

## REPASO DE VALORES ABSOLUTOS, ECUACIONES Y DESIGUALDADES

1. Indique los valores  $x \in \mathbb{R}$  para los que se satisfacen las siguientes *igualdades*:

a)  $x^2 - 9x + 20 = 0$ ,

b)  $x^2 + 2x = 1$ ,

c)  $x^4 - 4 = 0$ ,

d)  $\sqrt[3]{1+x} = 2$ ,

e)  $-1 + \sin x = 0$ ,

f)  $-1 + \log \frac{x}{e} = 0$ .

2. Encuentre todos los valores  $x \in \mathbb{R}$  que satisfagan las siguientes *desigualdades*:

a)  $|4x + 3| \leq 1$ ,

b)  $|x + 1| \leq |x - 1|$ ,

c)  $|x^2 - 5x + 6| < 2$ ,

d)  $|x + 1| + |x + 3| < 5$ ,

e)  $\frac{x-1}{(x+2)(x-3)} > 0$ ,

f)  $\frac{x^2-2}{x^2-4} \leq 0$ ,

g)  $\frac{x^2+4}{x^2-2x} > 0$ ,

h)  $\sqrt{x^2-6x+9} < 1$ .

3. Decida si las siguientes desigualdades son válidas o no para *todos* los valores posibles de  $x$  e  $y$  que se indican a continuación:

a)  $|x - y| \leq |x| + |y|$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ .

b)  $(1 + x)^2 \geq 1 + x^2$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

c)  $x^2 - x + 1 \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

d)  $x^4 + \frac{1}{x^4} \geq 2$  para todo  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

## INDUCCIÓN

4. Demuestre por inducción que las siguientes fórmulas son ciertas para todo número  $n \in \mathbb{N}$ :

a)  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ .

b)  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$ .

c)  $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1}$ .

5. Demuestre por inducción las siguientes afirmaciones:

a)  $2^n > n^2$ , para todo  $n \geq 5$ .

b) *Desigualdad de Bernoulli*:  $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ , para todo  $x \geq -1$ ,  $n \geq 1$ .

6. Compruebe que  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ ; esto nos da  $\cos 2x$  como un polinomio cuadrático de  $\cos x$ . Usando la inducción, demuestre que, en general,

$$\cos nx = P_n(\cos x), \quad n \geq 1,$$

donde  $P_n$  es cierto polinomio de grado  $n$ .

(*Pista:* Aplique la fórmula para el coseno de una suma a  $\cos(n+1)x$  y a  $\cos(n-1)x$ ; intente usarlas para escribir  $\cos(n+1)x$  en términos de  $\cos nx$  y  $\cos(n-1)x$  y aplique la inducción.)

---

COTAS SUPERIORES E INFERIORES. ÍNFIMOS Y SUPREMOS

7. Para cada uno de los conjuntos dados abajo, indique una cota superior y una inferior. Luego determine razonadamente el ínfimo y el supremo de cada uno de ellos. Halle también el máximo y el mínimo si existen.

a)  $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\}$ ,      b)  $\{0, 1; 0, 01; 0, 001; 0, 0001; \dots\}$ ,      c)  $\{\cos x + 1 : x \in \mathbb{R}\}$ .

8. Indique si los siguientes conjuntos están acotados inferior y superiormente y, en su caso, halle el ínfimo, el supremo, el máximo y el mínimo.

a)  $\{x \in \mathbb{R} : |x - 3| \leq 1\}$ ,      b)  $\{x \in \mathbb{R} : x^3 < 27\}$ ,  
c)  $\{x^2 - 6x + 9 : x \in \mathbb{R}\}$ ,      d)  $\{(-1)^n - n^{-1} : n \in \mathbb{N}\}$ .