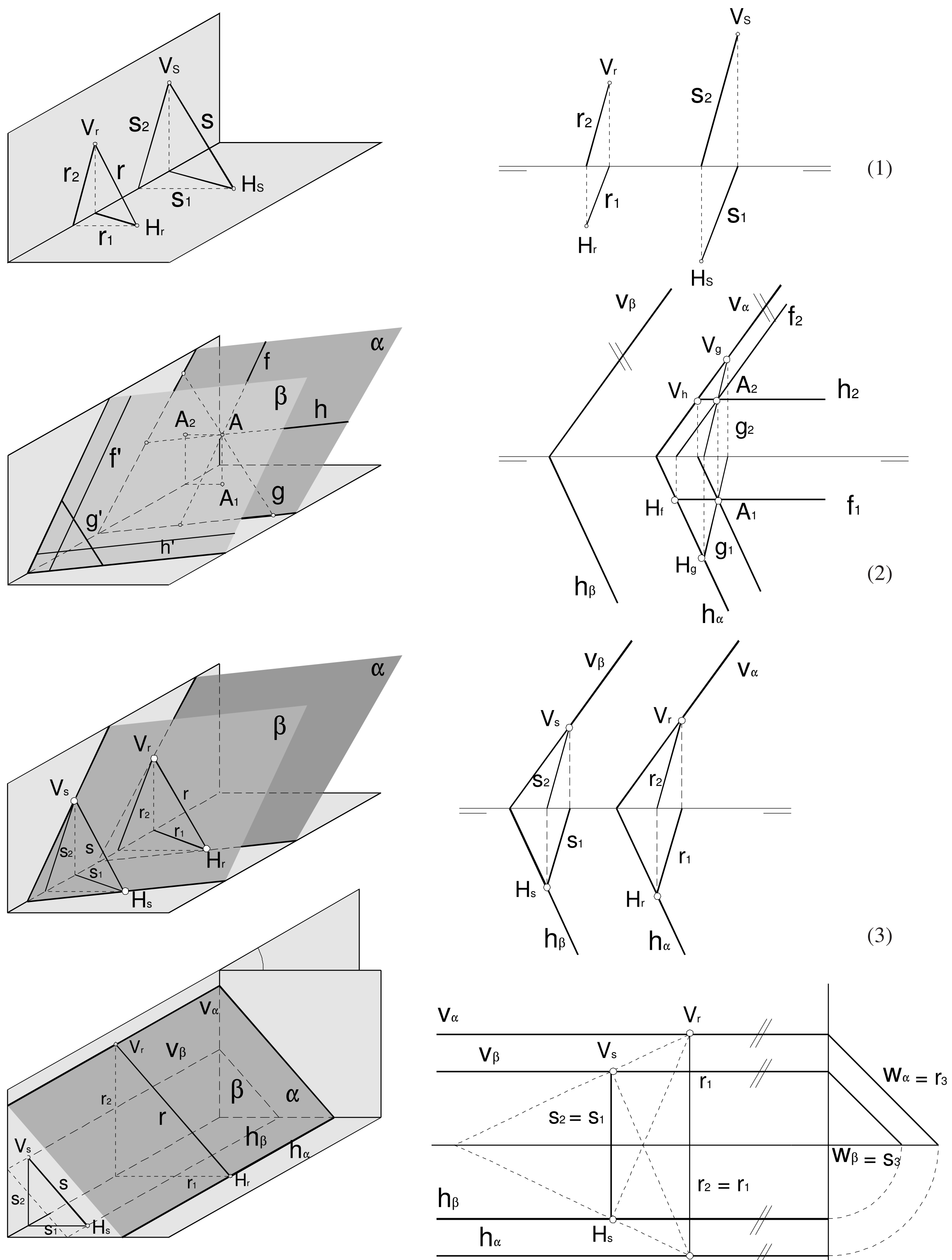


Figura 36

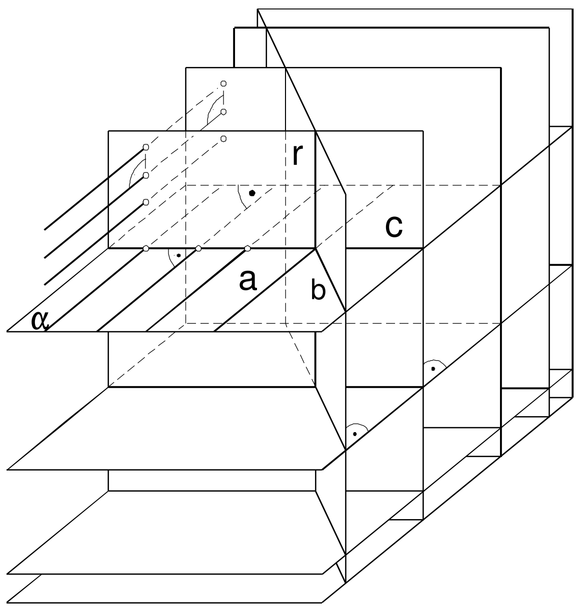
Perpendicularidad.

Se estudian tres casos:

- entre dos planos
- entre dos rectas
- entre recta y plano.

Una recta perpendicular a un plano es ortogonal a todas las rectas contenidas en dicho plano. Nótese que, por otro lado, basta que una recta sea perpendicular a dos rectas no paralelas situadas en un plano para que lo sea al plano.

Si una recta es perpendicular a un plano, también lo es a todos los planos paralelos. Recíprocamente, si un plano es perpendicular a una recta, también lo es a todas las rectas paralelas a la primera. Todo esto está ilustrado en la figura 37.



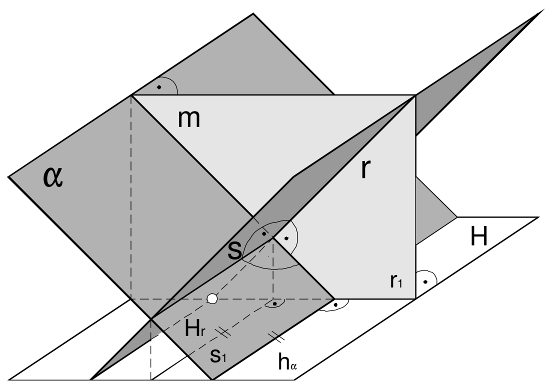
Si una recta r es perpendicular a un plano α es perpendicular a todas las rectas a, b, c... contenidas en él.

Para que r sea perpendicular a α, basta que lo sea a dos rectas a y b no paralelas situadas en α.

Si una recta (plano) es perpendicular a un plano (recta) también lo es a todos sus planos (rectas) paralelos.

Dos planos (rectas) perpendiculares a dos rectas (planos) son ortogonales entre sí son también perpendiculares entre sí.

Figura 37



Teorema de las tres perpendiculares:

Si dos rectas r y s son perpendiculares y una de ellas, la s por ejemplo, es paralela o pertenece a un plano H, sus proyecciones r_1 y s_1 sobre H son perpendiculares.

$$\left.\begin{array}{l} r \perp s \\ s \,/\!/\, H \end{array}\right\} \Rightarrow r \perp H \Rightarrow r \perp h_\alpha \Rightarrow r_1 \perp h_\alpha \Rightarrow r_1 \perp s_1$$

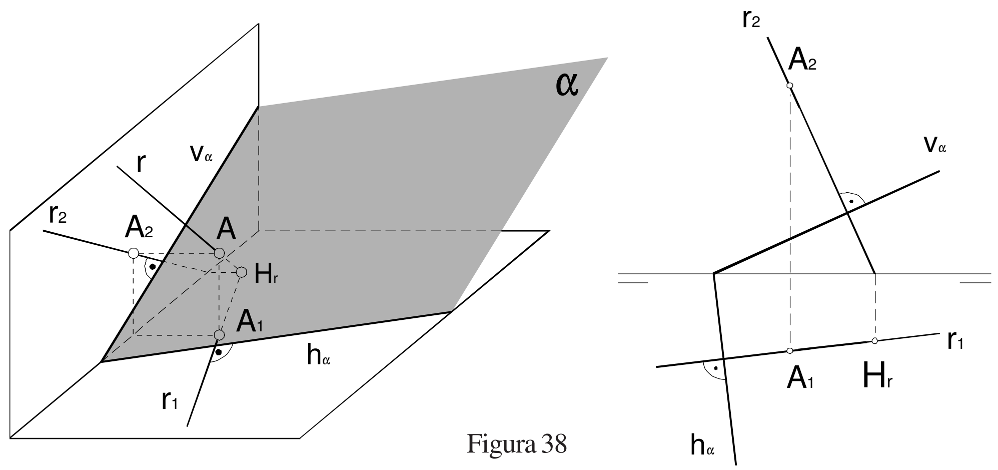


Figura 38

Las proyecciones horizontal y vertical de una recta perpendicular a un plano son ortogonales a las trazas de dicho plano (figura 38) como se desprende del Teorema de las Tres Perpendiculares. Nótese que el teorema nada nos asegura sobre planos que no sean paralelos a ninguna de las rectas.

Un plano α es perpendicular a otro plano β si uno de ellos contiene una recta r perpendicular al otro o bien si una recta r es perpendicular a un plano α. Todos los planos del haz que pasan por r (figura 39) son perpendiculares a α . Dos rectas r y s serán perpendiculares si por una de ellas podemos trazar un plano α perpendicular a la otra (figura 40).

Figura 39

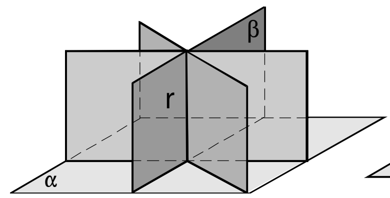
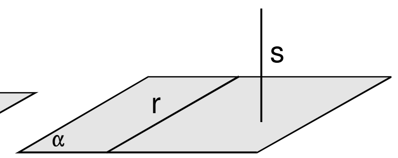


Figura 40



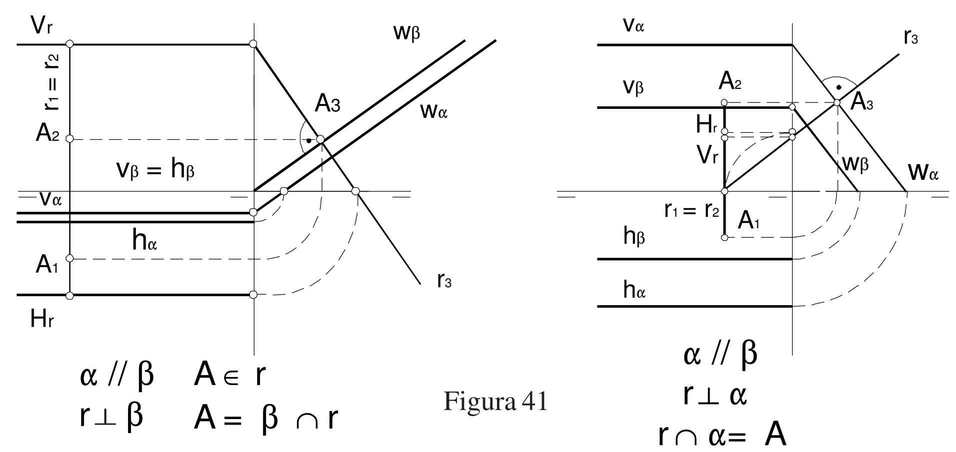


Figura 41

Recta r perpendicular a un plano que pasa por la línea de tierra o es paralelo a ella. Además de ser perpendicualres sus proyecciones r_1 y r_2 a las trazas horizontal y vertical, también debe serlo su tercera proyección r_3 a la tercera traza del plano.

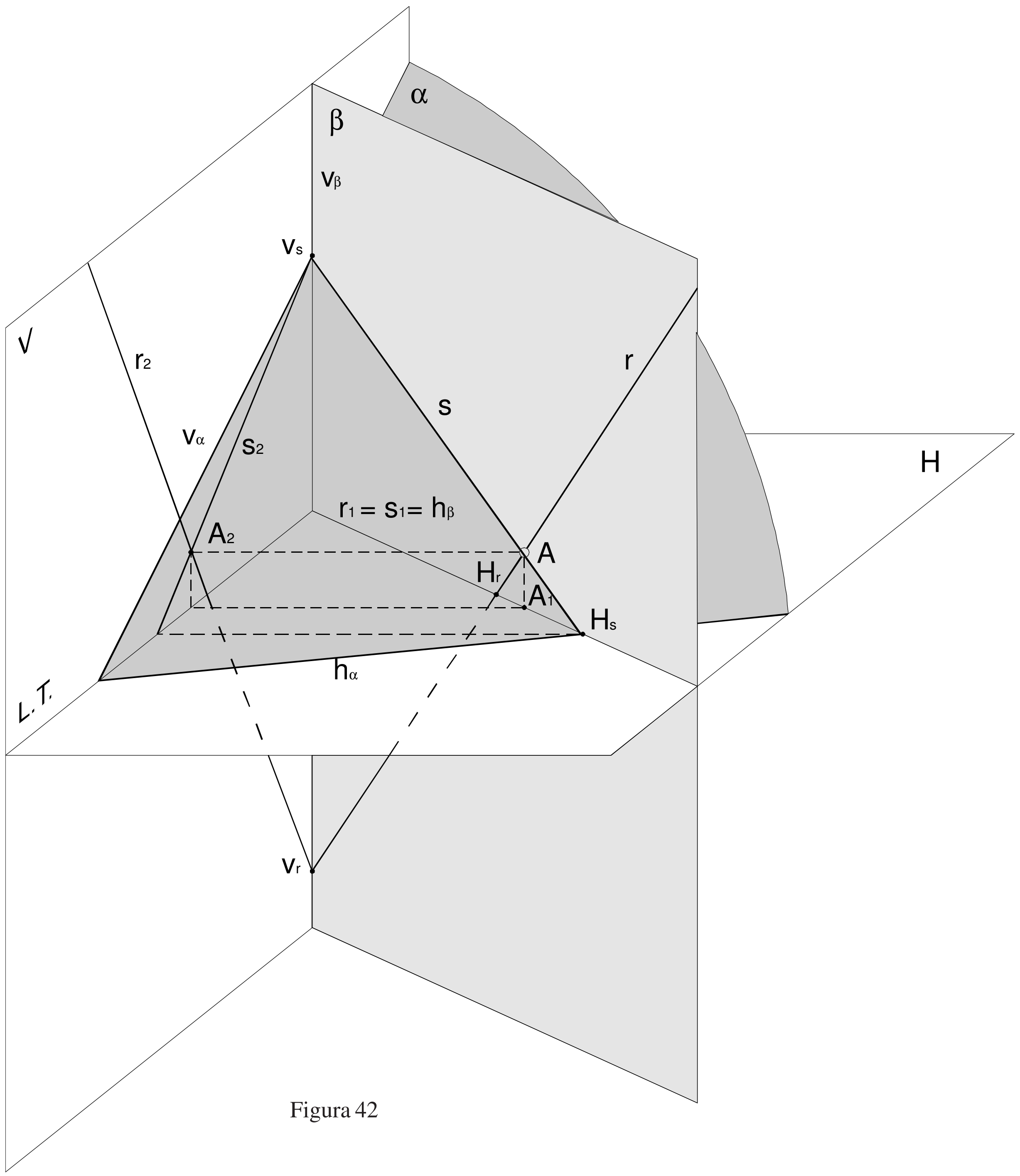


Figura 42

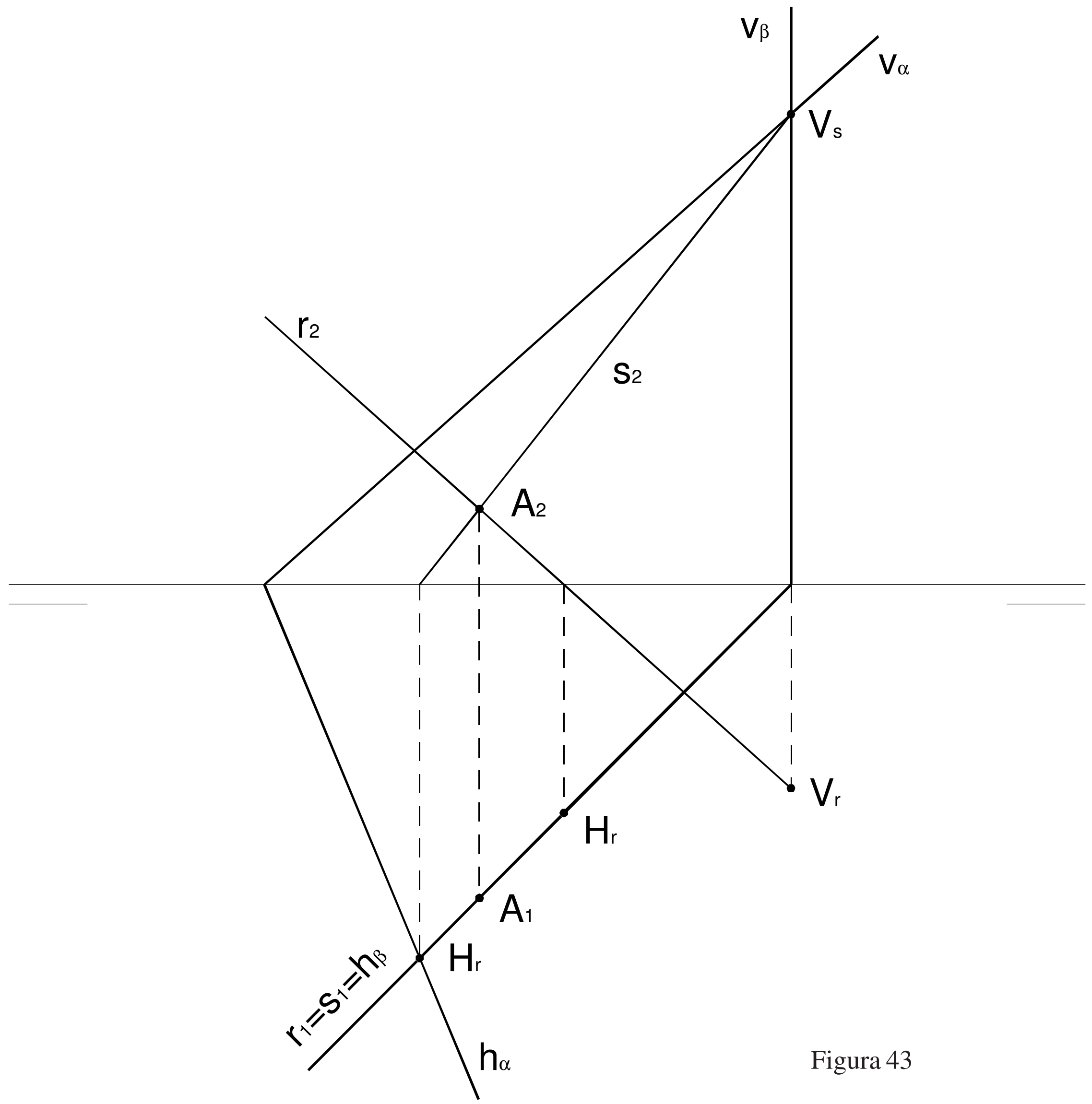


Figura 43

Intersección de plano y recta

El punto A intersección de una recta r y un plano α puede hallarse mediante el procedimiento ilustrado en las figuras 42 y 43. Trazamos el plano β proyectante sobre H que contiene a la recta r y cuya traza horizontal coincide con la proyección horizontal r_1 de la recta. Su traza vertical será perpendicular a la línea de tierra. Encontramos entonces fácilmente la recta s intersección de los dos planos, puesto que su traza horizontal H_r deberá estar en la intersección de h_α y h_β y su vertical V_m en la de v_α y v_β. El punto de intersección de las rectas r y s es el punto A buscado.