CESMA BUSINESS SCHOOL

MATEMÁTICAS FINANCIERAS.

TEMA 3

CAPITALIZACIÓN COMPUESTA

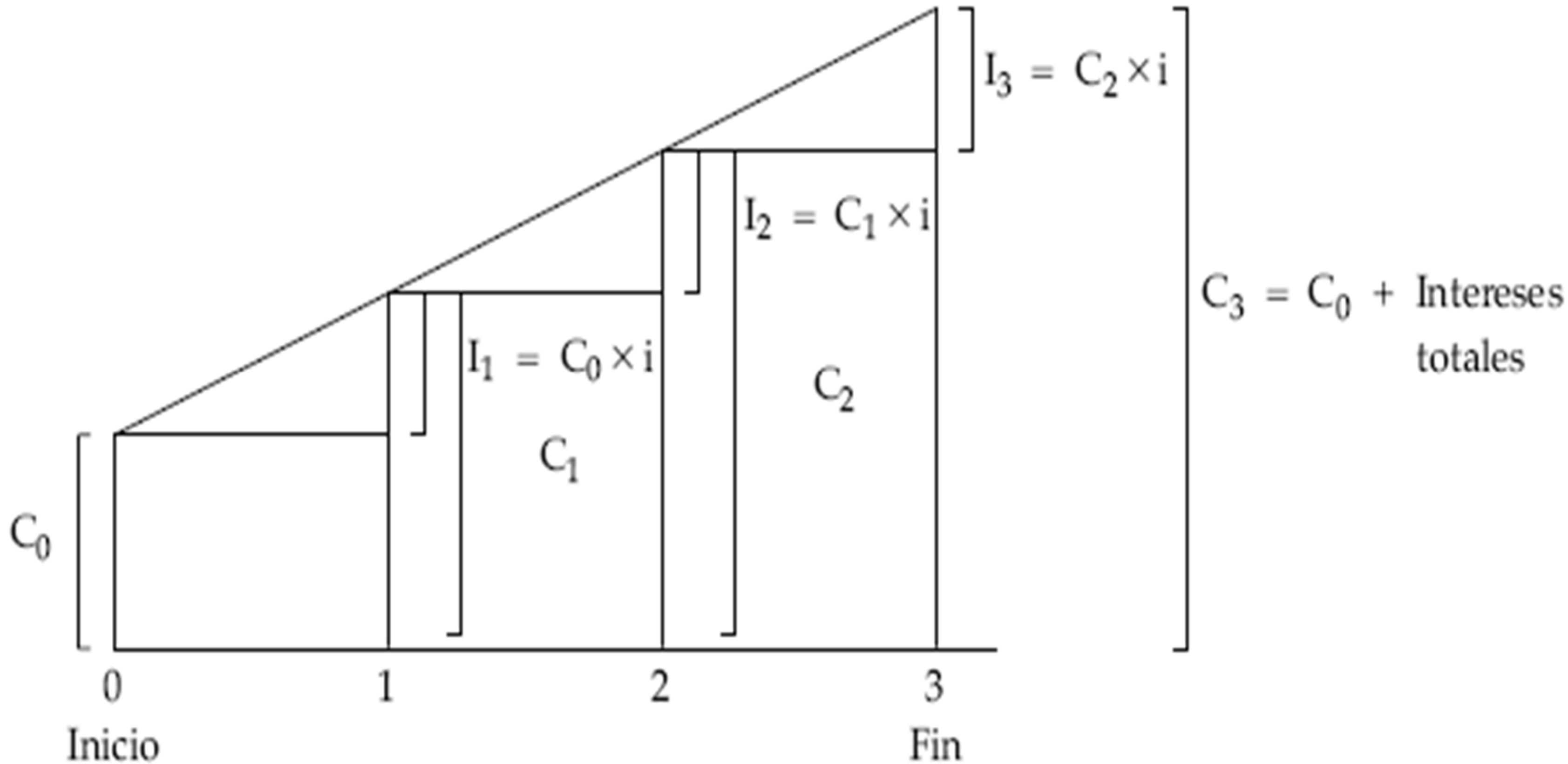
Javier Bilbao García

1.- Capitalización Compuesta

- **Definición:** Operación financiera que persigue sustituir un capital por otro equivalente con vencimiento posterior aplicando una Ley Financiera de Capitalización Compuesta
- **Descripción:** El capital final (montante) (C_n) se forma por la **suma** al **capital inicial** (C_0) **de los intereses** que periódicamente se van generando y que se van acumulando al mismo durante el tiempo que dure la operación (n), pudiéndose disponer de ellos al final junto con el capital inicialmente invertido.
- **Características:** Los **intereses** son **productivos**, lo que significa que:
  - A medida que se generan se acumulan al capital inicial para producir nuevos intereses en los períodos siguientes.
  - Los intereses de cualquier período siempre los genera el capital existente al inicio de dicho período.

1.- Capitalización Compuesta

Gráficamente y para una operación de tres períodos:



1.- Capitalización Compuesta

- **DESARROLLO DE LA OPERACIÓN**: El capital al final de cada período es el resultado de añadir al capital existente al inicio del mismo los intereses generados durante dicho período. De esta forma, la evolución del montante conseguido en cada momento es el siguiente:
- Momento 0: C_0
  Momento 1: $C_1 = C_0 + I_1 = C_0 + C_0 \times i = C_0 \times (1 + i)$
  Momento 2: $C_2 = C_1 + I_2 = C_1 + C_1 \times i = C_1 \times (1 + i) =$
  $= C_0 \times (1 + i) \times (1 + i) = C_0 \times (1 + i)^2$
  Momento 3: $C_3 = C_2 + I_3 = C_2 + C_2 \times i = C_2 \times (1 + i) =$
  $= C_0 \times (1 + i)^2 \times (1 + i) = C_0 \times (1 + i)^3$
  …
  Momento n: $\mathbf{C_n = C_0 \times (1 + i)^n}$ Fórmula Fundamental de la CC

1.- Capitalización Compuesta

- Esta expresión **permite calcular el** capital final o **montante** (C_n) en régimen de compuesta, conocidos el capital inicial (C_0), el tipo de interés (i) y la duración (n) de la operación.
- Esta expresión es aplicable cuando el tipo de interés de la operación no varía. En caso de que lo hiciese habría que operar con el tipo vigente en cada período.
- A partir de la fórmula fundamental de la capitalización compuesta, además de calcular capitales finales, se podrá, conocidos tres datos cualesquiera, obtener el cuarto restante.

1.- Capitalización Compuesta

- Cálculo del capital inicial: Se parte de la fórmula de cálculo del capital final y conocidos éste, la duración y el tanto de interés, basta con despejar de la misma: $C_n = C_0 \times (1 + i)^n$ de donde se despeja C_0

- Cálculo de los intereses Conocidos los capitales inicial y final, se obtendrá por diferencia entre ambos:

$$I_n = C_n - C_0$$

1.- Capitalización Compuesta

Cálculo del tipo de interés: Si se conoce el resto de elementos de la operación: capital inicial, capital final y duración, basta con tener en cuenta la fórmula general de la capitalización compuesta y despejar la variable desconocida.

$C_n = C_0 \times (1 + i)^n$. Los pasos a seguir son los siguientes:

1.- Pasar el C_0 al primer miembro:

$$\frac{C_n}{C_0} = (1 + i)^n$$

2.- Quitar la potencia (extrayendo raíz n a los dos miembros)

3.- Despejar el tipo de interés

1.- Capitalización Compuesta

Cálculo de la duración: Conocidos los demás componentes de la operación: capital inicial, capital final y tipo de interés, basta con tener en cuenta la fórmula general de la capitalización compuesta y despejar la variable desconocida.

Punto de partida: $C_n = C_0 \times (1 + i)^n$

Pasar el C0 al primer miembro

Extraemos logaritmos a ambos miembros

Aplicamos propiedades de los logaritmos

Despejar la duración

2.- Tantos Equivalentes

Dos tantos cualesquiera, expresados en distintas unidades de tiempo, son tantos equivalentes **cuando aplicados a un mismo capital inicial y durante un mismo período de tiempo producen el mismo interés o generan el mismo capital final o montante.**

En capitalización simple, la variación en la frecuencia del cálculo (y abono) de los intereses suponía cambiar el tipo de interés a aplicar para que la operación no se viera afectada finalmente. Por ello, los tantos de interés equivalentes en simple son proporcionales, es decir, cumplen: $\mathbf{i = i_k \times k}$

Esta relación de proporcionalidad no es válida en compuesta, pues al irse acumulando los intereses generados al capital inicial, el cálculo de intereses se hace sobre una cantidad cada vez más grande; así, cuanto mayor sea la frecuencia de capitalización, antes se acumularán los intereses y antes generarán nuevos intereses, por lo que existirán diferencias en función de la frecuencia de acumulación de los mismos al capital para un tanto de interés dado.

2.- Tantos Equivalentes

Este carácter acumulativo de los intereses tiene que compensarse con la aplicación de un tipo más pequeño que el proporcional en función de la frecuencia de cómputo de intereses.

Ejemplo: determinar el montante resultante de invertir 1.000 euros durante 1 año en las siguientes condiciones:

Interés anual del 12% $C_n = 1.000 \times (1 + 0{,}12)^1 = 1.120{,}00$

Interés semestral del 6% $C_n = 1.000 \times (1 + 0{,}06)^2 = 1.123{,}60$

Interés trimestral del 3% $C_n = 1.000 \times (1 + 0{,}03)^4 = 1.125{,}51$

Los resultados no son los mismos, debido a que la capitalización de los intereses se está realizando con diferentes frecuencias manteniendo la proporcionalidad en los diferentes tipos aplicados.

Para conseguir que, cualquiera que sea la frecuencia de capitalización, el montante final siga siendo el mismo, es necesario cambiar la ley de equivalencia de los tantos.

2.- Relación de Tantos Equivalentes

Los tantos en compuesta, para que resulten equivalentes, han de guardar la siguiente relación: $\mathbf{1 + i = (1 + i_k)^k}$, donde k es la frecuencia de capitalización, que indica:

- El número de partes iguales en las que se divide el período de referencia que se tome (habitualmente el año).
- Cada cuánto tiempo se hacen productivos los intereses, esto es, cada cuánto tiempo se acumulan los intereses, dentro del período, al capital para producir nuevos intereses.

Esta relación se obtiene a partir de la definición de equivalencia ya vista, obligando a que un capital (C0) colocado un determinado período de tiempo (n años) genere el mismo montante (Cn) con independencia de la frecuencia de acumulación de intereses (i o ik)

2.- Relación de Tantos Equivalentes

Utilizando el tanto anual i, el montante obtenido será:

$$C_n = C_0 \times (1 + i)^n$$

Utilizando el tanto k-esimal ik, el montante obtenido será:

$$C_n = C_0 \times (1 + i_k)^{nk}$$

Si se quiere que el montante sea el mismo en los dos casos, se tiene que producir la igualdad entre los resultados de ambas operaciones, esto es, dado que la operación es la misma – sólo cambia la frecuencia de cálculo de los intereses–, se debe conseguir el mismo capital final en ambos casos, por tanto, obligando a que se cumpla esa igualdad de montantes:

$$\mathbf{C_0 \times (1 + i)^n = C_0 \times (1 + i_k)^{nk}}$$

Simplificando la igualdad, eliminando C0 y la potencia n:

$C_0 \times (1 + i)^n = C_0 \times (1 + i_k)^{nk}$,quedando finalmente: $(1 + i\ ) = (1 + i_k)^k$

expresión que indica la relación en la que han de estar los tantos, i e ik, para que produzcan el mismo efecto, es decir, para que sean equivalentes.

Así, $\mathbf{i = (1 + i_k)^k - 1}$ e $\mathbf{i_k = (1 + i)^{1/k} - 1}$

3.- Tanto Nominal (Jk)

Si queremos que, aun trabajando en diferentes unidades de tiempo, los resultados finales sigan siendo idénticos y se es consciente de la dificultad que supone conocer y aplicar la expresión de equivalencia, es necesario emplear un tanto que permita pasar fácilmente de su unidad habitual (en años) a cualquier otra diferente y que financieramente resulte correcta: **el tanto nominal**: tanto teórico que se obtiene multiplicando la frecuencia de capitalización k por el tanto k-esimal:

$$\mathbf{J_k = i_k \times k}$$

Sirve para pasar fácilmente de un tanto referido al año (el tanto nominal) a un tanto efectivo k-esimal, pués el tanto nominal es proporcional.

Así pues, en compuesta, los tantos de interés pueden ser tantos efectivos (i o ik) o nominales (Jk), teniendo en cuenta que el tanto nominal (también conocido como anualizado) no es un tanto que realmente se emplee para operar: a partir de él se obtienen tantos efectivos con los que sí se harán los cálculos necesarios.

3.- Tanto Nominal (Jk)

Relaciones existentes entre tantos nominales y tantos efectivos anuales:

Tabla de conversión de tantos nominales a tantos anuales efectivos (TAE)

La fórmula de cálculo es: $i = (1 + i_k)^k – 1 = (1 + J_k/k)^k – 1$

El tipo de interés efectivo anual correspondiente a un tipo nominal aumenta a medida que aumenta el número de capitalizaciones anuales. Es decir, cada tipo nominal está calculado para trabajar en una determinada unidad de tiempo y sólo en ésa; si se quiere cambiar a otra unidad distinta, habrá que volver a recalcular el tanto nominal, para que el resultado final no cambie.

Tabla de conversión de tantos efectivos anuales (TAE) a tantos nominales

La fórmula de cálculo es: $J_k = i_k \times k = [(1 + i)^{1/k} – 1] \times k$

El tipo de interés nominal correspondiente a un tipo efectivo anual disminuye a medida que aumenta el número de capitalizaciones anuales.

Igual que antes, si queremos conseguir un mismo tanto efectivo anual a partir de un tanto nominal, éste deberá ser diferente en función de la frecuencia de capitalización para la cual se haya calculado.

4.- Descuento Compuesto

CONCEPTO. Tiene por objeto sustituir un capital futuro por otro equivalente con vencimiento presente aplicando una ley financiera de descuento compuesto. Operación inversa a la de capitalización.

CARACTERÍSTICAS DE LA OPERACIÓN

Los intereses son productivos, lo que significa que:

- A medida que se generan se restan del capital de partida para producir (y restar) nuevos intereses en el futuro y, por tanto.
- Los intereses de cualquier período siempre los genera el capital del período anterior, al tanto de interés vigente en dicho período.

El punto de partida es un capital futuro conocido (Cn) cuyo vencimiento se quiere adelantar. Se deben conocer las condiciones en las que se quiere hacer esta anticipación: duración de la operación (tiempo que se anticipa el capital futuro) y tanto aplicado.

4.- Descuento Compuesto

El capital que resulte de la operación de descuento (capital actual o presente C0) será de **cuantía menor**, siendo la diferencia entre ambos capitales los intereses que un capital deja de tener por anticipar su vencimiento.

Si trasladar un capital desde el presente al futuro implica añadirle intereses, hacer la operación inversa, anticipar su vencimiento, supondrá la minoración de esa misma carga financiera.

Se distinguen dos clases de descuento según cuál sea el capital que se considera en el cómputo de los intereses que se generan en la operación:

Descuento racional.

Descuento comercial.

4.1- Descuento Compuesto Racional

Para anticipar el vencimiento del capital futuro se considera generador de los intereses de un período **el capital al inicio de dicho período**, utilizando el tipo de interés vigente en dicho período. El proceso a seguir será el siguiente:

Paso a paso, el desarrollo de la operación es como sigue:

Período n: C_n

Período n–1: $C_{n-1} = C_n - I_n = C_n - C_{n-1} \times I; \; C_{n-1} \times (1 + i) = C_n$

$$C_{n-1} = \frac{C_n}{(1 + i)}$$

- Período n–2: $C_{n-2} = C_{n-1} - I_{n-1} = C_{n-1} - C_{n-2} \times I; \; C_{n-2} \times (1 + i) = C_{n-1}$

$$C_{n-2} = \frac{C_{n-1}}{(1 + i)^1} = \frac{C_n}{(1 + i)^2}$$

4.1- Descuento Compuesto Racional

Período n–3: $C_{n-3} = C_{n-2} - I_{n-2} = C_{n-2} - C_{n-3} \text{ x } I;\ C_{n-3} \text{ x } (1 + i) = C_{n-2}$

$$C_{n-3} = \frac{C_{n-2}}{(1+i)^1} = \frac{C_n}{(1+i)^3}$$

Período 0: $C_0 = C_1 - I_1 = C_1 - C_0 \text{ x } I;\ C_0 \text{ x } (1 + i) = C_1$

$$C_0 = \frac{C_1}{1+i} = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

Los intereses se calculan finalmente sobre el capital inicial, es decir, sobre el que resulta de la anticipación del capital futuro. Es una operación de capitalización compuesta, con la particularidad de que el punto de partida ahora es el capital final y se pretende determinar el capital actual.

4.1- Descuento Compuesto Racional

De otra forma, partiendo de la expresión fundamental de la capitalización compuesta, $C_n = C_0 \times (1 + i)^n$, se despeja el capital inicial (C_0):

$$C_0 = \frac{C_n}{(1 + i)\hat{}n}$$

Una vez calculado el capital inicial, por diferencia entre el capital de partida y el inicial obtenido, se obtendrá el interés total de la operación (Dr), o descuento propiamente dicho:

$$Dr = C0 – Cr = Cn – Cn / (1 + i)\hat{}n = Cn * (1 – 1 /(1+i)\hat{}n)$$

O lo que es lo mismo,

$$D_r = C_n \times [1 - (1 + i)^{-n}]$$

4.2- Descuento Compuesto Comercial

Se considera generador de los intereses de un período **el capital al final de dicho período**, utilizando el tipo de descuento (d) vigente en dicho período. El proceso a seguir será el siguiente:

Período n: Cn

Período n-1: $C_{n-1} = C_n - I_n = C_n - C_n \times d = C_n \times (1 - d)$

Período n-2: $C_{n-2} = C_{n-1} - I_{n-1} = C_{n-1} - C_{n-1} \times d = C_{n-1} \times (1 - d) =$

$= C_n \times (1 - d) \times (1 - d) = C_n \times (1 - d)^2$

Período n-3: $C_{n-3} = C_{n-2} - I_{n-2} = C_{n-2} - C_{n-2} \times d = C_{n-2} \times (1 - d) =$

$= C_n \times (1 - d)^2 \times (1 - d) = C_n \times (1 - d)^3$

Período 0: $C_0 = C_n \times (1 - d)^n$

Una vez calculado el capital inicial, por diferencia entre el capital de partida y el inicial obtenido, se obtendrá el interés total de la operación (Dc): $D_c = C_n - C_0 = C_n \times [1 - (1 - d)^n]$

4.3- Tantos de Interés y de Descuento Compuesto

Estudiados los dos procedimientos de descuento, se intuye que descontando un capital cualquiera, el mismo tiempo y con el mismo tanto, los resultados serán diferentes según se realice por un procedimiento u otro. Por tanto, sería conveniente encontrar la relación que deben guardar los tantos de interés y los tantos de descuento para que el resultado de la anticipación fuera el mismo, cualquiera que sea el modelo de descuento empleado. Se trata de buscar la **relación de equivalencia** entre tantos de descuento y de interés.

Ésta debe conseguir que el resultado final sea el mismo en uno y otro caso, es decir, $\mathbf{D_r = D_c}$,

Por tanto: Cn x (1-(1/(1+i)ˆn) = Cn x (1-(1-d)ˆn)

4.3- Tantos de Interés y de Descuento Compuesto

simplificando, dividiendo por Cn: $1 - 1/(1+i)^n) = 1 - (1-d)^n$

Restando la unidad y, posteriormente, multiplicando por – 1:

$$1 / (1+i)^n = (1-d)^n$$

Si se extrae raíz n a la ecuación: $1-d = 1 / 1+i$

El tanto de descuento comercial d equivalente al tanto i será: $d = i / 1+i$

Tipo de interés equivalente a un d: $i = d / 1-d$

La relación de equivalencia es **independiente** de la duración de la operación. Por tanto, para un tanto de interés solamente habrá un tipo de descuento que produzca el mismo efecto (sea equivalente) y viceversa, sin tener en cuenta el tiempo en la operación.

5- Equivalencia de Capitales en Compuesta

Principio de equivalencia de capitales: Para comprobar si dos o más capitales resultan indiferentes (equivalentes) deben tener el mismo valor en el momento en que se comparan

El principio de equivalencia financiera permite determinar si dos o más capitales situados en distintos momentos resultan indiferentes o, por el contrario, hay preferencia por uno o por otro

La diferencia fundamental entre la equivalencia en simple y en compuesta viene dada porque en régimen de compuesta **la fecha** donde se realice la equivalencia **no** afecta al resultado final de la operación, por tanto, **si la equivalencia se cumple en un momento dado, se cumple en cualquier punto y, si no se cumple en un momento determinado, no se cumple nunca.**

5- Equivalencia de Capitales en Compuesta

La sustitución de unos capitales por otro u otros de vencimientos y/o cuantías diferentes a las anteriores sólo se podrá llevar a cabo si financieramente resultan ambas alternativas equivalentes.

Para ver si dos alternativas son financieramente equivalentes se tendrán que valorar en un mismo momento de tiempo y obligar a que tengan el mismo valor. Casos posibles:

Determinación del capital común: Cuantía C de un capital único que vence en t, conocido, y que sustituye a C_1, C_2, ... , C_n, con vencimientos en t_1, t_2, ... ,t_n, respectivamente, todos ellos conocidos.

Determinación del vencimiento común: Momento de tiempo t en que vence un capital único C, conocido, que sustituye a C_1, C_2, ... , C_n, con vencimientos en t_1, t_2, ... ,t_n, respectivamente, todos ellos conocidos. Se tiene que cumplir:

$$C \neq C1 + C2 + \ldots\ldots + Cn$$

Determinación del vencimiento medio: Momento de tiempo t en que vence un capital único C, conocido, que sustituye a C_1, C_2, ... , C_n, con vencimientos en t_1, t_2, ... ,t_n, respectivamente, todos ellos conocidos. Se tiene que cumplir:

$$C = C1 + C2 + \ldots\ldots + Cn$$