Combinaciones lineales en $\mathbb{R}^n$

- Una combinación lineal de un conjunto $\{\mathbf{u}_1, .., \mathbf{u}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ es el vector resultado $\mathbf{w}$ de una operación del tipo

$$\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + ... + \lambda_k \mathbf{u}_k$$

  en donde $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$. En este sentido se dice que $\mathbf{w}$ es combinación lineal de los vectores $\{\mathbf{u}_1, .., \mathbf{u}_k\}$.
- Como ejemplo, consideremos el siguiente conjunto de vectores

$$\{\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{u}_2 = (2, 1, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$$

  - Si $\mathbf{w} = (6, 1, 0)$, entonces $\mathbf{w}$ es combinación lineal de $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ ya que

$$\mathbf{w} = (6, 1, 0) = 4(1, 0, 0) + (2, 1, 0) = 4 \cdot \mathbf{u}_1 + 1 \cdot \mathbf{u}_2$$

Combinaciones lineales en $\mathbb{R}^n$

- Un elemento $\mathbf{w}$ se dice que es combinación lineal de un conjunto $\{\mathbf{u}_1, .., \mathbf{u}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ si existen escalares $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + ... + \lambda_k \mathbf{u}_k$$

En general a las expresiones $\lambda_1 \mathbf{u}_1 + ... + \lambda_k \mathbf{u}_k$ las denominaremos combinaciones lineales del conjunto $\{\mathbf{u}_1, .., \mathbf{u}_k\}$

- Como ejemplo, consideremos el siguiente conjunto de vectores

$$\{\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{u}_2 = (2, 1, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$$

  - Si $\mathbf{w} = (1, 1, 1)$, entonces $\mathbf{w}$ no es combinación lineal de $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ ya que no existen escalares λ, μ posibles para los que

$$\mathbf{w} = (1, 1, 1) = \lambda(1, 0, 0) + \mu(2, 1, 0) = (\lambda + 2\mu, \mu, 0)$$

Notación por vectores columnas en $\mathbb{R}^n$

- Dado un vector $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, denotaremos por

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

su vector (matriz) columna asociado.

- Por ejemplo, $\mathbf{a} = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ tiene como vector columna asociado

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Notación por vectores columnas en $\mathbb{R}^n$

El caso $\mathbf{w} = (6, 1, 0)$, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} = \{(1, 0, 0), (2, 1, 0)\}$, podemos expresar

$$\mathbf{w} = 4\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

equivalentemente

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Combinaciones lineales. Expresión matricial

En general, denotemos

$$\{\mathbf{u}_1 = (u_{11}, ..., u_{n1}), ..., \mathbf{u}_k = (u_{1k}, ..., u_{nk})\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Una combinación lineal

$$\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + ... + \lambda_k \mathbf{u}_k$$

se escribe en notación vector columna como

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{n1} \end{pmatrix} + ... + \lambda_k \begin{pmatrix} u_{1k} \\ \vdots \\ u_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 u_{11} + ... + \lambda_k u_{1k} \\ \vdots \\ \lambda_1 u_{1k} + ... + \lambda_k u_{nk} \end{pmatrix}$$

Matricialmente, se correspode con la siguiente ecuación

$$W = U\lambda$$

en donde $U = [U_1 ... U_k] \in \mathcal{M}_{n\times k}$ * matriz que tiene por columnas los vectores $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k\}$

* $\mathcal{M}_{n\times k}$ matrices de n filas y k columnas

Combinaciones lineales. Expresión matricial

Podemos escribir lo anterior como

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \dots & u_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

Un ejemplo

$$(-4, -5, -6) = (1, 0, -1) - 5(1, 1, 1)$$

se puede expresar como

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Combinaciones lineales y sistemas lineales

Conclusión: Un elemento $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ es combinación lineal de un sistema de vectores $\mathbf{S} = \{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ si el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \dots & u_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

tiene solución.

- $(6, 1, 0)$ es combinación lineal de $\{(1, 0, 0), (2, 1, 0)\}$ ya que el sistema lineal
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
tiene solución (compatible determinado) $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1$.

Combinaciones lineales y sistemas lineales

Conclusión: Un elemento $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ es combinación lineal de un sistema de vectores $\mathbf{S} = \{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ si el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \dots & u_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

tiene solución.

- $(1, 1, 1)$ no es combinación lineal de $\{(1, 0, 0), (2, 1, 0)\}$ ya que el sistema lineal
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
no tiene solución (incompatible)