Espacios de coordenadas $\mathbb{R}^n$

- En el espacio de coordenadas $\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n) : x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$ se pueden definir dos operaciones que se suelen denominar operaciones vectoriales. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$

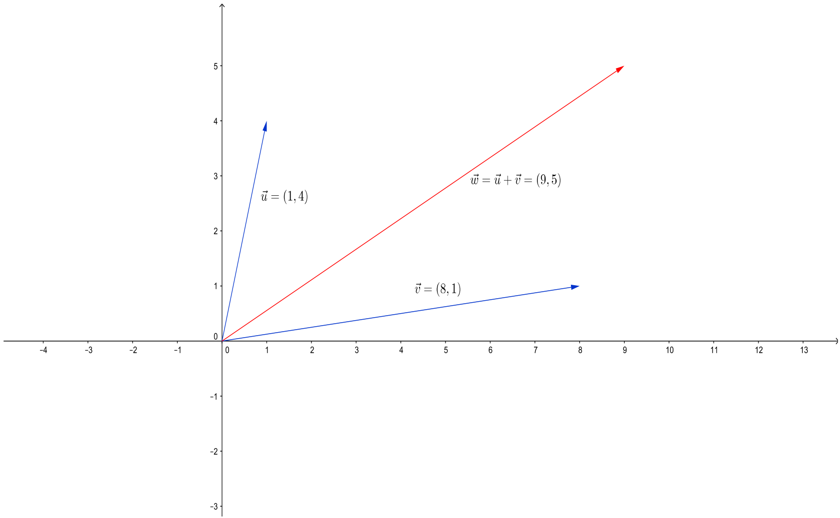
$$\begin{aligned} (x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) &= (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) \\ \lambda(x_1, ..., x_n) &= (\lambda x_1, ..., \lambda x_n) \end{aligned}$$

- Su definición viene motivada por la suma de vectores y producto de un vector por un escalar de los vectores libres del plano $\mathbb{R}^2$

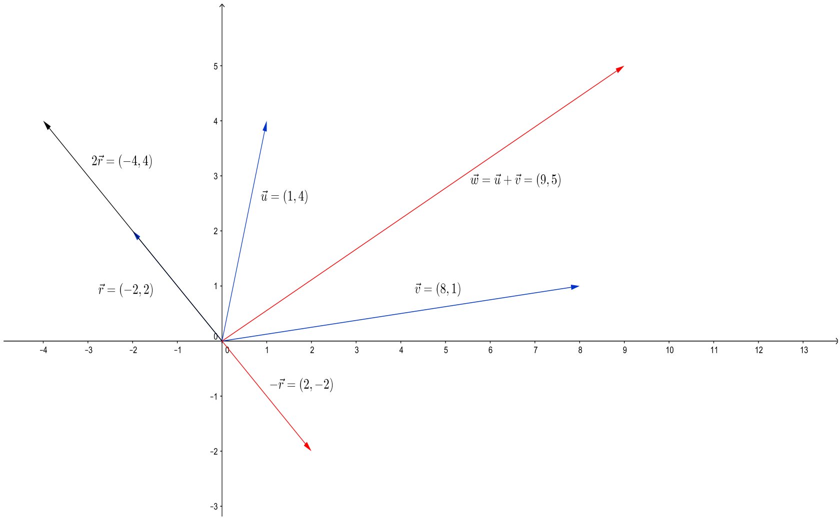
$$\begin{aligned} (x_1, x_2) + (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ \lambda(x_1, x_2) &= (\lambda x_1, \lambda x_2) \end{aligned}$$

- Es un espacio básico, numeros objetos pueden ser representados utilizando $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, en geometría utilizamos $\mathbb{R}^n$ para identificar puntos y vectores.

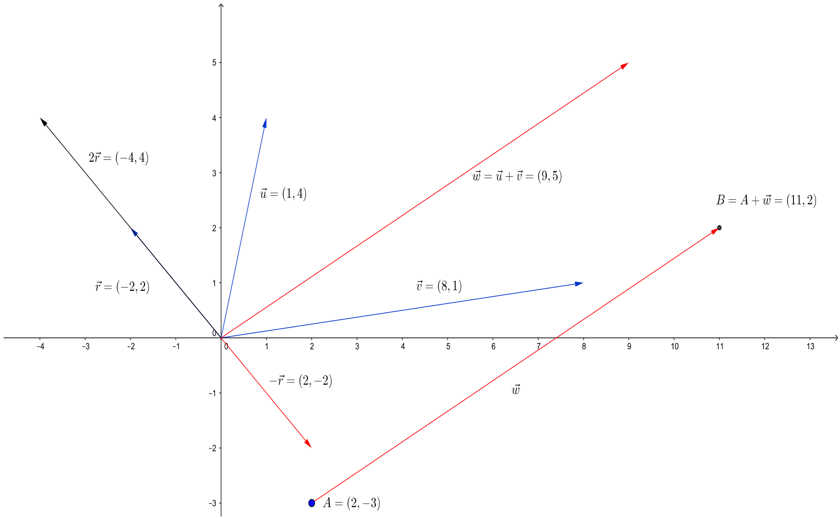
Vectores en el plano $\mathbb{R}^2$



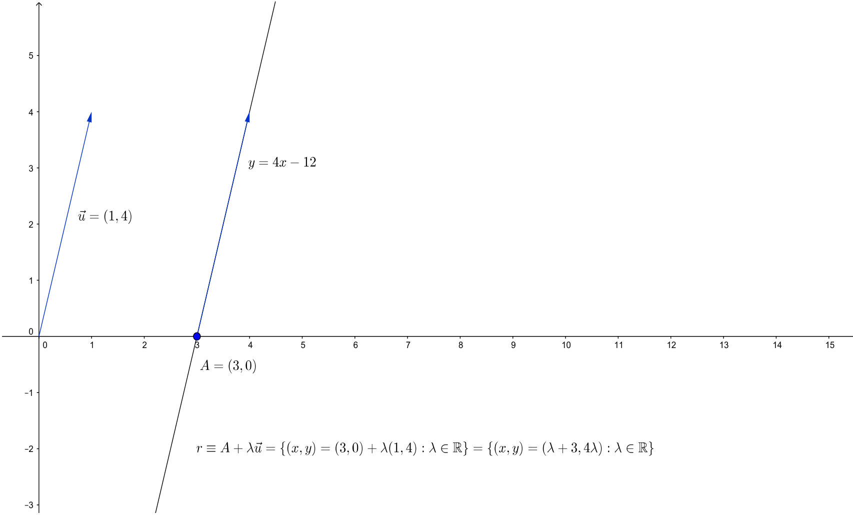
Vectores en el plano $\mathbb{R}^2$



Vectores en el plano $\mathbb{R}^2$



Una recta en el plano $\mathbb{R}^2$



Un plano en el *espacio* $\mathbb{R}^3$

En $\mathbb{R}^3$, un punto $A \in \mathbb{R}^3$ y dos vectores linealmente independientes* $\{\vec{u}, \vec{v}\} \in \mathbb{R}^3$ determinan un plano

$$\pi \equiv A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

Por ejemplo si $A = (2, -1, 3)$, $\vec{u} = (2, 1, -1)$, $\vec{v} = (-1, 0, 3)$

$$\begin{aligned} \pi &= \{(x, y, z) = (2, -1, 3) + \lambda(2, 1, -1) + \mu(-1, 0, 3) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, z) = (2 + 2\lambda - \mu, -1 + \lambda, 3 - \lambda + 3\mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Si *eliminamos parámetros* llegamos a la *ecuación implícita*

$$\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -1 \\ y+1 & 1 & 0 \\ z-3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3x - 5y + z - 14 = 0$$

---

* $u \notin G[v] = \{\lambda\vec{v} = (\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3) : \lambda \in \mathbb{R}\}$

Extensión al espacio de coordenadas $\mathbb{R}^n$

- En general, la ecuación vectorial de un recta se puede extender a cualquier espacio de coordenadas $\mathbb{R}^n$.
Dado un punto $A = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$, y un vector $\vec{u} = (u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$ una recta se determina por

$$\begin{aligned} r &\equiv A + \lambda\vec{u} = \{(x_1, ..., x_n) = (a_1, ..., a_n) + \lambda(u_1, ..., u_n) : \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x_1, ..., x_n) = (a_1 + \lambda u_1, ..., a_n + \lambda u_n) : \lambda \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

-Del mismo dados la noción de plano se puede extender a $\mathbb{R}^n$.
Dado un punto $A = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ y dos vectores linealmentes $\{\vec{u} = (u_1, ..., u_n), \vec{v} = (v_1, ..., v_n)\} \subset \mathbb{R}^n$, un plano se determina por

$$\begin{aligned} \pi &\equiv A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \\ &= \{(x_1, ..., x_n) = (a_1, ..., a_n) + \lambda(u_1, ..., u_n) + \mu(v_1, ..., v_n) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x_1, ..., x_n) = (a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1, ..., a_n + \lambda u_n + \mu v_n) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Geometría Afín y Espacios Vectoriales

- En general dado un punto $A \in \mathbb{R}^n$ y un conjunto de vectores linealmente independientes $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k\}$ podemos definir conjuntos, o estructuras, que tienen una "*interpretación geométrica*"

$$A + G[\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k\}] = \{A + \lambda_1 \vec{u}_1 + ... + \lambda_k \vec{u}_k : \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}]$$

- El estudio de la parte vectorial

$$G[\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k\}] := \{\lambda_1 \vec{u}_1 + ... + \lambda_k \vec{u}_k : \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

  se corresponde con los **Espacios Vectoriales**. Dentro de estudio se ven conceptos y herramientas como:
  - Combinaciones lineales, rango de vectores, dimensión, base.
  - Determinantes, matrices, sistemas lineales.
  - Ecuaciones vectoriales, paramétricas, implícitas.