Ecuaciones de un subespacio

- Sea
$$\mathbb{A} = G[\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k\}]$$
el subespacio vectorial generado por un conjunto de vectores $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ linealmente independientes.
- Dado $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{A}$ genérico, la ecuación vectorial
$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + ... + \lambda_k \mathbf{a}_k$$
se puede expresar en notación columna como

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + ... + \lambda_k \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} .... + \lambda_k a_{1k} \\ \vdots \\ \lambda_1 a_{n1} .... + \lambda_k a_{nk} \end{pmatrix}$$

Ecuaciones paramétricas

- Consideremos el conjunto de vectores linealmente independientes

$$\mathbf{A} = \{(1,0,0,0,1),(1,-1,0,1,0),(0,0,1,2,0)\} \subset \mathbb{R}^5$$

- Como

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ -\lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones paramétricas

- Consideremos el conjunto de vectores linealmente independientes

$$\mathbf{A} = \{(1,0,0,0,1),(1,-1,0,1,0),(0,0,1,2,0)\} \subset \mathbb{R}^5$$

- Las ecuaciones parámetricas vienen dadas por

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_2 & = & -\lambda_2 \\ x_3 & = & \lambda_3 \\ x_4 & = & \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ x_5 & = & \lambda_1 \end{array}\right.$$

Ecuaciones paramétricas

- Al conjunto de n ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{ccc} x_1 & = & \lambda_1 a_{11} \ldots . + \lambda_k a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & \lambda_1 a_{n1} \ldots . + \lambda_k a_{nk} \end{array}\right.$$

en donde λ_1,..., λ_k parámetros arbitrarios se les dice **ecuaciones paramétricas**.

Ecuaciones implícitas de un de un subespacio

- "*Eliminando los parámetros*" $\lambda_1, ..., \lambda_k$ en las ecuaciones paramétricas

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \lambda_1 a_{11} .... + \lambda_k a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ x_n & = & \lambda_1 a_{n1} .... + \lambda_k a_{nk} \end{array}\right.$$

  uno puede obtener $n - k$ ecuaciones linealmente independientes

$$\left\{\begin{array}{l} b_{11} x_1 .... + b_{1n} x_n = 0 \\ \vdots \\ b_{(n-k)1} x_1 .... + b_{(n-k)n} x_n = 0 \end{array}\right.$$

  que se denominan **ecuaciones implícitas.**

- Matricialmente existe una matriz $B \in \mathcal{M}_{(n-k)\times n}$, $\mathrm{rango}(B) = n - k$, tal que

$$\mathbb{A} = \{X \in \mathbb{R}^n : BX = O\} = KerB$$

Paramétricas→Implícitas

- Para calcular las ecuaciones implícitas basta aplicar que la matriz

$$\begin{pmatrix} x_1 & a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & a_{n1} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}$$

  tiene rango k en donde $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ un vector genérico de $\mathbb{A} = G[\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k\}]$.
- Todos los determinantes de cualquier submatriz cuadrada de orden $k + 1$ (menores de orden $k + 1$) son nulos y nos proporcionan las $n - k$ ecuaciones linealmente independientes

Paramétricas→Implícitas

- Sea $\mathbf{A} = \{(1,0,0,0,1),(1,-1,0,1,0),(0,0,1,2,0)\} \subset \mathbb{R}^5$
- Tenemos la matriz

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & -1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 1 & 2 \\ x_5 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  y tenemos que buscar $n-k=5-3=2$ ecuaciones linealmente independientes.

Paramétricas→Implícitas

- Sea $\mathbf{A} = \{(1,0,0,0,1),(1,-1,0,1,0),(0,0,1,2,0)\} \subset \mathbb{R}^5$
- Consideramos dos menos orden de orden 4
  - $$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & -1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$$
  - $$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & -1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 \\ x_5 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -x_1 - x_2 + x_5 = 0$$

Paramétricas→Implícitas

- Las ecuaciones son linealmente independientes

$$\left\{\begin{array}{l} x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 - x_2 + x_5 = 0, \end{array}\right.$$

  por tanto son las ecuaciones implícitas del subespacio $\mathbb{A}$
- Hay que tener en cuenta que dos menores diferentes pueden dar lugar a ecuaciones linealmente dependientes

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & -1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & 0 & -1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 1 & 2 \\ x_5 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x_2 - 2x_3 + x_4$$