Combinaciones lineal. Independencia lineal en $\mathbb{R}^n$

- Un conjunto de elementos $\mathbf{S} = \{\mathbf{u}_1, .., \mathbf{u}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ es **linealmente independiente** si ninguno de ellos se puede expresar como combinación lineal del resto. Podemos expresarlo de la siguiente manera:

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + ... + \lambda_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_k = 0$$

- Cuando el conjunto $\mathbf{S}$ no es linealmente independiente se dice que es **linealmente dependiente**
- En general siempre se cumple que:
  - El vector nulo $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ es linealmente dependiente.
  - Todo vector $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ es linealmente independiente

Combinaciones lineal. Independencia lineal en $\mathbb{R}^n$

- Los vectores $\mathbf{u}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, -2)$ son linealmente dependientes ya que
$$\mathbf{u}_1 = -\mathbf{u}_2$$
- En cambio los vectores $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0)$ son linealmente independiente ya que no pude existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{u}_1 = \lambda \mathbf{u}_2$, eso implicaría
$$(1, 1, 0) = \lambda(0, 1, 0)$$
lo que es absurdo
- Los vectores $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)$ son linealmente independientes.

Independencia lineal y determinantes

- $\{(1,2),(-1,-2)\}$ son linealmente dependientes

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

- Dos vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} =(y_1, y_2, y_3)$ de $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes si $x_1 = \lambda y_1$, $x_2 = \lambda y_2$, $x_3 = \lambda y_3$. Matricialmente

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda y_1 & y_1 \\ \lambda y_2 & y_2 \\ \lambda y_3 & y_3 \end{pmatrix}$$

Todas sus submatrices matrices cuadradas de orden 2 * tienen determinante nulo

$$\begin{vmatrix} \lambda y_1 & y_1 \\ \lambda y_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda y_1 & y_1 \\ \lambda y_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda y_2 & y_2 \\ \lambda y_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

---

* matriz cuadrada aquella que tiene igual número de filas y columnas, número al que se denomina orden

Independencia lineal y determinantes

- En el caso $\{(1,1,0),\ (0,1,0)\}$ tendríamos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  y podemos encontrar al menos una submatriz cuadrada de orden 2 de determinante no nulo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

- En el caso $\{(1,0,0),\ (0,1,0),(0,0,1)\}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Rango de una matriz

- Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times k}$ definimos su **rango,** denotado por rango(A), como el mayor orden para el que podemos encontrar una matriz cuadrada con determinante no nulo.
- $\mathrm{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2$
- $\mathrm{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 2$

Rango de un sistema de vectores

- El rango de un conjunto de vectores $\mathbf{S} = \{\mathbf{u}_1, .., \mathbf{u}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ es el mayor número de vectores linealmente independiente que posee. Coincide con el rango de su matriz asociada

$$\text{rango}(\mathbf{S}) = \text{rango}(U) = \text{rango}\begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \dots & u_{nk} \end{pmatrix}$$

  - Si $\text{rango}(S) = k$, entonces los vectores $\{\mathbf{u}_1, .., \mathbf{u}_k\}$ son linealmente independientes
  - El determinante es una herramienta que nos mide si un conjunto de vectores es linealmente independientes.
  - $\text{rango}(U) = \text{rango}(U^T)$. ¡*El rango de una matriz coincide también con el rango de sus vectores filas*!

Independencia lineal en $\mathbb{R}^n$ y sistemas lineales

- Dado un conjunto de vectores $\{\mathbf{u}_1, .., \mathbf{u}_k\} \subset \mathbb{R}^n$. Consideremos la ecuación lineal

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + ... + \lambda_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0},$$

matricialmente

$$\begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \dots & u_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = (0, ..., 0)$ siempre es solución. Si existe una solución $\bar{\lambda} = \left(\bar{\lambda}_1, ..., \bar{\lambda}_k\right)$ no nula de este sistema, por ejemplo si $\bar{\lambda}_1 \neq 0$, entonces

$$\mathbf{u}_1 = -\frac{\bar{\lambda}_2}{\bar{\lambda}_1} \mathbf{u}_2 - ... - \frac{\bar{\lambda}_k}{\bar{\lambda}_1} \mathbf{u}_k$$

y el sistema es linealmente dependiente.

Independencia lineal en $\mathbb{R}^n$ y sistemas lineales

- Una familia de vectores $\mathbf{S} = \{\mathbf{u}_1, .., \mathbf{u}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ es linealmente independiente si

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + ... + \lambda_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_k = 0$$

  Equivalentemente si algunas de las siguientes propiedades es cierta:
  - El sistema

$$\begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \dots & u_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

    tiene solución única
  - $\mathrm{rango}(U) = k$ (Teorema de Rouché-Fröbenius)