Bases de $\mathbb{R}^n$

- Sea una base cualquiera $\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n\} \subset \mathbb{R}^n$, seguimos la notación usual:

$$\{\mathbf{a}_1 = (a_{11}, ..., a_{n1}), ..., \mathbf{a}_n = (a_{1n}, ..., a_{nn})\} \subset \mathbb{R}^n$$

- Sea A la matriz que tiene por columnas dichos vectores

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n}$$

- Los siguientes enunciados son equivalentes:
  - $\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n\}$ es base de $\mathbb{R}^n$
  - $|A| \neq 0$.
  - Existe inversa de A.

Bases de $\mathbb{R}^n$

- Recordemos que dado $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, las coordenadas de $\mathbf{v}$ con respecto de $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n\}$ son los escalares $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + ... + \lambda_n \mathbf{a}_n.$$

- Por ejemplo, $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$ tiene coordenadas

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$$

respecto de la base canónica

$$\mathbf{E} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\},$$

ya que trivialmente

$$\mathbf{v} = 1 \cdot (1, 0, 0) + (-1) \cdot (0, 1, 0) + 2 \cdot (0, 0, 1)$$

Bases de $\mathbb{R}^n$

- Recordemos que dado $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, las coordenadas de $\mathbf{v}$ con respecto de $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n\}$ son los escalares λ_1,...,$\lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que
$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + ... + \lambda_n \mathbf{a}_n.$$
- El mismo vector $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$ tiene coordenadas
$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2$$
respecto de la base
$$\mathbf{A} = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (0, -1, 1)\},$$
ya que en este caso
$$\mathbf{v} = (1, -1, 2) = 1 \cdot (1, 1, 0) + 0 \cdot (-1, 0, 1) + 2 \cdot (0, -1, 1)$$

Expresión matricial del cambio de base $\mathbf{A} \to \mathbf{E}$

- Sea base $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1 = (a_{11}, ..., a_{n1}), ..., \mathbf{a}_n = (a_{1n}, ..., a_{nn})\} \subset \mathbb{R}^n$.
- Supongamos un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ que tiene por coordenadas x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{R}$ respecto de la base **E** y coordenadas y_1, y_2, $y_3 \in \mathbb{R}$ respecto de la base **A**

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + y_3\mathbf{a}_3 \\
&= y_1 (a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3) + ... + y_3 (a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3) \\
&= (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{12}y_3)\,\mathbf{e}_1 + ... + (a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{13}y_3)\,\mathbf{e}_3
\end{aligned}
$$

- Como $\mathbf{v} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3$, igualando componentes

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\
x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\
x_3 &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3
\end{aligned}
$$

Expresión matricial del cambio de base $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{E}$

- Matricialmente

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow X = AY$$

- $M_{\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{E}} := A$ es la matriz de cambio de la base **A** a la base **E**, sus columnas viene dadas por las coordenadas de los vectores de **A** con respecto a **E**

Expresión matricial del cambio de base $\mathbf{A} \to \mathbf{E}$

En el caso del vector **v** con coordenadas $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_3 = -1$ con respecto de la base

$$\mathbf{A} = \{(1,1,0),(-1,0,1),(0,-1,1)\},$$

se tiene que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Expresión matricial del cambio de base $\mathbf{E} \to \mathbf{A}$

Supongamos $\mathbf{v}$ con coordenadas $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ respecto de la base $\mathbf{E}$ y coordenadas $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ respecto de la base $\mathbf{A}$.
Hemos visto que

$$X = AY$$

y por tanto

$$Y = A^{-1}X$$

- $M_{\mathbf{E}\to\mathbf{A}} = M_{\mathbf{A}\to\mathbf{E}}^{-1} = A^{-1}$ nos da la matriz de cambio de la base.
- Las columnas de $M_{\mathbf{E}\to\mathbf{A}}$ nos dan las coordenadas de los elementos de $\mathbf{E}$ con respecto de la base $\mathbf{A}$.

Expresión matricial del cambio de base $\mathbf{E} \to \mathbf{A}$

Sea la base $\mathbf{A} = \{(1,1,0),(-1,0,1),(0,-1,1)\}$

- La matriz de cambio de la base **A** a la base **E** viene dada por

$$M_{\mathbf{E}\to\mathbf{A}} = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Sus columnas nos dan las coordenadas de los elementos de **E** con respecto de **A**, por ejemplo

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_2 &= \frac{1}{2}\mathbf{a}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{a}_3 \\ &= \frac{1}{2}(1,1,0) + \frac{1}{2}(-1,0,1) - \frac{1}{2}(0,-1,1) \\ &= (0,1,0). \end{aligned}$$

Expresión matricial del cambio de base $\mathbf{E} \to \mathbf{A}$

Sea $\mathbf{v} = (1,1,2) \in \mathbb{R}^3$, *calcule sus coordenadas* y_1, y_2, y_3 *con respecto de la base*

$$\mathbf{A} = \{(1,1,0),(-1,0,1),(0,-1,1)\},$$

- Como $X = AY \leftrightarrow Y = A^{-1}X$, se tiene

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Comprobamos que efectivamente

$$\mathbf{v} = 2(1,1,0) + 1(-1,0,1) + (0,-1,1) = (1,1,2)$$

Expresión matricial del cambio de base $\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{E}$

UNED

Resumiendo, dadas bases canónica $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ y un base cualquiera $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n\}$. Dado un vector $v \in \mathbb{R}^n$ con coordenadas $x_1, ..., x_n$ respecto de la base canónica e $y_1, ..., y_n$ respecto de la base $\mathbf{A}$. Se tiene la siguiente relación

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = M_{\mathbf{A}\to\mathbf{E}} Y$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M^{-1}_{\mathbf{A}\to\mathbf{E}} X = M_{\mathbf{E}\to\mathbf{A}} X$$

- Insistimos $M_{\mathbf{E}\to\mathbf{A}} = M^{-1}_{\mathbf{A}\to\mathbf{E}}$.
- En este caso $M_{\mathbf{A}\to\mathbf{E}} = A$.

Expresión matricial del cambio de base $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$

Sean bases cualesquiera $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n\}$, $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n\}$.

- Dado un vector $v \in \mathbb{R}^n$ con coordenadas $x_1, ..., x_n$ respecto de **A** e $y_1, ..., y_n$ respecto de la base **B**. Se tiene la siguiente relación

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \cdots & \widetilde{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{a}_{n1} & \cdots & \widetilde{a}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M_{\mathbf{A}\to\mathbf{B}} X$$

- Las columnas de $M_{\mathbf{A}\to\mathbf{B}}$ son las coordenadas de los elementos de **A** con respecto de **B**. Por ejemplo,

$$\mathbf{a}_1 = \widetilde{a}_{11}\mathbf{b}_1 + ... + \widetilde{a}_{n1}\mathbf{b}_n$$

- Se tiene que

$$M_{\mathbf{A}\to\mathbf{B}} = M^{-1}_{\mathbf{B}\to\mathbf{A}}.$$

Expresión matricial del cambio de base $\mathbf{B} \to \mathbf{A}$

Sean bases cualesquiera $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n\}$, $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n\}$.

- Dado un vector $v \in \mathbf{R}^n$ con coordenadas $x_1, ..., x_n$ respecto de $\mathbf{A}$ e $y_1, ..., y_n$ respecto de la base $\mathbf{B}$. Se tiene la siguiente relación

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{b}_{11} & \cdots & \widetilde{b}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{b}_{n1} & \cdots & \widetilde{b}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = M_{\mathbf{B}\to\mathbf{A}} Y$$

- Las columnas de $M_{\mathbf{B}\to\mathbf{A}}$ son las coordenadas de los elementos de $\mathbf{B}$ con respecto de $\mathbf{A}$. Por ejemplo,

$$\mathbf{b}_1 = \widetilde{b}_{11}\mathbf{a}_1 + ... + \widetilde{b}_{n1}\mathbf{a}_n$$

- Se tiene que

$$M_{\mathbf{B}\to\mathbf{A}} = M^{-1}_{\mathbf{A}\to\mathbf{B}}.$$

Aclaración de notación con respecto del texto *Temas de Matemáticas*

- Sean bases cualesquiera $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n\}$, $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n\} \subset \mathbb{R}^n$.
- En *Temas de Matemáticas*, (Prof. Rodriguez-Marín) se denota por A a la matriz de cambio

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \equiv M_{\mathbf{A}\to\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \cdots & \widetilde{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{a}_{n1} & \cdots & \widetilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

siendo A la matriz que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de **A** con respecto de **B**. Recordemos

$$\mathbf{a}_i = a_{1i}\mathbf{b}_1 + ... + a_{ni}\mathbf{b}_n \text{ para } i = 1, .., n$$

Aclaración de notación con respecto del texto *Temas de Matemáticas*

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1 = (a_{11}, ..., a_{n1}), ..., \mathbf{a}_n = (a_{1n}, ..., a_{nn})\} \subset \mathbb{R}^n$$

- Sean bases cualesquiera

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \{\mathbf{a}_1 = (a_{11}, ..., a_{n1}), ..., \mathbf{a}_n = (a_{1n}, ..., a_{nn})\} \subset \mathbb{R}^n \\ \mathbf{B} &= \{\mathbf{b}_1 = (b_{11}, ..., b_{n1}), ..., \mathbf{b}_n = (b_{1n}, ..., b_{nn})\} \subset \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

  En nuestro caso, la matriz por columnas asociada a los vectores de columna del sistema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Cuando $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\} = \{(1, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, 1)\}$ base canónica

$$M_{\mathbf{A}\to\mathbf{E}} = A.$$