Sistemas lineales. 1ª parte

- Consideremos un sistema lineal de k incognitas y m ecuaciones: Encontrar $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$ verificando

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + ... + a_{1k}x_k & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mk}x_k & = & b_m \end{array}\right\}$$

- Matricialmente: Encontrar $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$ verificando

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Por ejemplo

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 & = & -1 \end{array}\right\} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sistemas lineales. 1ª parte

- Encontrar $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$ verificando

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- En general si denotamos el vector termino independiente y las columnas

$$\mathbf{b} = (b_1, ..., b_m), \mathbf{a}_i = (a_{1i}, ..., a_{mi}) \text{ para todo } i = 1, ..., k$$

resolver el sistema lineal es equivalente a encontrar los coeficientes de una combinación lineal. En este sentido, los siguientes enunciados son equivalentes:

  - $AX = B$ tiene solución.
  - Existen $x_1, ..., x_k \in \mathbb{R}$ tales que $\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + ... + x_k\mathbf{a}_k$

Sistemas lineales. Combinaciones lineales

- Por ejemplo, en el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

podemos encontrar diferentes combinaciones lineales (soluciones)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Es un sistema compatible indeterminado.

Sistemas lineales. Tma Rouché-Frobenius

- En general, podemos razonar que los siguientes enunciados son equivalentes:
  - $AX = B$ tiene solución.
  - $\mathbf{b} \in G[\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k\}]$
  - $\mathrm{rango}(\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k, \mathbf{b}\}) = \mathrm{rango}(\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k\})$
- En terminos de matrices

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{rango}(A^*) & = & \mathrm{rango}\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1k} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & b_m \end{array}\right) \\
 & & \qquad\qquad \| \\
\mathrm{rango}(A) & = & \mathrm{rango}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

en donde recordemos que $A^* = [A_1 ... A_k |\ B]$ se dice la matriz ampliada.

Sistemas lineales. Tma Rouché-Frobenius

$$
\begin{array}{rcl}
rango(A^*) & = & rango\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1k} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & b_m \end{array}\right) \\
 & & \qquad\qquad \| \\
rango(A) & = & rango\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Tma Rouché-Frobenius: El sistema lineal $AX = B$ tiene solución si y solamente si $\mathrm{rango}(A^*) = \mathrm{rango}(A)$

- Consecuencia: El sistema lineal **no** tiene solución si y solamente si $\mathrm{rango}(A^*) \neq \mathrm{rango}(A)$

Por ejemplo, en el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

se verifica la condición de compatibilidad

$$\operatorname{rango} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) = 2 = \operatorname{rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sistemas lineales. Tma Rouché-Frobenius

En cambio en en el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 3x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 2 \\ 5x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 2 \\ -8x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 2 \end{array}\right\} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 5 & 3 & -8 \\ -8 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

no se cumple condición de compatibilidad

$$rango \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -8 & 2 \\ 5 & 3 & -8 & 2 \\ -8 & 5 & 3 & 2 \end{array}\right) = 3 \neq 2 = rango \begin{pmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 5 & 3 & -8 \\ -8 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

y el sistema es incompatible.

Caso $\mathrm{rango}(A^*) = \mathrm{rango}(A) = k$

Tma Rouché-Frobenius: Si $\mathrm{rango}(A^*) = \mathrm{rango}(A) = k$, entonces el sistema tiene solución única (*Sistema compatible determinado*)

- Para un sistema lineal cuadrado $m = k$ recordemos que no es más que multiplicar a ambos lado por la inversa

$$AX = B \longleftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \longleftrightarrow X = A^{-1}B$$

Por ejemplo,

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 - x_2 & = & 1 \\ x_1 + x_2 & = & -1 \end{array}\right\} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$