

Tema 8

Ecuaciones diferenciales

Desde el principio hemos hecho énfasis en que uno de nuestros principales objetivos es resolver ecuaciones diferenciales, ordinarias y en derivadas parciales. En las asignaturas de métodos matemáticos correspondientes estudiará la teoría y métodos numéricos apropiados para este tipo de problemas. En esta asignatura nos conformaremos con saber usar los comandos que el MAXIMA proporciona para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs). El caso de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDPs) es considerablemente más complicado y por ese motivo muy pocos programas de cálculo simbólico y numérico tienen herramientas válidas más que para unos pocos casos concretos. De todas formas, en las correspondientes asignaturas de métodos matemáticos estudiará que la mayoría de los métodos que existen para resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales consisten en *traducir* (o re-escribir) la EDP propuesta como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, que posteriormente se resuelve con los métodos existentes para EDOs. Por tanto es muy importante saber resolver EDOs y para ello afortunadamente existen multitud de algoritmos numéricos extremadamente eficientes, que se estudian en asignaturas de métodos numéricos. Las diversas formas que existen para re-escribir una ecuación diferencial en derivadas parciales como un conjunto de EDOs es un tema muy interesante, que estudiará en la correspondiente asignatura de métodos matemáticos.

Para el estudio de este tema familiarícese con los comandos de MAXIMA para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de manera analítica y numérica.

- Solución analítica de EDOs:
 - EDOs lineales: `desolve(ecuaciones, variables)`
 - EDOs lineales o no lineales de orden 2 o inferior: `ode2(ecuaciones, variables)`
 - EDOs de orden 1 con una condición inicial:
`ic1(solución general proporcionada por ode2,
condición inicial variable independientemente,
condición inicial variable dependiente)`
 - EDOs de orden 2 con 2 condiciones iniciales:
`ic2(solución general proporcionada por ode2,
condición inicial variable independientemente,
condición inicial variable dependiente,
condición inicial para la derivada)`

- EDOs de orden 2 con 2 condiciones de contorno:
 - bc2(solución general proporcionada por ode2, condición de contorno 1 variable independientemente, condición de contorno 1 variable dependiente, condición de contorno 2 variable independientemente, condición de contorno 2 variable dependiente)
- Solución numérica de EDOs de primer orden:
 - En primer lugar: load("dynamics")
 - A continuación: rk(lista de EDOs, variable independiente, condición inicial, dominio)

8.1. Breve vistazo sobre ecuaciones diferenciales y su clasificación general

En el capítulo de introducción hemos comentado brevemente la tremenda importancia que tienen las ecuaciones diferenciales en física. Evidentemente no podemos repasar en esta asignatura la teoría sobre ecuaciones diferenciales, pero sí podemos hacer un pequeño *esquema*, que presentamos a continuación. Las ecuaciones diferenciales pueden clasificarse en varios tipos de acuerdo a los siguientes criterios:

8.1.1. Número de variables independientes (EDOs/EDPs)

- EDOs, ecuaciones diferenciales ordinarias (o en derivadas totales): sólo hay una única variable independiente, p. ej. la ecuación de Newton

$$F = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad F = \text{fuerza}, m = \text{masa}, x = \text{posición}, t = \text{tiempo}$$

- EDPs, ecuaciones diferenciales en derivadas parciales: hay más de una variable independiente, p. ej. la ecuación del calor en una dimensión

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad T = \text{temperatura}, t = \text{tiempo}, \alpha = \text{difusividad térmica}, x = \text{posición}$$

8.1.2. Orden de la ecuación

- Ecuaciones de orden 1: la derivada más alta que aparece en la ecuación es de orden 1.
- Ecuaciones de orden 2: la derivada más alta que aparece en la ecuación es de orden 2.
- Ecuaciones de orden n : la derivada más alta que aparece en la ecuación es de orden n .

En física se trabaja constantemente con ecuaciones de orden 1 (p. ej. las ecuaciones del electromagnetismo de Maxwell) y de orden 2 (p. ej. la ecuación de Newton, la ecuación del calor, la ecuación de Schrödinger de la mecánica cuántica, las ecuaciones de Navier-Stokes de la mecánica de fluidos, etc.). En determinados campos específicos también se trabaja ocasionalmente con ecuaciones de orden 3 e incluso 4, pero no es nada habitual trabajar con ecuaciones de orden superior a 4.

8.1.3. Tipo de condiciones de contorno (condiciones iniciales/condiciones de contorno)

Por cada derivada que aparezca en la ecuación es necesario suministrar una *condición inicial* (o *de contorno*) para resolverla. Por ejemplo, para resolver la ecuación diferencial ordinaria de orden 1

$$\frac{dx}{dt} = v(x, t)$$

tenemos que suministrar un dato inicial, p. ej. $x(t = 0) = x_0$. Para resolver la ecuación diferencial ordinaria de orden 2

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a(x, t)$$

es necesario suministrar 2 condiciones, p. ej. podemos emplear los datos iniciales $x(t = 0) = x_0$ y $(dx/dt)_{t=0} = v_0$. Para hacerse una idea intuitiva supongamos que x es la posición de un móvil, v su velocidad y t el tiempo, la solución de $dx/dt = v$ no está definida del todo hasta que se aporta en dato adicional dado por la posición inicial del móvil, en el caso de $d^2x/dt^2 = a$ necesitamos dos datos para obtener la solución $x = x(t)$, dados normalmente por la posición y velocidad inicial del móvil.

Si el orden de la ecuación es superior a 1 aparece, entonces, la siguiente clasificación dependiendo de dónde se aplican las condiciones de contorno:

- Problemas de *condiciones iniciales*: todas las condiciones necesarias para resolver la ecuación se aplican en el mismo punto, como en los dos ejemplos anteriores o, en general, en la ecuación de Newton.
- Problemas de *condiciones de contorno*: las condiciones necesarias para resolver la ecuación se aplican en varios puntos distintos. Por ejemplo la ecuación que determina la temperatura de una barra de longitud L , con temperatura inicial T_0 y cuyos extremos se mantienen a las temperaturas T_A y T_B , es

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad T(t = 0, x) = T_0, \quad T(t, x = 0) = T_A, \quad T(t, x = L) = T_B,$$

Esta ecuación es de *condiciones iniciales* respecto al tiempo t (ya que solo hay una condición) y de *condiciones de contorno* respecto a la posición x .

Los problemas de condiciones iniciales son considerablemente más sencillos que los de condiciones de contorno. En particular, en un problema de condiciones iniciales se puede construir la solución por medio de un desarrollo en serie de Taylor centrado en el punto donde se dan las condiciones iniciales (suponiendo que no haya singularidades etc.), esto no es posible en el caso de problemas de condiciones de contorno, que son considerablemente más complicados.

8.1.4. Ecuaciones *lineales* y *no-lineales*

- Ecuaciones lineales: la ecuación diferencial (y todas las condiciones iniciales o de contorno que se apliquen) son expresiones lineales en las variables *dependientes* y sus derivadas. Por ejemplo las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo, o la ecuación de Poisson en dos dimensiones con condiciones de contorno homogéneas en el infinito:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = s(x, y), \quad f(x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty) = 0$$

donde $s(x, y)$ es un término fuente dado por una función arbitraria de x e y . Obsérvese que para que la ecuación sea lineal debe ser lineal la dependencia respecto de las variables *dependientes* y sus derivadas (f , $\partial^2 f / \partial x^2$ y $\partial^2 f / \partial y^2$ en el ejemplo de arriba), pero no se impone nada sobre la dependencia de la ecuación respecto a las variables *independientes* (x e y en el ejemplo de arriba).

- Ecuaciones no lineales: la ecuación diferencial (y/o alguna de las condiciones iniciales o de contorno) incluyen expresiones no lineales en las variables dependientes y/o en sus derivadas.

Por ejemplo, la ecuación de ondas con velocidad de propagación c constante es lineal

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 f$$

Pero si la velocidad de la onda en lugar de ser constante es una función de la amplitud $c = c(f)$ (por ejemplo, supongamos que la velocidad de la onda es proporcional a la amplitud $c = c_0 f$), entonces la ecuación deja de ser lineal, porque en ese caso el producto $c(f)^2 \nabla^2 f$ no es lineal en f .

Otro ejemplo de ecuación no lineal es la ecuación de Newton con una fuerza que dependa de la velocidad de forma no lineal, p. ej. la ecuación de Newton correspondiente a un oscilador armónico amortiguado es:

$$-kx + a \left(\frac{dx}{dt} \right)^\gamma = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Si $a \neq 0$ esta ecuación sólo es lineal si $\gamma = 0$ o si $\gamma = 1$, siendo no lineal en cualquier otro caso.

Las ecuaciones no lineales son extraordinariamente más complicadas que las lineales. Para las ecuaciones lineales existe una teoría matemática que permite saber si una ecuación determinada tiene solución única o no dependiendo de las condiciones de contorno que se apliquen; además en ciertos casos esta teoría permite incluso construir la solución analítica del problema (ver *método de separación de variables* y *función de Green*). Por otra parte, las ecuaciones lineales cumplen el principio de superposición, según el cual la superposición lineal de soluciones es también solución. Nada de eso es cierto para las ecuaciones no lineales, el principio de superposición no se cumple y dada una ecuación no lineal el problema de saber cuándo tiene solución única es, en multitud de casos, un problema abierto.

8.1.5. Ecuaciones con o sin solución analítica

El conjunto de ecuaciones diferenciales con solución analítica es bastante restringido (básicamente ecuaciones lineales con coeficientes constantes y unos pocos tipos de ecuaciones no lineales). En la asignatura de métodos matemáticos correspondiente se estudiará cuáles son (y cómo se resuelven) los pocos tipos de ecuaciones diferenciales para los que es posible construir una solución de manera analítica (pocos pero extraordinariamente importantes). En la inmensa mayoría de los casos, especialmente si estamos con ecuaciones en derivadas parciales de orden mayor que 1, sólo es posible conocer la solución de manera aproximada mediante métodos numéricos, que se estudiarán en la asignatura correspondiente. Afortunadamente en la actualidad existen varios métodos numéricos que permiten obtener soluciones aproximadas con gran precisión, para lo cual es necesario, por supuesto, emplear un ordenador.

Por cierto, que exista la solución analítica de una ecuación, y que sepamos construirla, no significa que ésta sea sencilla, con mucha frecuencia la solución analítica de una ecuación se expresa por medio de una serie con infinitos términos, cuya evaluación no es del todo trivial. Por tanto, el interés en los métodos numéricos no se limita a aquellos casos en los que no se puede construir la solución analítica, sino también a casos en los que, aunque sí tenemos *formalmente* una solución analítica, su evaluación numérica es complicada.

8.2. Funciones del Maxima que debemos aplicar

Los métodos numéricos de que se dispone hoy en día permiten resolver incluso casos bastante complicados, incluyendo diversos problemas en derivadas parciales, no lineales y con condiciones de contorno (que, por otra parte, son muy habituales en física), siempre y cuando no haya singularidades (si hay una singularidad, es decir, si algo se hace infinito, el método numérico no puede continuar). El estudio de estos métodos numéricos queda más allá de lo que queremos ver en esta asignatura. En esta breve introducción no podemos extendernos más sobre teoría de ecuaciones diferenciales ni sobre los métodos que existen para resolverlas, nos conformaremos con ver qué ecuaciones es capaz de resolver el MAXIMA. Las cuestiones que aparecen ahora son:

- * **¿Qué tipo de ecuaciones diferenciales puede resolver el `WXMAXIMA`?**
- * **¿Cuáles son las funciones del `WXMAXIMA` que hay que usar?**

Análogamente a como le sucede a la inmensa mayoría de los paquetes de cálculo de propósito general, el `WXMAXIMA` sólo resuelve ecuaciones diferenciales ordinarias de orden 1 y 2. En aquellos casos en los que es posible encontrar la solución general de forma analítica `WXMAXIMA` es capaz de aplicar posteriormente tanto condiciones iniciales como de contorno. Para los casos en los que no es posible encontrar la solución analítica `WXMAXIMA` sólo es capaz de resolver numéricamente sistemas de n ecuaciones diferenciales ordinarias de orden 1.

Dejando de lado funciones actualmente en desarrollo (como `contrib_ode`) el `WXMAXIMA` dispone principalmente de las siguientes funciones:

8.2.1. Problemas con solución analítica

- Función `ode2(eqn, dvar, ivar)`, resuelve analíticamente una ecuación diferencial ordinaria de orden 1 o 2, `eqn` = la ecuación a resolver, `dvar` = variable dependiente, `ivar` = variable independiente.
- Función `ic1(solution, xval, yval)`. En el caso de una ecuación diferencial ordinaria de orden 1, `ic1` sustituye la condición inicial $dvar(xval) = yval$ en la solución general `solution` hallada previamente con `ode2`.
- Función `ic2(solution, xval, yval, dval)`. En el caso de una ecuación diferencial ordinaria de orden 2, `ic2` sustituye las condiciones iniciales $dvar(xval) = yval$, junto con $dvar'(xval) = dval$ para la variable dependiente y su primera derivada en el punto `xval`, siendo `solution` la solución general hallada previamente con `ode2`.
- Función `bc2(solution, xval1, yval1, xval2, yval2)`. En el caso de una ecuación diferencial ordinaria de orden 2, `bc2` sustituye las condiciones de contorno $dvar(xval1) = yval1$, junto con $dvar(xval2) = yval2$ para la variable dependiente en los puntos `xval1` y `xval2`, siendo `solution` la solución general hallada previamente con `ode2`.

Por supuesto, para que esto funcione es necesario que `ode2` haya sido capaz de encontrar la solución general previamente, lo cual no siempre será posible.

8.2.2. Problemas con solución numérica

- Función `rk(ODE, var, initial, domain)` (respectivamente función `rk([ODE1, ..., ODEm], [v1, ..., vm], [init1, ..., initm], domain)`), resuelve una ecuación diferencial ordinaria de orden 1 (respectivamente un sistema de m ecuaciones diferenciales ordinarias de orden 1) por medio del método de Runge-Kutta de 4º orden. El algoritmo de Runge-Kutta de 4º orden es de los más habituales para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales, en la asignatura de métodos numéricos se estudiará con detalle en qué consiste este algoritmo. En la función `rk(ODE, var, initial, domain)` la variable dependiente es `var` (respectivamente las variables dependientes son `[v1, ..., vm]`), el argumento `domain` es una lista cuyo primer elemento es la variable independiente, el segundo y tercer elementos indican los límites del intervalo donde vamos a hallar la solución y el cuarto y último elemento indica el paso de integración para el método de Runge-Kutta. El argumento `initial` indica la condición inicial (respectivamente la lista de condiciones iniciales) del sistema.

Veamos la sintaxis de `rk` con algo más de detalle. Para resolver el sistema de n ecuaciones de orden 1

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$$

... ..

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$$

con $t \in [0, t_{\text{fin}}]$ y con condiciones iniciales en $t = 0$

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad \dots \quad x_n(0) = x_{n0}$$

lo que tenemos que pasarle a `rk(ODE, var, initial, domain)` es:

```
ODE : [f1, f2, ..., fn]
var  : [x1, x2, ..., xn]
initial : [x10, x20, ..., xn0]
domain : [t, 0, tfin, paso]
```

(donde `paso` es el paso de integración para el algoritmo de Runge-Kutta).

8.2.3. Algunas cosas que hay que tener en cuenta

Esto es una trivialidad, pero es importante tenerlo en cuenta. Cuando uno resuelve una ecuación diferencial de forma analítica la ecuación puede depender de muchos parámetros, cuyos valores no es necesario especificar, sin embargo, para hallar la solución por métodos numéricos todos los parámetros deben tener valores numéricos concretos.

Por ejemplo, la solución general de

$$\frac{dy}{dx} = ay$$

es $y = y_0 e^{ax}$ (es trivial verificarlo), donde el valor numérico del parámetro a y de la condición inicial ($y(x = 0) = y_0$) que aparece al hallar la solución no están especificados. Sin embargo, para resolver esta misma ecuación de forma numérica tenemos que asignar valores numéricos concretos al parámetro a y a la condición inicial y_0 , no es posible resolver numéricamente una ecuación diferencial sin especificar valores numéricos concretos para todos los parámetros y condiciones iniciales (y/o de contorno) que aparezcan en la ecuación.

Es muy habitual que lo que realmente nos interese de una ecuación diferencial sea conocer cómo depende la solución respecto de los parámetros que aparecen en la ecuación ¿cómo podemos hallar eso numéricamente? Por ejemplo, en la ecuación de arriba ¿cómo hallaríamos numéricamente la dependencia de la solución respecto de a ? La única forma es resolver numéricamente para muchos valores numéricos concretos de a y posteriormente analizar cómo cambian las soluciones numéricas encontradas al variar a . Lo mismo se aplica también para el estudio de la dependencia de la solución respecto de condiciones iniciales y de contorno.

8.2.4. Cambios de variable

Podría parecer que el conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias que podemos resolver numéricamente con el `wxMAXIMA` es extremadamente restringido, solo sistemas de orden 1. Realmente este conjunto no es tan exiguo, ya que incluye cualquier sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden n , siempre y cuando el problema sea de *condiciones iniciales* (el `wxMAXIMA` no puede resolver numéricamente problemas de condiciones de contorno).

Supongamos que queremos resolver el problema de 2 osciladores acoplados:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_1^2 x + \frac{y}{10}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega_2^2 y - \frac{x}{10}$$

para unas condiciones iniciales dadas

$$x(t=0) = x_0, \quad y(t=0) = y_0, \quad \frac{dx}{dt}\bigg|_{t=0} = u_0, \quad \frac{dy}{dt}\bigg|_{t=0} = v_0$$

¿Cómo se hace esto numéricamente con wxMAXIMA?

Tenemos que re-escribir este sistema como un sistema de EDOs de orden 1. Para transformar este sistema de 2 ecuaciones de orden 2 (para x e y) en un sistema de 4 ecuaciones de orden 1 basta con introducir dos nuevas variables dependientes, definidas como las correspondientes primeras derivadas

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}$$

de tal forma que el sistema de partida es equivalente al sistema de 4 ecuaciones de orden 1:

$$\frac{du}{dt} = -\omega_1^2 x + \frac{y}{10}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\omega_2^2 y - \frac{x}{10}$$

$$\frac{dx}{dt} = u$$

$$\frac{dy}{dt} = v$$

junto con las condiciones iniciales

$$x(t=0) = x_0, \quad y(t=0) = y_0, \quad u(t=0) = u_0, \quad v(t=0) = v_0$$

Finalmente debemos asignar valores numéricos concretos a todos los parámetros y condiciones iniciales y ya estamos en condiciones de resolver esto numéricamente por medio de `rk`.

Esto mismo se puede hacer para un sistema de un número arbitrario de ecuaciones diferenciales ordinarias de cualquier orden, siempre y cuando el problema sea de condiciones iniciales.

8.3. Problemas resueltos

Ejercicio 1

Resuelva numéricamente para $t \in [0, 50]$ este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + k(y - x), \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky + k(x - y)$$

que describe la evolución temporal de 2 osciladores armónicos acoplados.

Para el cálculo numérico considere las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $\frac{dx}{dt}(t = 0) = 1$, $y(0) = 0$, $\frac{dy}{dt}(t = 0) = 0$ y para los parámetros m y k tome los valores $m = k = 1$ (esto equivale a tomar como escala de tiempos al tiempo característico dado por $\sqrt{m/k}$, que es el inverso de una de las dos frecuencias características del sistema). Para el paso inicial de Runge-Kutta es suficiente tomar 0,1.

Una vez finalizado el cálculo numérico realice las siguientes representaciones gráficas:

- Posiciones $x(t)$ e $y(t)$ frente al tiempo t .
- Posiciones en términos de $x(t) + y(t)$ y $x(t) - y(t)$ frente a t .
- Energía cinética del sistema $K = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$, energía potencial $U = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(y - x)^2 + \frac{1}{2}y^2$, y suma de ambas $K + U$ frente a t . ¿Se mantiene constante la energía total del sistema?
- Posición $y(t)$ frente a $x(t)$.
- Velocidades frente a posiciones: $\frac{dx}{dt}$ frente a x y $\frac{dy}{dt}$ frente a y .
- Posición $x(t) - y(t)$ frente a $x(t) + y(t)$.
- Velocidades frente a posiciones en términos de los modos normales, es decir: $\frac{dx+y}{dt}$ frente a $x + y$ y $\frac{dx-y}{dt}$ frente a $x - y$.

Ejercicio 2

En principio podría parecer que no podemos resolver el sistema anterior analíticamente con `wxMaxima`, ya que `ode2(eqn, dvar, ivar)` no resuelve sistemas, sino ecuaciones individuales. De todas formas, por medio del cambio de variable dependiente

$$z(t) = x(t) + y(t), \quad w(t) = x(t) - y(t)$$

este sistema se convierte en un sistema de 2 ecuaciones desacopladas para las nuevas variables $z(t)$ y $w(t)$. Las variables $z(t)$ y $w(t)$, en términos de las cuales se desacoplan las ecuaciones del sistema de partida, se llaman *modos normales* del sistema, esto se estudiará a fondo en la asignatura de mecánica correspondiente.

Sustituya este cambio de variable y halle la solución general en función de los parámetros m y k y de las condiciones iniciales usando la función `ode2(eqn, dvar, ivar)`.

Para un oscilador armónico con masa m y constante k sabemos que su frecuencia característica es $\omega = \sqrt{k/m}$. Teniendo esto en cuenta ¿cuál es la frecuencia característica de cada modo normal?

Ejercicio 3

Considere ahora el mismo sistema de osciladores armónicos pero con rozamiento, descrito por las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx + k(y - x) - a \frac{dx}{dt}, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -ky + k(x - y) - a \frac{dy}{dt}$$

con las mismas condiciones iniciales que el ejercicio 1.

Resuelva numéricamente este sistema para $m = k = 1$ y $a = 0,2$, y realice las mismas gráficas que en el ejercicio 1. ¿Se puede extraer alguna conclusión de los resultados? ¿se sigue conservando la energía total ahora que hay rozamiento?

Soluciones

Ejercicio 1

Resuelva numéricamente para $t \in [0, 50]$ este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx + k(y - x), \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -ky + k(x - y)$$

que describe la evolución temporal de 2 osciladores armónicos acoplados.

Para el cálculo numérico considere las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $\frac{dx}{dt}(t = 0) = 1$, $y(0) = 0$, $\frac{dy}{dt}(t = 0) = 0$ y para los parámetros m y k tome los valores $m = k = 1$ (esto equivale a tomar como escala de tiempos al tiempo característico dado por $\sqrt{m/k}$, que es el inverso de una de las dos frecuencias características del sistema). Para el paso inicial de Runge-Kutta es suficiente tomar 0,1.

Una vez finalizado el cálculo numérico realice las siguientes representaciones gráficas:

- Posiciones $x(t)$ e $y(t)$ frente al tiempo t .
- Posiciones en términos de $x(t) + y(t)$ y $x(t) - y(t)$ frente a t .

- Energía cinética del sistema $K = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$, energía potencial $U = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(y-x)^2 + \frac{1}{2}y^2$, y suma de ambas $K + U$ frente a t . ¿Se mantiene constante la energía total del sistema?
- Posición $y(t)$ frente a $x(t)$.
- Velocidades frente a posiciones: $\frac{dx}{dt}$ frente a x y $\frac{dy}{dt}$ frente a y .
- Posición $x(t) - y(t)$ frente a $x(t) + y(t)$.
- Velocidades frente a posiciones en términos de los modos normales, es decir: $\frac{dx+y}{dt}$ frente a $x + y$ y $\frac{dx-y}{dt}$ frente a $x - y$.

Para resolver este sistema con `rk` tenemos que escribir las ecuaciones en la forma

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2, \quad \dots$$

de manera que podamos pasarle a `rk` la colección de funciones f_1, f_2 , etc. Para ello pasamos todo al lado derecho de la ecuación y despejamos las derivadas, definimos entonces el sistema

```
eq1 : -diff(x(t),t,2) + (k/m) * ( - x(t) + (y(t) - x(t)) ) - (damp/m) *
      diff(x(t),t,1);
eq2 : -diff(y(t),t,2) + (k/m) * ( - y(t) + (x(t) - y(t)) ) - (damp/m) *
      diff(y(t),t,1);
evsys : [eq1, eq2];
```

en el que hemos incluido también el término de rozamiento que aparece en el ejercicio 3 (en términos de `eq1` y `eq2` las ecuaciones de partida quedan como `eq1 = 0`, `eq2 = 0`).

Sustituimos ahora el cambio de variable propuesto para convertir este sistema de 2 ecuaciones de orden 2 en un sistema de 4 ecuaciones de orden 1. Para ello sustituimos en primer lugar el cambio de variable para dx/dt ($u = dx/dt$)

```
evsys : subst(u(t), diff(x(t), t, 1), evsys);
evsys : subst(diff(u(t), t, 1), diff(x(t), t, 2), evsys);
```

sustituimos a continuación el cambio de variable para dy/dt ($v = dy/dt$)

```
evsys : subst(v(t), diff(y(t), t, 1), evsys);
evsys : subst(diff(v(t), t, 1), diff(y(t), t, 2), evsys);
```

añadimos al sistema las ecuaciones de evolución de las nuevas variables que hemos definido u y v , escrito de manera análoga a como hemos escrito las demás ecuaciones

```
evsys : append([-diff(x(t), t, 1) + u(t), -diff(y(t), t, 1) + v(t)],
              evsys);
```

La colección de funciones f_1, f_2 etc. que tenemos que pasarle a la función `rk` está dado entonces por

```
evsys : evsys + [diff(x(t), t, 1), diff(y(t), t, 1), diff(u(t), t, 1),
diff(v(t), t, 1)];
```

Por supuesto que todo este tratamiento analítico de las ecuaciones de partida se podría haber hecho más rápido sencillamente a mano, pero no está de más aprender a hacer este tipo de manipulaciones por medio de programas de cálculo simbólico, ya que esto nos permitirá manipular de manera automática sistemas más grandes en el futuro.

Para resolver este sistema con `rk` sustituimos los valores numéricos indicados para los parámetros (en este problema consideraremos el caso sin rozamiento)

```
evsys : subst(0, damp, subst(1, m, subst(1, k, evsys)));
```

y eliminamos los paréntesis de dependencia respecto al tiempo

```
evsys : subst(v, v(t), subst(u, u(t), subst(y, y(t), subst(x, x(t), evsys)
) ) );
```

A continuación definimos el conjunto de variables dependientes

```
depvar : [x, y, u, v]$
```

las condiciones iniciales del problema (en estos dos últimos pasos hay que tener cuidado con el orden en que hemos escrito las ecuaciones para no cometer errores)

```
conini : [0, 0, 1, 0]$
```

y el rango de valores de la variable independiente en el que vamos a integrar el sistema, junto con el parámetro de paso para el método de Runge-Kutta (el enunciado indica el valor adecuado)

```
tdom : [t, 0, 50, 0.1]$
```

Una vez hecho esto la solución está dada por

```
data : rk(evsys, depvar, conini, tdom)$
```

Al resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias por medio de un método numérico lo que obtenemos son los valores de cada una de las variables dependientes (en este caso x, y, u, v) evaluadas en un cierto conjunto de valores de la variable independiente (en este caso t). Concretamente la estructura de los resultados que nos devuelve `rk` es la siguiente: `data = [[$t_1, x(t_1), y(t_1), u(t_1), v(t_1)$], [$t_2, x(t_2), y(t_2), u(t_2), v(t_2)$], etc.]. Para representar los resultados gráficamente lo más cómodo sería tener una lista con los valores de cada variable, para ello convertimos estos datos en una matriz`

```
Mdata : apply(matrix, data)$
```

y extraemos las listas de valores correspondientes

```
tlist : transpose(Mdata) [1]$
xlist : transpose(Mdata) [2]$
ylist : transpose(Mdata) [3]$
ulist : transpose(Mdata) [4]$
vlist : transpose(Mdata) [5]$
```

Una vez hecho esto para representar cada una de las gráficas que se pide basta con hacer lo siguiente:

- Posiciones $x(t)$ e $y(t)$ frente al tiempo t .

```
/* AMPLITUDES vs. t */
plot2d([
[discrete, tlist, xlist], [discrete, tlist, ylist]
]);
```

La gráfica que se obtiene muestra las posiciones x e y frente a t . Así como el comportamiento de un oscilador armónico aislado es muy sencillo y predecible, vemos que basta con acoplar dos osciladores armónicos para obtener un tipo de movimiento bastante más complicado, al menos aparentemente.

- Posiciones en términos de $x(t) + y(t)$ y $x(t) - y(t)$ frente a t .

```
/* MODOS NORMALES vs. t */
plot2d([
[discrete, tlist, xlist + ylist], [discrete, tlist, xlist - ylist]
]);
```

En términos de los modos normales $x+y$ y $x-y$ el comportamiento del sistema es extremadamente simple, obtenemos dos osciladores armónicos desacoplados, cada uno con su frecuencia característica.

- Energía cinética del sistema, potencial y suma de ambas. ¿Se mantiene constante la energía total del sistema?

En primer lugar calculamos las listas de valores de las energías cinética y potencial

```
/* ENERGIA vs. t */
Klist : (ulist^2 + vlist^2) / 2$
Ulist : xlist^2 / 2 + (xlist - ylist)^2 / 2 + ylist^2 / 2$
```

y posteriormente hacemos las gráficas correspondientes

```
plot2d([
[discrete, tlist, Klist], [discrete, tlist, Ulist], [discrete, tlist
, Klist + Ulist]
], [y, 0, 0.6]);
```

Comprobamos que en este caso, al no haber rozamiento, la energía total se conserva, cambiando con el tiempo de cinética a potencial de manera periódica.

- Posición $y(t)$ frente a $x(t)$.

```
/* y vs. x */
plot2d([discrete, xlist, ylist], [gnuplot_preamble,"set size ratio
1;"]);
```

La gráfica que se obtiene muestra un figura de Lissajous, correspondiente a la composición de dos movimientos armónicos simples, pero rotada ya que las variables x e y están acopladas.

- Velocidades frente a posiciones: $\frac{dx}{dt}$ frente a x y $\frac{dy}{dt}$ frente a y .

```

/* u vs. x */
plot2d( [discrete, ulist, xlist], [gnuplot_preamble,"set size ratio
1;"] );
/* v vs. y */
plot2d( [discrete, vlist, ylist], [gnuplot_preamble,"set size ratio
1;"] );

```

En mecánica un gráfico de velocidades frente a posiciones, o de manera más precisa de momentos frente a posiciones, es lo que se denomina el diagrama de fases del sistema. En este caso el diagrama de fases del sistema tiene 4 dimensiones ($mdx/dt, mdy/dt, x, y$) de modo que para visualizarlo tenemos que emplear "proyecciones" del diagrama de fases, como las mostradas en estas 2 figuras.

- Posición $x(t) - y(t)$ frente a $x(t) + y(t)$.

```

/* Modos normales */
plot2d( [discrete, xlist - ylist, xlist + ylist], [gnuplot_preamble
,"set size ratio 1;"] );

```

En este caso observamos la figura de Lissajous sin ninguna rotación, ya que las variables $x+y$ y $x-y$ están desacopladas. A la vista de esta figura nos podemos preguntar: si prolongamos el cálculo más tiempo ¿llegará a cerrarse alguna vez sobre sí misma esta curva? La respuesta en el ejercicio 2.

- Velocidades frente a posiciones en términos de los modos normales, es decir: $\frac{dx+y}{dt}$ frente a $x+y$ y $\frac{dx-y}{dt}$ frente a $x-y$.

```

/* vel vs. pos, modos normales */
plot2d([
[discrete, ulist + vlist, xlist + ylist],
[discrete, ulist - vlist, xlist - ylist]
], [gnuplot_preamble,"set size ratio 1;"]);

```

Así como las gráficas de velocidades frente a posiciones en términos de las variables de partida eran difíciles de interpretar, el diagrama de fases en términos de los modos normales es muy claro, obteniéndose una elipse para cada modo normal.

Ejercicio 2

En principio podría parecer que no podemos resolver el sistema anterior analíticamente con wxMaxima, ya que `ode2(eqn, dvar, ivar)` no resuelve sistemas, sino ecuaciones individuales. De todas formas, por medio del cambio de variable dependiente

$$z(t) = x(t) + y(t), \quad w(t) = x(t) - y(t)$$

este sistema se convierte en un sistema de 2 ecuaciones desacopladas para las nuevas variables $z(t)$ y $w(t)$. Las variables $z(t)$ y $w(t)$, en términos de las cuales se

desacoplan las ecuaciones del sistema de partida, se llaman *modos normales* del sistema, esto se estudiará a fondo en la asignatura de mecánica correspondiente.

Sustituya este cambio de variable y halle la solución general en función de los parámetros m y k y de las condiciones iniciales usando la función `ode2(eqN, dvar, ivar)`.

Para un oscilador armónico con masa m y constante k sabemos que su frecuencia característica es $\omega = \sqrt{k/m}$. Teniendo esto en cuenta ¿cuál es la frecuencia característica de cada modo normal?

Veamos en primer lugar la ecuación de evolución de $z(t) = x(t) + y(t)$, para ello sustituimos $x = z - y$ en la suma de las ecuaciones de partida. Para hacer esto de manera automática se puede hacer lo siguiente. Definimos `eqA` como `eq1+eq2` y `aux` como x en términos de z e y

```
eqA : eq1 + eq2;
aux(t) := z(t) - y(t);
```

sustituimos x por $z - y$

```
eqA : expand(subst(diff(aux(t),t,2), diff(x(t),t,2), eqA));
eqA : expand(subst(diff(aux(t),t,1), diff(x(t),t,1), eqA));
eqA : expand(subst(aux(t),x(t), eqA));
```

Una vez tenemos la ecuación de evolución de $z(t)$ la resolvemos analíticamente por medio de `ode2`

```
ode2(eqA = 0, z(t), t);
```

Para el otro modo normal $z(t) = x(t) - y(t)$ hacemos lo análogo, definiendo `eqB` como `eq1-eq2` y `aux` como x en términos de w e y

```
eqB : eq1 - eq2;
aux(t) := w(t) + y(t);
```

Sustituimos x por `aux` igual que antes

```
eqB : expand(subst(diff(aux(t),t,2), diff(x(t),t,2), eqB));
eqB : expand(subst(diff(aux(t),t,1), diff(x(t),t,1), eqB));
eqB : expand(subst(aux(t),x(t), eqB));
```

y por último resolvemos la ecuación con `ode2`

```
ode2(eqB = 0, w(t), t);
```

Aunque el enunciado sólo pedía resolver analíticamente este sistema para el caso de amortiguamiento nulo, vemos que es posible obtener la solución analítica para el caso general, con a arbitrario.

En el caso de amortiguamiento nulo es muy fácil ver que la frecuencia característica de $z(t)$ es $\omega_z = \sqrt{k/m}$, mientras que la de $w(t)$ es $\omega_w = \sqrt{3k/m}$.

En el ejercicio 1 planteábamos la cuestión de si las figuras de Lissajous de este conjunto de osciladores son abiertas o cerradas. Podemos emplear el `wxMaxima` para calcular la solución numérica del sistema hasta tiempos muy grandes, lo cual nos indica que la gráfica de y frente a x no parece que se cierre, pero cómo estar seguros. En general, si tenemos dos osciladores con frecuencias ω_1 y ω_2 , es decir con periodos

$T_1 = 2\pi/\omega_1$ y $T_2 = 2\pi/\omega_2$ el movimiento es periódico si el cociente entre las dos frecuencias es un número racional (ya que en ese caso es posible encontrar dos números naturales n y m tales que $nT_1 = mT_2$). En este caso las figuras de Lissajous de este conjunto de osciladores no se cierran sobre sí mismas (no son periódicas), ya que las frecuencias de los dos osciladores no son conmensurables (de hecho $\omega_w/\omega_z = \sqrt{3}$).

Ejercicio 3

Considere ahora el mismo sistema de osciladores armónicos pero con rozamiento, descrito por las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx + k(y - x) - a \frac{dx}{dt}, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -ky + k(x - y) - a \frac{dy}{dt}$$

con las mismas condiciones iniciales que el ejercicio 1.

Resuelva numéricamente este sistema para $m = k = 1$ y $a = 0,2$, y realice las mismas gráficas que en el ejercicio 1. ¿Se puede extraer alguna conclusión de los resultados? ¿se sigue conservando la energía total ahora que hay rozamiento?

Para este ejercicio basta con repetir los pasos dados en el ejercicio 1, pero sustituyendo el valor 0.2 para el coeficiente de rozamiento. Al haber rozamiento la energía cinética + potencial de este móvil ya no se conserva, ya que el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento se transforma en calor.

A medida que el sistema pierde energía tiende al punto de equilibrio, dado en este caso por $x = y = 0$, $u = v = 0$. Esto se ve muy claramente en los diagramas de fases en términos de los modos normales, que antes mostraban curvas periódicas (elipses) y ahora en cambio muestran espirales que van colapsando hacia el punto de equilibrio.