Estructura vectorial de $\mathbb{R}^n$

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ con las operaciones vectoriales de suma de vectores $+$ y producto por escalares es un espacio vectorial ya que verifica:

- $(\mathbb{R}^n, +)$ es un grupo abeliano. Para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ *:*

$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$	*Ley asociativa*
$\mathbf{0}$ *es el elemento neutro*	*Existencia de elemento neutro*
Para cada $\mathbf{u}$ *existe simetrico* $-\mathbf{u}$	*Existencia de elemento simétrico*
$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$	*Ley conmutativa de la suma*

Estructura vectorial de $\mathbb{R}^n$

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ con las operaciones vectoriales de suma de vectores $+$ y producto por escalares es un espacio vectorial ya que verifica:

- Para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, se tiene*:*

$\lambda \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{u} + \lambda \cdot \mathbf{v}$	*Distributiva respecto a la suma de* $\mathbb{R}^n$
$(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{u} + \mu \cdot \mathbf{v}$	*Distributiva respecto a la suma de* $\mathbb{R}$
$\lambda(\mu \cdot \mathbf{u}) = (\lambda\mu) \cdot \mathbf{u}$	*Asociativa respecto al producto de* $\mathbb{R}$
$1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$	1 *es el elemento neutro de* $\mathbb{R}$

Subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$

- Los **subespacios vectoriales** de $\mathbb{R}^n$ son aquellos conjuntos que conservan las operaciones vectoriales.
- Es decir, $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial si para todos escalares $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_n)$, $\mathbf{w} = (w_1, ..., w_n) \in \mathbf{A}$ se tiene

$$\lambda\mathbf{v}+\mu\mathbf{w} =(\lambda v_1 + \mu w_1, ..., \lambda v_n + \mu w_n)\in \mathbf{A}$$

- Por ejemplo,

$$\mathbf{A} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ ya que para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} = (v_1, 0)$, $\mathbf{w} = (w_1, 0) \in \mathbf{A}$, se tiene

$$\lambda\mathbf{v}+\mu\mathbf{w} =\lambda(v_1, 0)+\mu(w_1, 0) = (\lambda v_1 + \mu w_1, 0) \in \mathbf{A}$$

Subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$

- Los **subespacios vectoriales** de $\mathbb{R}^n$ son aquellos conjuntos que conservan las operaciones vectoriales.
- Es decir, $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial si para todos escalares $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_n)$, $\mathbf{w} = (w_1, ..., w_n) \in \mathbb{A}$ se tiene

$$\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w} = (\lambda v_1 + \mu w_1, ..., \lambda v_n + \mu w_n) \in \mathbb{A}$$

- En cambio,

$$\mathbb{A} = \{(1, x) : x \in \mathbb{R}\}$$

no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ ya que si tomamos por ejemplo $\lambda = 1$, $\mu = 1$, $\mathbf{v} = (1, 1)$, $\mathbf{w} = (1, -2) \in \mathbb{A}$, se tiene

$$\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w} = 1 \cdot (1, 1) + (1, -2) = (2, -1) \notin \mathbb{A}$$

Subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

- En $\mathbb{R}^2$, los subespacios vienen dados por
  - $\mathbb{R}^2$
  - $G[\mathbf{v}] = \{\lambda\mathbf{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}$, dado $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$.
  - $\{\mathbf{0}\} = \{(0,0)\}$
- En $\mathbb{R}^3$, los subespacios vienen dados por
  - $\mathbb{R}^2$.
  - $G[\{\mathbf{v}\}] = \{\lambda\mathbf{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}$, dado $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$.
  - $G[\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}] = \{\lambda\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{v}_2 : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$, dados $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\} \in \mathbb{R}^2$ linealmente independientes.
  - $\{\mathbf{0}\} = \{(0,0)\}$.
- En este sentido
  - $\mathbb{R}^2$(resp. $\mathbb{R}^3$), $\{\mathbf{0}\}$ son los denominados *subespacios impropios*.
  - El resto son los denominados *subespacios propios*, se corresponden con:
    - ★ Rectas que pasan por el origen en $\mathbb{R}^2$.
    - ★ Recta y planos que pasan por el origen en $\mathbb{R}^3$.

Subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$

- En general los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$ se corresponden con los conjuntos generados por un conjunto de vectores.
- Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
  - $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$
  - Existe un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ tales que

$$\mathbb{A} = G[\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}] = \{\lambda_1 \mathbf{v}_1 + ... + \lambda_k \mathbf{v}_k : \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

- Al conjunto $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}$ se le denomina *conjunto* o *sistema de generadores* de $\mathbb{A}$.

Sistemas de generadores

- Sea el subespacio vectorial

$$\mathbb{B} = \{(x, y, 0) : x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

- Los vectores $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ constituyen un sistema generador de $\mathbb{B}$, pero también lo es

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)\}$$

ya que $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)\} \subset \mathbb{B}$ y podemos encontrar siempre una combinación lineal

$$(x, y, 0) = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) + 0 \cdot (1, 1, 0)$$

Base de un subespacio vectorial

Sea $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio vectorial.

- Un conjunto de generadores linealmente independiente es una **base**.
- Es decir, $\mathbf{S} = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}$ es una base de $\mathbb{A}$ si:
  - $\mathbb{A} = G[\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}]$.
  - $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}$ son linealmente independientes.
- **Tma de la base.** El número de elementos de cualquier base de $\mathbb{A}$ es un número fijo y se denomina **dimensión** del espacio. En este caso $\dim \mathbb{A} = k$.
- Matricialmente, la dimensión coincide con el rango de la matriz asociada

$$\dim(\mathbb{A}) = \dim(G[\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_m\}]) = \text{rango} \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nm} \end{pmatrix}$$

Bases y coordenadas

- Todo elemento de $v \in \mathbb{A}$ se expresa de manera única. Existen únicos $(\lambda_1, ..., \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ tal que

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + ... + \lambda_k \mathbf{v}_k$$

- A los escalares $\lambda_1, ..., \lambda_k$ se le dice coordenadas de $\mathbf{v}$ con respecto de la base $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}$

Bases y coordenadas

Sea el subespacio vectorial

$$\mathbb{B} = \{(x, y, 0) : x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) : x, y \in \mathbb{R}\},$$

- Los vectores $\mathbf{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ constituyen una base de $\mathbb{B}$.
- Un $(x, y, 0) \in \mathbb{B}$ genérico se puede expresar como

$$(x, y, 0) = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0)$$

en donde $\lambda_1 = x$, $\lambda_2 = y$ coordenadas únicas.

Bases y coordenadas

Sea el subespacio vectorial

$$\mathbb{B} = \{(x, y, 0) : x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,0) + y(0,1,0) : x, y \in \mathbb{R}\},$$

- $\mathbf{B} = \{(1,0,0), (0,1,0), (1,1,0)\}$ es sistema generador pero no base al ser los vectores linealmente dependientes.
- Por ejemplo, $\mathbf{v} = (1,1,0)$ admite dos representaciones

$$(1,1,0) = 1 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (0,1,0) + 0 \cdot (1,1,0)$$
$$(1,1,0) = \tfrac{1}{2} \cdot (1,0,0) + \tfrac{1}{2} \cdot (0,1,0) + \tfrac{1}{2} \cdot (1,1,0)$$

Base canónica de $\mathbb{R}^n$

- El conjunto

$$\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1 = (1,0,...,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0,...,0), ..., \mathbf{e}_n = (0,0,0,...,1)\}$$

  es un sistema generador y linealmente independiente de $\mathbb{R}^n$, luego base.
- A $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ se le denomina *base canónica* de $\mathbb{R}^n$.
- Cuando denotamos un vector $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ estamos considerando implícitamente dicha base,

$$\begin{aligned}(x_1, ..., x_n) &= x_1(1,0,...,0) + x_2(0,1,0,...,0) + ... + x_n(0,0,0,...,1) \\ &= x_1\mathbf{e}_1 + ... + x_n\mathbf{e}_n\end{aligned}$$